SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XII, NR XXIV, 2019

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII ŞI SERVICII", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 24

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XII, Nr. XXIV, DECEMBRIE 2019, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Lenuţa Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cristina Drugă - Inspector matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Lucian Tuţescu
Marius Drăgan
Daniel Sitaru
Mihály Bencze
Gheorghe Ghiţă
Ionel Tudor

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor şef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre
Marin Chirciu
Ion Stănescu
Iuliana Traşcă
Gabriel Tica
Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 4

EXAMENE SI CONCURSURI.....14

PROBLEME REZOLVATE..... 21

PROBLEME PROPUSE 41

QUICKIES 49

CALEIDOSCOP MATEMATIC 52

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri :**

Florică **Anastase**, Orlando **Alecu**, Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea,** Bela **Kovacs,** Anicuţa **Beţiu,** Laura **Brutaru,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ana **Cismaru,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Marian **Ciuperceanu,** Claudiu **Ciurcu,** Cătălin **Cristea,** Tatiana **Cristea,** Marian **Cucoaneş** , Luiza Lorena **Cremeneanu**, Camelia **Dană**, Radu **Diaconu**, Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Gheorghe **Dârstaru,** Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu,** Ileana **Duma,** Cristina **Ene,** Alina Georgiana **Ghiţă,** Luminiţa **Ghiţă,** Mădălina **Giurgescu,** Lucian Dan **Grigore,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ştefan **Gobeş**, **Dorina** Goiceanu, Daniel **Iarca**, Viorel **Ignătescu**, Ionuţ **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Adalbert **Kovacs,** Mihaela **Mirea,** Simona **Miu,** Cristian **Moanţă,** Ionel **Morozenco**, Gabriela **Neguţescu**, Gabriel **Nemţaru**, Constantin **Nicolau**, Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Ion **Pătraşcu**, Stelian **Piscan,** Sorin **Pirlea,** Alin **Pop,** Victoria **Popa,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Florentina **Popescu,** Adriana **Puescu,** Doina **Popescu,** Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Aurora **Porojnicu**, Angel **Plaza**, Simona **Radu**, Petre **Rău**, Robert **Gheorghiţă**, Iulia **Sanda**, Dan **Săulescu**, Livia **Stan**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Gheorghe **Struţu,** Alina **Tigae,** Laura **Tănase,** Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu,** Diana **Trailescu,** Ovidiu **Ţâţan,** Dumitru **Tudor,** Roxana **Vasile,** Ionuţ-Florin **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Vişescu,** Elena **Zainea,** Mariana **Zotolea**

REDACTIA
Liceul Tehnologic „ Meserii şi Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

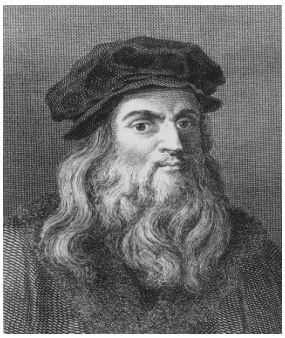
„ Cine învață de la altul este un hoț cinstit”.

proverb german

1. Istoria matematicii

Leonardo da Vinci- artistul științei

de prof. Adrian Stan, Buzău



Născut pe 15 aprilie 1452 în mica localitate rurală Vinci situată între Montalbano și Valea Arno din regiunea Toscanei, aproape de Florența, copilul **Leonardo** este considerat nelegitim și este crescut de bunicii tatălului său. De mic este înzestrat cu o mare putere de a reprezenta în desen lucrurile care-l înconjurau, mori cu apă, turbine, pluguri, unelte agricole având aptitudinea de a desena chiar cu două mâini în același timp.

În 1469 tatăl său îl luă de mână și îl duse la Florența în atelierul unui celebru pictor și gravor, Andreea del Verrocchio în al cărui atelier lucrase Boticelli și alți pictori de bună calitate.

Astfel că , de mic copil după ce se obișnuise cu imaginile pictate din cele 16 biserici ale zonei sale natale, la Florența ajunge să se găsească în mijlocul unei revoluții culturale reprezentate de curentul umanist.

Primul său desen ca reper în cadrul operei sale îl constituie „ Peisajul Sfintei Maria a Zăpezii” (1, pag 29) terminat în 5 august 1743 reprezentând un peisaj al locurilor sale natale care surprinde prin densitatea formelor și în același timp a tranparenței și a perspectivei în care sunt prezentate acestea, lumina jucând un rol fundamental prin modul cum este transpusă pe pânză.

Foarte multe lucruri de început ale lui Leonardo nu se cunosc încă, deși au apărut cu timpul fel și fel de desene care i s-au atribuit.

În atelierul lui Verrocchio, **Leonardo** se îndeletnicește nu doar cu picturi ci și cu realizarea de drapaje după diverse modele, inclusiv anatomice, fabrică diverse modele de lut, experimenta diverse mecanisme ale unor mașinării și chiar să sudeze materiale din cupru cu ajutorul oglinzilor parabolice.

Două mari picturi „ Bunavestire” și „ Botezul lui Christos” evidențiază și prezența tânărului artist alături de ceilalți elevi din atelier, stilul său fiind de atunci inconfundabil, de o profunzime extraordinară cu elemente de conținut discordante prin utilizarea erorii de perspectivă.

Desenarea foarte minuțioasă a îngerilor, a caracteristicilor foarte fine a diverselor figurine reprezentând îngeri îi este caracteristică lui **Leonardo** fapt ce îl face pe maestrul său Verrocchio să afirme „ că se simte umilit să constate că un copil era mai priceput decât el”. (1, pag. 37)

Leonardo este printre primii care utilizează uleiul pentru diluarea vopselelor în loc de apă și clei.

Pictorul era familiarizat cu studiul naturii și începe să reprezinte în schițele sale diverse sisteme hidraulice, mașini care să meargă singure, proiectoare pentru lumină, studiind în acest sens reflexia luminii și și-a conceput tablourile

având la bază complexitatea punerii personajelor în diverse scene, în care lumina dă naștere unor interpretări spirituale. Cunoaște arta ceramicii și a sculpturii și descoperă aspectele infinite ale rotației vaselor, lucruri care capătă înțeles în tablourile sale.

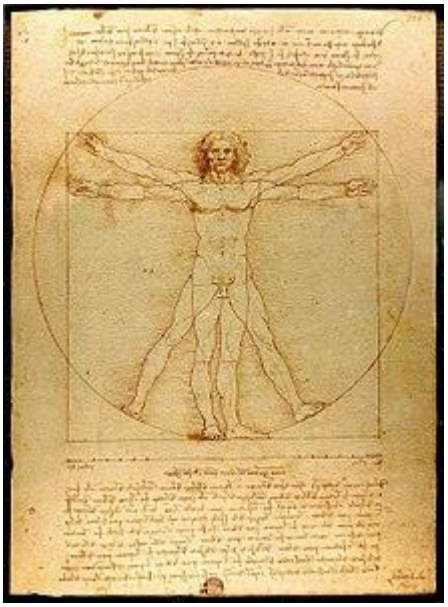
Fără îndoială a citit clasicii greci ai Antichității dar și pe cea musulmană din Evul Mediu, fapt ce i-a permis să avanseze în studiul mecanicii, al forțelor de mișcare a inerției și a echilibrului a statisticii și a dinamicii.

Leonardo se autodefinește ca inginer când se înfățișează ducelui Ludovic Maurul din Milano care începând cu 1481, cheamă la el toți marii artiști ai vremii pentru a transforma ducatul său într-o ” Atenă a Italiei”.

Leonardo se evidențiază atunci prin cunoștințele sale tehnice făcând dovada unor realizări inginerești, mașinării, care de război și alte invenții. S-a preocupat și de muzică pe care o considera „ sora” picturii, în timp ce „ știința picturii” era una a Divinității, muzica era o știință a lumii primitive dar care făcea oamenii să tresară și să danseze, era artă și gândire. Însă adevărata artă pentru Leonardo era cea vizuală, dată de pictură care era admirată de ochii privitorilor pentru eternitate.

După 1485, **Leonardo** excelează în arta portretului, începând cu „ Muzicianul ” și „ Doamna cu hermină” datorită dinamismului prezent în picturile sale.

Un autodidact prin excelență, Leonardo a lăsat mii de pagini ale manuscriselor sale în care se văd preocupările acestuia pentru arta zborului, de aceea studiază sau caută să cunoască noțiuni de fizică, mecanică, geometrie, anatomie, studiază aerodinamica și zborul păsărilor. El chiar desenează o parașută și un aparat de zbor, o ipotetică anticipare a elicopterului sau mașinării uriașe care aruncau proiectile.



Nevoia sa de bani îl face să creadă că poate inventa o mașinărie care să poată să meargă pe sub apă și să scufunde vasele inamice, însă deși desenele erau remarcabile, extrem de sugestive, nu erau însă funcționale.

Tablourile sale emană sentimente și stări sufletești dintre cele mai diverse și uneori în opoziție: „ frumusețea și dreptatea împotriva viciilor vieții”. (1, pag.65) iar în arhitectură introduce conceptul de **proporție divină** în care desenele de edificii și elementele de arhitectură trebuie să se bazeze pe proporțiile corpului omenesc.

Studiul geometriei îi permite să inventeze forme, să combine ideile tradiționale cu conceptele abstarcte de geometrie, să propună soluții practice la cerințele și nevoile unui oraș în plină dezvoltare ca Milano după anii 1485.

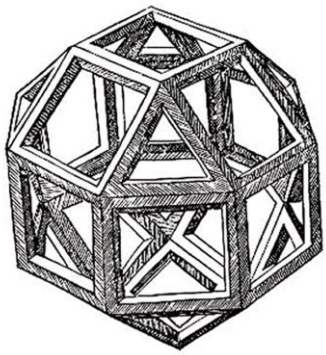
Aici, **Leonardo** realizează planul turnului Catedralei din Milano, desenează mori, organizează o întreagă rețea de drumuri și cursuri de apă, construiește un orologiu cu un resort mecanic nemaivăzut și un război de țesut mecanic care conținea într-un mod inovator principiile simultaneității care conduc la creșterea capacității de producție. se perfecționează în studiul anatomieie ajungând ca desenele sale să aibă rol de observații științifice ducând cercetarea anatomică la stadiul de artă, „ el devenind inițiatorul fiziognomoniei”. (1, pag.70).

Putem spune cu adevărat că **Leonardo da Vinci** poate fi considerat primul inginer al Renașterii, „ un profet al automatizării”. (1, pag.75).

„ Cina cea de Taină” este una dintre capodoperele lu Leonardo, terminată în 1498 la comanda ducelui de Milano Ludovic Maurul, pentru Mănăstirea Santa Maria delle Grazie, o lucrare în care pictorul excelează în studiul fiziognomoniei și a reprezentării în spațiu. Această pictură a fost atât de apreciată de Napoleon Bonaparte încât și-ar fi dorit să transporte în Franța peretele pe care era pictată această frescă.

De-a lungul anilor, pictura a fost recondiționată în mai multe rânduri astfel că, cu greu se mai pot identifica culorile originale ale lui **Leonardo.**

Matematica și geometria l-au fascinat încă de mic, însă întâlnirea cu matematicianul Luca Pacioli-Fibonacii îi dă putere și expresivitate, entuziasm și încredere în sine, deși se mai încurca în calcule elementare, el excela la geometrie, dovadă sunt poliedrele pe care le desenează pentru tratatul lui Pacioli, „ De Divina Proporționе".



De la Pacioli aflăm că **Leonardo** a realizat un „ tratat despre pictură și mișcările omenești" (1, pag.81) dar care nu ni s-a mai păstrat.

După 1500, Franța invadează Milano iar **Leonardo** se simte nevoit să plece la Veneția împreună cu Pacioli unde printre altele face planul unui pod peste Bosfor și primește comanda tabloului pentru Gioconda. Întors la Florența, se regăsește cu foștii colegi și continuă să picteze pentru diverse comenzi particulare sau să dea diverse sfaturi, până când ducele de Valencia, Cesare Borgia, fiul papei Alexandru al VI-lea îl numește oficial arhitect și inginer și îl însărcinează să studieze orașele și fortărețele de pe domeniile acestuia. Această misiune îi permite să realizeze o topografie a zonei plină de cunoștințe de geometrie, cosmologie, anatomie și estetică .

Moare la vârsta de 67 de ani în urma unui atac cerebral pe 2 mai 1519 la Clos- Luce , una din reședințele regelui francez Francisc I pentru care a lucrat în ultimii ani și cu care se întâlnea foarte des pentru discuții plăcute din cele mai variate domenii ale cunoașterii. A fost îngropat la Biserica Saint Hubert, Amboise, Franța.

Leonardo da Vinci a devenit una din cele mai importante figuri ale Renașterii care a influențat foarte mulți picturi și oameni de știință, printre care și pictorul Rafael. Un adevărat geniu datorită preocupărilor sale multilaterale, a puterii de muncă și a spiritului său mereu inovator.

Bibliografie:

1. Da Vinci- Alexxandro Vezzosi- Editura Univers. 1996.
2. https://ro.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci.

„ Cina cea de taină", 1490, de Leonardo da Vinci

„Profesorul mediocru vorbește.
Un profesor bun explică.
Un profesor superior demonstrează.
Profesorul măreț inspiră ”.

William Arthur Ward (1921- 1994)

2. Articole și note matematice

Asupra unei clase de integrale definite

de Florică Anastase, Lehliu Gară

Acest articol este propus în legătură cu un rezultat generalizat în Gazeta Matematică și un articol din revista Sclipirea Minții, nr. 13

Teoremă: Dacă $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ g:[a;b]\to\mathbb{R}^*, h:[a;b]\to\mathbb{R}$, **sunt funcții continue cu** $f(x)+f(s-x)=h(x),\ g(x)=g(s-x), \forall x\in[a;b],\ s=a+b$, **atunci** $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{h(x)}{g(x)}dx$.

Demonstrația presupune substituția $x=s-t$ de unde se obține $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx=\int_a^b \frac{f(s-t)}{g(s-t)}d(-t)=\int_a^b \frac{h(t)-f(t)}{g(t)}d(t)=\int_a^b \frac{h(t)}{g(t)}dt-\int_a^b \frac{f(t)}{g(t)}dt \Rightarrow$ c.c.t.d.

Aplicații:

1. Să se calculeze $\int_0^\pi \frac{(x+1)\sin x}{3+\cos^2 x}dx$

Soluție: $\int_0^\pi \frac{(x+1)\sin x}{3+\cos^2 x}dx=\int_0^\pi \frac{x\cdot\sin x}{3+\cos^2 x}dx+\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx=I_1+I_2$,

$$I_1=\int_0^\pi \frac{x\cdot\sin x}{3+\cos^2 x}dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\cdot\sin(\pi-x)}{3+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx-\int_0^\pi \frac{x\cdot\sin x}{3+\cos^2 x}dx \Rightarrow I_1=\pi I_2-I_1 \Rightarrow I_1=\frac{\pi}{2}I_2$$

$$I_2=\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx=-\int_0^\pi \frac{(\cos x)^I}{3+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. Să se calculeze $I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{xarctgx}{1+e^{tgx}}dx$.

Soluție:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{xarctgx}{1+e^{tgx}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{-xarctg(-x)}{1+e^{tg(-x)}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{xarctgx\cdot e^{tgx}}{1+e^{tgx}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(1+e^{tgx}-1)x\cdot arctgx}{1+e^{tgx}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\cdot arctgxdx-I$$

$$2I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\cdot arctgxdx=2\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctgx \Rightarrow I=\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctgxdx=\frac{x^2}{2}arctgx\Bigg|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Să se calculeze $I=\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\cdot\ln\left(1+e^{x\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ **.**

Soluție:

Notăm $x=-y\Rightarrow dx=-dy\Rightarrow$

$$I=-\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\cdot\ln\left(1+e^{-y\sqrt{1-y^2}}\right)dy=-\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\cdot\ln\left(\frac{1+e^{y\sqrt{1-y^2}}}{e^{y\sqrt{1-y^2}}}\right)dy=-I+\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\cdot\ln\left(e^{y\sqrt{1-y^2}}\right)dy=-I+\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy$$

Pentru $y=\sin t\Rightarrow dy=\cos t dt\Rightarrow$

$$I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\pi}{32}$$

4. Să se calculeze $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+tgx)}{2+\sin 2x+\cos 2x}dx$ **;**

Soluție: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+tg(\frac{\pi}{4}-y))}{2+\sin(\frac{\pi}{2}-2y)+\cos(\frac{\pi}{2}-2y)}dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 2-\ln(1+tgy)}{2+\sin 2y+\cos 2y}dy\Rightarrow$

$$2I=\ln 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2+\frac{2tgx}{1+tg^2x}+\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}}dx=\ln 2\int\limits_0^1\frac{1}{t^2+2t+3}dt\Rightarrow I=\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}(arctg\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}).$$

5. Să se calculeze $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{x+tg(\sin x)}{2+\cos x}dx$ **.**

Soluție:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{x+tg(\sin x)}{2+\cos x}dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi+y-tg(\sin y)}{2-\cos y}dy=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2-\cos y}dy+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{y-tg(\sin y)}{2-\cos y}dy=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{2-\cos y}dy=$$

$$=2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\sin z}dz=2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\frac{2tg\frac{z}{2}}{1+tg^2\frac{z}{2}}}dz=2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{3}.$$

Profesor, Liceul „ Alexandru Odobescu” Lehliu Gară

„ Compromisul este arta de a împărți un tort astfel încât fiecare să creadă că a primit felia cea mai mare”.

Ludwig Erhard (1897- 1977)

Asupra unei probleme date la ONM 2019

Marin Chirciu [1]

1. Fie $a,b,c,d \geq 1$ **astfel încât** $abcd = 16$ **. Arătați că** $a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 6$ **.**

ONM 2019, Clasa a7-a, Adrian Stan și Neculai Stanciu, Buzău

Soluție:

Arătăm că $x-\frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \forall x \in [1,\infty)$.

Considerăm funcția $f:[1,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x-\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}$.

Avem $f'(x) = 1+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{2x}$ și $f'(x) < 0$, pentru $x \in [1,2)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (2,\infty)$.

Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_o = 2$, deci $f(x) \geq f(2) = \frac{3}{2}$.

Obținem $x-\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\ln\frac{x}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \forall x \in [1,\infty)$.

Punând $x \in \{a,b,c,d\}$, sumând și ținând seama că $abcd = 16$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 2$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate generaliza.

2. Fie $a_1, a_2, ...a_n \geq 1$ **astfel încât** $a_1a_2...a_n = 2^n$ **,** $n \geq 1$ **. Arătați că** $a_1+a_2+...+a_n-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-...-\frac{1}{a_n} \geq \frac{3n}{2}$**.**

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

Arătăm că $x-\frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \forall x \in [1,\infty)$.

Considerăm funcția $f:[1,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x-\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}$.

Avem $f'(x) = 1+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{2x}$ și $f'(x) < 0$, pentru $x \in [1,2)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (2,\infty)$.

Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_o = 2$, deci $f(x) \geq f(2) = \frac{3}{2}$.

Obținem $x-\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\ln\frac{x}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \forall x \in [1,\infty)$.

Punând $x \in \{a_1, a_2, ...a_n\}$, sumând și ținând seama că $a_1a_2...a_n = 2^n$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 2$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate extinde.

3.Fie $a,b,c \geq 1$ **astfel încât** $abc = 8$ **. Arătați că** $a+b+c-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c} \geq 3$**.**

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

---

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”Pitești*

Arătăm că $x-\frac{2}{x}\geq 3\ln\frac{x}{2}+1, \forall x\in[1,\infty)$.

Considerăm funcția $f:[1,\infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln\frac{x}{2}$.

Avem $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}$ și $f'(x)<0$, pentru $x\in[1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,\infty)$.

Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_o=2$, deci $f(x)\geq f(2)=1$.

Obținem $x-\frac{2}{x}-3\ln\frac{x}{2}\geq 1 \Leftrightarrow x-\frac{2}{x}\geq 3\ln\frac{x}{2}+1, \forall x\in[1,\infty)$.

Punând $x\in\{a,b,c\}$, sumând și ținând seama că $abc=8$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate generaliza.

4. Fie $a_1,a_2,...a_n\geq 1$ astfel încât $a_1a_2...a_n=2^n$, $n\geq 1$. Arătați că $a_1+a_2+...+a_n-\frac{2}{a_1}-\frac{2}{a_2}-...-\frac{2}{a_n}\geq n$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Arătăm că $x-\frac{2}{x}\geq 3\ln\frac{x}{2}+1, \forall x\in[1,\infty)$.

Considerăm funcția $f:[1,\infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln\frac{x}{2}$.

Avem $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}$ și $f'(x)<0$, pentru $x\in[1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,\infty)$.

Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_o=2$, deci $f(x)\geq f(2)=1$.

Obținem $x-\frac{2}{x}-3\ln\frac{x}{2}\geq 1 \Leftrightarrow x-\frac{2}{x}\geq 3\ln\frac{x}{2}+1, \forall x\in[1,\infty)$.

Punând $x\in\{a_1,a_2,...a_n\}$, sumând și ținând seama că $a_1a_2...a_n=2^n$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=2$.

Primitive cu logaritmi

de prof. Ciobîcă Constantin, prof Ciobîcă Elena, Fălticeni

1. $I_1=\int \ln(x-n)dx, n\in N^*$.

Rezolvare: Aplicăm formula de integrare prin părţi:

$$f(x)=\ln(x-n)\Rightarrow f'(x)=\ln'(x-n)=\frac{1}{x-n} \quad si \quad g'(x)=1\Rightarrow g(x)=\int dx=x$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\Rightarrow I_1=x\ln(x-n)-\int\frac{x}{x-n}dx=$$

$$=x\ln(x-n)-x-n\ln(x-n)+\zeta=(x-n)\ln(x-n)-x+\zeta$$

2. $I_2 = \int \ln(x+n)dx, n \in N^*$

Rezolvare: Aplicăm formula de integrare prin părţi:

$$f(x) = \ln(x+n) \Rightarrow f'(x) = \ln'(x+n) = \frac{1}{x+n} \quad si \quad g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \int dx = x$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow I_2 = x\ln(x+n) - \int \frac{x}{x+n}dx =$$

$$= x\ln(x+n) - x - n\ln(x+n) + \zeta = (x+n)\ln(x+n) - x + \zeta$$

3. $$I_3 = \int \ln(x^2-n^2)dx = \int \ln[(x-n)(x+n)]dx = \int \ln(x-n)dx + \int \ln(x+n)dx = I_1 + I_2 =$$
$$= (x-n)\ln(x-n) - 2x + (x+n)\ln(x+n) + \zeta$$

4. $I_4 = \int \ln(x^2+n^2)dx$

Aplicăm metoda de integrare prin părţi: $f(x) = \ln(x^2+n^2) \Rightarrow f'(x) = \ln'(x^2+n^2) = \frac{2x}{x^2+n^2}$

$$g(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \int dx = x.$$

$$I_4 = x\ln(x^2+n^2) - 2\int \frac{x^2}{x^2+n^2}dx = x\ln(x^2+n^2) - 2\int \frac{x^2+n^2-n^2}{x^2+n^2}dx =$$

$$= x\ln(x^2+n^2) - 2x + 2n^2\int \frac{1}{x^2+n^2}dx = x\ln(x^2+n^2) - 2x + 2n\,arctg\frac{x}{n} + \zeta$$

5. $$I_5 = \int \ln(x^4-n^4)dx = \int \ln[(x^2-n^2)(x^2+n^2)]dx = \int \ln(x^2-n^2)dx + \int \ln(x^2+n^2)dx = I_3 + I_4 =$$
$$= (x-n)\ln(x-n) - 4x + (x+n)\ln(x+n) + x\ln(x^2+n^2) + 2n\,arctg\frac{x}{n} + \zeta$$

O inegalitate în două variabile

de Dumitru Tudor, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

La primul baraj din Bulgaria pentru JBMO 2018 a fost propusă următoarea problemă:

Să se demonstreze că dacă $a,b>0$***, atunci*** $\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab > 18$.

Soluţia oficială foloseşte inegalitatea mediilor pentru a ‘’elimina’’ variabilele:

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab \geq \frac{2ab}{2a^5b^5} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab = \frac{1}{a^4b^4} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^4b^4} \cdot \frac{81a^2b^2}{4}} + 9ab = \frac{9}{ab} + 9ab \geq 2\sqrt{\frac{9}{ab} \cdot 9ab} = 18.$$

Se poate ajunge la acelaşi rezultat şi pe altă cale, tot cu inegalitatea mediilor:

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab \geq \frac{2ab}{2a^5b^5} + \frac{81a^2b^2}{4} + 9ab = \frac{1}{a^4b^4} + \frac{81a^2b^2}{4} + \frac{9ab}{2} + \frac{9ab}{2} \geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{a^4b^4}\cdot\frac{81a^2b^2}{4}\cdot\frac{9ab}{2}\cdot\frac{9ab}{2}}=4\cdot\frac{9}{2}=18.$$

Inegalitatea este strictă, deoarece pentru egalitate ar trebui să avem:

$$a=b,\frac{1}{a^4b^4}=\frac{81a^2b^2}{4},\frac{9}{ab}=9ab,$$

ceea ce nu se poate.

Cum inegalitatea este strictă, este normal să ne întrebăm dacă nu putem găsi un număr real $k>18$ pentru care să fie adevărată inegalitatea

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab\geq k.$$

O primă încercare poate fi o altă grupare atunci când aplicăm inegalitatea mediilor.

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab\geq\frac{1}{a^4b^4}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab=$$

$$=\left(\frac{3}{4a^4b^4}+\frac{81a^2b^2}{8}+\frac{81a^2b^2}{8}\right)+\left(\frac{1}{4a^4b^4}+\frac{9ab}{4}+\frac{9ab}{4}+\frac{9ab}{4}+\frac{9ab}{4}\right)\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{3^9}{2^8}}+5\cdot\sqrt[5]{\frac{3^8}{2^{10}}}=\frac{81}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\frac{15}{4}\sqrt[5]{27}\approx 20{,}0061.$$

Din păcate, nici în acest caz nu putem obţine egalitate. De aceea, notăm $x=ab$ şi vom determina minimul funcţiei

$$f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\frac{1}{x^4}+\frac{81x^2}{4}+9x.$$

Avem

$$f'(x)=-\frac{4}{x^5}+\frac{81x}{2}+9,\ f''(x)=\frac{20}{x^6}+\frac{81}{2}.$$

Deoarece $f''(x)>0$, funcţia $f'(x)$ este strict crescătoare, deci ecuaţia $f'(x)=0$ are cel mult o rădăcină pozitivă. Cum $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4},\ f'(1)=\frac{91}{2}$,

Deducem că ecuaţia $f'(x)=0$ admite o rădăcină pozitivă x_0, şi atunci funcţia $f(x)$ admite minimul $f(x_0)$. Obţinem $0{,}6472<x_0<0{,}6473$ şi rezultă că pentru $a,b>0$ este adevărată inegalitatea

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab\geq f(x_0)\approx 20{,}0065,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=\sqrt{x_0}\approx 0{,}8045$.

Ştiaţi că .....

celebrul tablou „ Mona Lisa ” sau ”Gioconda” al lui Leonardo da Vinci ar fi fost furat de la muzeul Luvru din Paris pe 22 august 1911 pentru ca apoi hoţii să-l copieze și să vândă copiile drept originale.

Astăzi există în lume foarte multe copii extrem de reușite ale acestui tablou inclusiv câteva ale ucenicilor lui Leonardo. Au existat dispute de-a lungul timpului că Leonardo ar mai fi pictat în 1515 încă un tablou cu Mona Lisa aflat într-o colecție din New Jersey , primul datând din 1505 și o întruchipează pe Mona Lisa, soția lui Francesco del Giocondo la vârsta de 20 ani.

Reprezentanții muzeului neagă afirmațiile scriitorului Seymour Reit inclusiv că tabloul ar fi neterminat sau că ar fi fost tăiat ca să se încadreze în rama ce i-a fost pregătită însă în 1956 partea de jos a fost avariată din cauza unei soluții acide care s-a aruncat asupra lui. Este tabloul care deține recordul pentru cea mai mare asigurare și anume, a fost asigurat pentru transportul la expoziția din 1962 din America cu o sumă de 100 milioane de dolari la data respectivă. (astăzi, 735 milioane dolari).

Astăzi tabloul este expus la Luvru, cel mai vizitat muzeu din lume cu peste 10,2 mil de vizitatori în 2018.

Again about the problem 12068 from AMM/2018

by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Mihály Bencze and Daniel Sitaru

In the American Mathematical Monthly (AMM), Vol. 125, No. 8, October 2018, p.756 was published the Problem 12068, proposed by *D.M. Bătineţu-Giurgiu*, ''Matei Basarab'' National College, Bucharest, Romania and *Neculai Stanciu*, ''George Emil Palade'' School, Buzău, Romania.

Problem 12068. If ABC is a triangle with usual notations prove that

(a) $$\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2+\frac{h_c+h_a}{h_b}r_b^2+\frac{h_a+h_b}{h_c}r_c^2\ge 2s^2;$$

(b) $$\frac{r_b+r_c}{r_a}h_a^2+\frac{r_c+r_a}{r_b}h_b^2+\frac{r_a+r_b}{r_c}h_c^2\ge\frac{4s^2r}{R}.$$

In SM 23 we presented a solution of this problem and four similar problems.
Here we present other problems related to Problem 12068.

Problem 1. If ABC is a triangle with $AB=c, BC=a, CA=b$ and R is its circumradius prove that $\frac{b+c}{a^5}+\frac{c+a}{b^5}+\frac{a+b}{c^5}\ge\frac{2}{3R^4}$.

Solution: We have $\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}=\sum_{cyclic}\left(\frac{b+c}{a^5}+\frac{1}{a^4}\right)=(a+b+c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{a^5}=$

$$=(a+b+c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{\frac{1}{a^4}}{a}\overset{Bergstrom}{\ge}(a+b+c)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2}{a+b+c}=\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2=$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2b^2}\overset{Bergstrom}{\ge}\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}\right)^2,\ (1).$$

We have $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{4RF}=\frac{s}{2Rsr}=\frac{1}{2Rr}\overset{Euler}{\ge}\frac{1}{R^2}$, (2).

By (1) and (2) we deduce $\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}\ge\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{R^2}\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}\ge\frac{2}{3R^4}$, q.e.d.

Problem 2. If ABC is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{h_a+h_b}{h_ca^4}+\frac{h_b+h_c}{h_ab^4}+\frac{h_c+h_a}{h_bc^4}\ge\frac{2}{3R^4}.$$

Solution: We have

$$\sum_{cyclic}\frac{h_a+h_b}{h_ca^4}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}=\sum_{cyclic}\left(\frac{h_a+h_b}{h_c}+1\right)\frac{1}{a^4}\overset{Bergstrom}{\ge}(h_a+h_b+h_c)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2}{h_a+h_b+h_c}=$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+2\cdot\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{ab}\right)^2\overset{Bergstrom}{\ge}\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}\right)^2,\ (1).$$

We have $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{4RF}=\frac{s}{2Rsr}=\frac{1}{2Rr}\overset{Euler}{\ge}\frac{1}{R^2}$, (2).

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{h_a+h_b}{h_c a^4}\ge\frac{2}{3R^4}$, q.e.d.

Problem 3. If ABC is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{m_a+m_b}{m_c a^4}+\frac{m_b+m_c}{m_a b^4}+\frac{m_c+m_a}{m_b c^4}\ge\frac{2}{3R^4}.$$

Solution: We have

$$\sum_{cyclic}\frac{m_a+m_b}{m_c a^4}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}=\sum_{cyclic}\left(\frac{m_a+m_b}{m_c}+1\right)\frac{1}{a^4}\overset{Bergstrom}{\ge}(m_a+m_b+m_c)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2}{m_a+m_b+m_c}=$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+2\cdot\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{ab}\right)^2\overset{Bergstrom}{\ge}\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}\right)^2,\ (1).$$

We have

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{4RF}=\frac{s}{2Rsr}=\frac{1}{2Rr}\overset{Euler}{\ge}\frac{1}{R^2},\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{m_a+m_b}{m_c a^4}\ge\frac{2}{3R^4}$, q.e.d.

Problem 4. If ABC is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{w_a+w_b}{w_c a^4}+\frac{w_b+w_c}{w_a b^4}+\frac{w_c+w_a}{w_b c^4}\ge\frac{2}{3R^4}.$$

Solution: We have

$$\sum_{cyclic}\frac{w_a+w_b}{w_c a^4}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}=\sum_{cyclic}\left(\frac{w_a+w_b}{w_c}+1\right)\frac{1}{a^4}\overset{Bergstrom}{\ge}(w_a+w_b+w_c)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2}{w_a+w_b+w_c}=$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+2\cdot\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{ab}\right)^2\overset{Bergstrom}{\ge}\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}\right)^2,\ (1).$$

We have

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{4RF}=\frac{s}{2Rsr}=\frac{1}{2Rr}\overset{Euler}{\ge}\frac{1}{R^2},\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{w_a+w_b}{w_c a^4}\ge\frac{2}{3R^4}$, q.e.d.

Problem 5. If $x,y,z>0$, then prove that in any triangle ABC with area F and side lengths a,b,c holds the inequality

$$\frac{x^2+y^2+z^2+2yz}{x(y+z)}a^2+\frac{y^2+z^2+x^2+2zx}{y(z+x)}b^2+\frac{z^2+x^2+y^2+2xy}{z(x+y)}c^2\ge10\sqrt{3}F.$$

Solution. By *Tsintsifas'* s inequality (AMM-1988) we have

$$\frac{x}{y+z}a^2+\frac{y}{z+x}b^2+\frac{z}{x+y}c^2\ge2\sqrt{3}F,\ (1).$$

We shall prove that

$$\frac{y+z}{x}a^2+\frac{z+x}{y}b^2+\frac{x+y}{z}c^2\ge8\sqrt{3}F,\ (2).$$

Indeed,

$$\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2+\sum_{cyclic}a^2=(x+y+z)\cdot\sum_{cyclic}\frac{a^2}{x}\overset{H.Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}=$$

$=(a+b+c)^2=2(ab+bc+ca)+\sum_{cyclic}a^2\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2\geq 2\sum_{cyclic}ab$, so by AM-GM inequality we deduce that $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, (3).

By *Carliz's* inequality (AMM-1961) we have that $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 4\sqrt{3}F$, so from (3) we infer (2).
Adding up the inequalities (1) and (2) we obtain the desired inequality.
The equality occurs iff $x=y=z$ and $a=b=c$.

Problem 6. If $x,y,z>0$, then prove that in any triangle ABC with area S and side lengths a,b,c holds the inequality $\frac{y+z}{x}a^2+\frac{z+x}{y}b^2+\frac{x+y}{z}c^2\geq 8\sqrt{3}S$.

Solution. $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2+\sum_{cyclic}a^2=(x+y+z)\cdot\sum_{cyclic}\frac{a^2}{x}\overset{H.Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}=$

$=(a+b+c)^2=2(ab+bc+ca)+\sum_{cyclic}a^2\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2\geq 2\sum_{cyclic}ab$, (1).

By AM-GM inequality and (1) we deduce $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}a^2\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, (2).

By the inequality of *Carliz* (1961) we have $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 4\sqrt{3}S$, so by (2) we obtain the desired inequality.
Note. Other variant is directly from (1) where we use the inequality of *Pólya-Szegö*, i.e. $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$.
The equality occurs iff $x=y=z$ and $a=b=c$.

Remark. For $x=y=z=1$ by the inequality from the statement we obtain the inequality $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$, i.e. *Ionescu-Weitzenböck*' s inequality.

Problem 7. If ABC is a triangle with usual notations and $x,y,z>0$, then prove that

(a) $$\frac{y+z}{x}r_a^2+\frac{z+x}{y}r_b^2+\frac{x+y}{z}r_c^2\geq 2s^2;$$

(b) $$\frac{y+z}{x}h_a^2+\frac{z+x}{y}h_b^2+\frac{x+y}{z}h_c^2\geq\frac{4s^2r}{R}.$$

Solution for (a):We have $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}r_a^2+\sum_{cyclic}r_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{y+z}{x}+1\right)r_a^2=$

$=(x+y+z)\cdot\sum_{cyclic}\frac{r_a^2}{x}\overset{Bergstrom}{\geq}(x+y+y)\cdot\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{x+y+z}=$

$=(r_a+r_b+r_c)^2=\sum_{cyclic}r_a^2+2\sum_{cyclic}r_ar_b\geq 2\sum_{cyclic}r_ar_b$, $\sum_{cyclic}\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2\geq 2\sum_{cyclic}r_ar_b$ (1).

We have $r_a=\frac{F}{s-a}$ and other two similar. Therefore

$$\sum_{cyclic}r_ar_b=\sum_{cyclic}\frac{F^2}{(s-a)(s-b)}=F^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{(s-a(s-b)}=F^2\cdot\frac{s-c+s-a+s-b}{(s-a)(s-b)(s-c)}=$$

$=F^2\cdot\frac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\overset{Heron}{=}\frac{F^2s^2}{F^2}=s^2$, (2). By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}r_a^2\geq 2s^2$, q.e.d.

Solution for (b): We have $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}h_a^2+\sum_{cyclic}h_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{y+z}{x}+1\right)h_a^2=$

$$=(x+y+z)\cdot\sum_{cyclic}\frac{h_a^2}{x}\overset{Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\cdot\frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{x+y+z}=$$

$=(h_a+h_b+h_c)^2=\sum_{cyclic}h_a^2+2\sum_{cyclic}h_ah_b\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b$, $\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}h_a^2\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b$ (1). We have

$$\sum_{cyclic}h_ah_b=\sum_{cyclic}\frac{ah_a\cdot bh_b}{ab}=4S^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}=4S^2\cdot\frac{a+b+c}{abc}=4S^2\cdot\frac{2s}{4SR}=\frac{2Ss}{R}=\frac{2rs^2}{R},\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain

$$\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}h_a^2\geq 2\cdot\frac{2rs^2}{R}=\frac{4s^2r}{R},\ \text{q.e.d.}$$

Minimal and maximal bounds for the sum $a^6+b^6+c^6$

by Marius Drăgan, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău

In any triangle ABC with the sides a,b,c, circumradius R, inradius r and $d=\sqrt{R^2-2Rr}$ holds the following the inequality

$$2^4(R+r-d)^3[4(R-r+d)^3+R^3]\leq a^6+b^6+c^6\leq 2^4(R+r+d)^3[4(R-r-d)^3+R^3].$$

Proof. We use the following

Lemma (*fundamental inequality or Blundon's inequality*). For any triangle ABC the inequality $s_1\leq s\leq s_2$ hold where s_1,s_2 represents the semiperimeter of two isosceles triangles $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$ which have the same circumradius R and inradius r as the triangle ABC with the sides

$$a_1=2\sqrt{(R+r-d)(R-r+d)},\ b_1=c_1=\sqrt{2R(R+r-d)}$$

$$a_2=2\sqrt{(R+r+d)(R-r-d)},\ b_2=c_2=2\sqrt{2R(R+r+d)}\ \text{ where } d=\sqrt{R^2-2Rr}.$$

A proof of this lemma is given in [1].

From the identity $\sum_{cyc}x^3=3xyz+\sum_{cyc}x\left(\sum_{cyc}x^2-\sum_{cyc}yz\right)$ if we replacing

$x=a^2,y=b^2,z=c^2$, then we obtain $\sum_{cyc}a^6=3a^2b^2c^2+\sum_{cyc}a^2\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}b^2c^2\right)$.

We consider the functions

$f,g,h,F:[s_1,s_2]\to R$, $f(s)=3a^2b^2c^2=3(4Rrs)^2$, $g(s)=2(s^2-r^2-4Rr)$,

$$h(s)=\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}(bc)^2=\left(\sum_{cyc}a\right)^4-4\sum_{cyc}ab\left(\sum_{cyc}a\right)^2+6abc\sum_{cyc}a+\left(\sum_{cyc}ab\right)^2=$$

$=s^4-2r(4R+7r)s^2+(4R+r)^2r^2$, with $h'(s)=4s(s^2-4Rr-7r^2)$,

$F(s)=f(s)+g(s)h(s)$.

Since $s^2\geq s_1^2\geq 16Rr-5r^2\geq 4Rr+7r^2$ it results that h is increasing on $[s_1,s_2]$.

Also f and g are increasing on $[s_1,s_2]$. Hence, F is increasing on $[s_1,s_2]$, then

$F(s_1)\leq F(s)\leq F(s_2)$ or $a_1^6+b_1^6+c_1^6\leq a^6+b^6+c^6\leq a_2^6+b_2^6+c_2^6$, (1).

If we replacing the valuses of a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 from the lemma in (1), then we obtain the desired inequality and we are done.

References

[1] M. Drăgan, N. Stanciu, *A new proof of the Blundon inequality*, Rec.Mat, 2(2017), 100-104.

„ Reușita îl așteaptă pe cel ce se scoală de dimineață”.
proverb rusesc

3. Examene și concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICĂ

SCLIPIREA MINTII

Pe data de 07.12. 2019, la Liceul Tehnologic „ Meserii și Servicii ” Buzău a avut loc a 12-a ediție a Concursului Județean de Matematică „ **Sclipirea Minții**” din cadrul proiectului educațional județean cu același nume la care au participat peste 300 de elevi de gimnaziu și liceu.

Vă prezentăm în continuare câteva din exercițiile propuse:

Clasa a V-a:

I. 1. Fie sirul 4, 11, 18, 25, 32, ...

a) Scrieți următorii 3 termeni. b) Aflați termenul al 2019-lea. c) Aflați suma primilor 2019 termeni.

Mariana Zotolea

2. Fie $S = 1+3+5+...+(2n-1)$. Determinaţi cea mai mică valoare a numărului natural x pentru care $x+S=2019$.

Problema E:15588, G.M-B, nr. 9/2019, Nicolae Ivăşchescu, Canada

II. Să se afle trei numere naturale, ştiind că diferenţa dintre primul şi al treilea este 76, împărţindu-l pe al doilea la al treilea obţinem câtul 3 şi restul 5, iar împărţindu-l pe primul la diferenţa dintre al doilea şi al treilea obţinem câtul 2 şi restul 6.

Problema E:15582, G.M-B, nr. 9/2019, Daniel Stretcu, Drobeta Turnu-Severin

III. 1. Arătați că numărul $a = 169^n$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte , oricare ar fi n natural.

Gheorghe Struțu

2. Determinaţi numerele naturale a, b, c care verifică egalitatea

$$a^2+b^2+c^2+3a+5b+7c=2019.$$

Problema E:15583, G.M-B, nr. 9/2019, Daniel Stretcu, Drobeta Turnu-Severin

Clasa a VI-a

1. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Doi copii au șters pe rând fiecare câte 4 numere și au observat că suma numerelor șterse de primul este de trei ori mai mare decât suma numerelor șterse de al doilea. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Laura Brutaru

2. Fie *a, b, c, d* patru numere naturale care verifică relația $20a - 505b - 404c = 2020d$. Arătați că produsul numerelor este divizibil cu 2020.

Laura Brutaru

II. 1.Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât prin înmulţirea numărului $\overline{ababab}$ cu n să se obţină un pătrat perfect. Care sunt cifrele a şi b în acest caz ?

Problema E:15584, G.M-B, nr. 9/2019, Ion Fota, Izbiceni, Olt

2. Să se determine cifrele a,b,c,d pentru care numărul $\overline{abcabc}+\overline{d00d}$ este pătratul unui număr natural.

Problema E:15585, G.M-B, nr. 9/2019, Dan Nedeianu, Drobeta Turnu-Severin

III. 1. Determinaţi numerele prime $a<b<c<d<e$ ştiind că

$$37a+23b+21c+75d+15e=2018.$$

Problema E:15587, G.M-B, nr. 9/2019, Eugeniu Blăjuţ, Bacău

2. Suma măsurilor a 10 unghiuri este 1000^0. Să se calculeze suma măsurilor suplementelor acestor unghiuri.

Florentina Popescu

Clasa a VII-a

I. 1. Fie $A=\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+.....+\sqrt{1+3+5+....+(2n-1)}$ unde n este număr natural nenul. Pentru n = 5 calculați *A*.

Arătați că numărul $\sqrt{8a+1}$ este rațional pentru orice număr natural nenul *n*.

Laura Brutaru

II. 1. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ pentru care este adevărată relaţia

$$\sqrt{\sqrt{a}+2\cdot\sqrt{b}+3\cdot\sqrt{\overline{cb}}+4\cdot\sqrt{c}}=d$$

Problema E:15592, G.M-B, nr. 9/2019, Nicolae Ivăşchescu, Canada

2. Arătaţi că numărul $\sqrt{n^8+2\cdot 7^m+4}$ este număr iraţional, pentru orice n şi m numere naturale.

Problema E:15594, G.M-B, nr. 9/2019, Sebastian Ilinca, Pîrşcoveni, Olt

III. 1. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A=35^0$, $\sphericalangle B=83^0$ şi punctele D,E şi F pe laturile BC,CA şi respectiv AB astfel încât $DE\|AB$, $FE\|BC$ şi $FD\|AC$. Dacă bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle EDF$ şi $\sphericalangle ABC$ se intersectează în punctul P, atunci determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle BPD$.

Neculai Stanciu

2. Fie dreptunghiul $ABCD$ în care $AB=L$ și $CD=l$. Aflați perimetrul și aria dreptunghiului, dacă are loc relația: $\sqrt{L^2-12L+52}+\sqrt{l^2-8l+25}\le 7$.

Luminița Ghiță

Clasa a VIII-a

I. 1. Fie $a=\sqrt{4-\sqrt{15}}$ și $b=\sqrt{4+\sqrt{15}}$.

a) Arătați că $(a-b)^2=6$. b) Calculați $(a-b+\sqrt{6})^{2019}$. Laura Brutaru

2. Determinaţi forma numerelor naturale n pentru care n^3-7n+6 se divide cu 30.

Problema E:15596, G.M-B, nr. 9/2019, Ion Fota, Izbiceni, Olt

II. 1. Fie numerele reale nenule a şi b astfel încât $a^2+b^2=4ab$.

Găsiţi toate valorile posibile pentru $\dfrac{a^2+b^2}{|a^2-b^2|}$.

Problema E:15612 din G.M-B, nr. 10/2019, Viorel Ovidiu Ignătescu şi Neculai Stanciu, Buzău

2. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, cu $x\cdot y\cdot z=6$. Determinați $x^2+y^2+z^2$ dacă $x+y+z=5$ și $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$.

Florentina Popescu

III. 1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată. Se notează cu *O* intersecția dreptelor *AC* și *BD*, iar cu *E* mijlocul muchiei $[AA']$. Să se demonstreze că EO este perpendiculară pe OC' dacă și numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Luminița Ghiță

Clasa a IX-a Tehnologic

I. 1. Dacă $\frac{4}{37}=a_0,a_1a_2.....a_{2019}....$ atunci să se determine a_{2019}, $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot.....\cdot a_{2019}$ și $a_1+a_2+a_3+.....+a_{2019}$.

2. Fie $A=\sqrt{n+\sqrt{6n-9}}-\frac{3}{\sqrt{6}}$. Să se determine numerele naturale n astfel încât $\sqrt{6}\cdot A\in\mathbb{N}$.

Adrian Stan

II. 1. Dacă $x+\frac{1}{x}=2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$, să se calculeze suma $x+x^2+x^3+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$.

Adrian Stan

2. Să se determine numerele prime x,y,z astfel încât $xy+yz+xz+149=6xyz$.

Adrian Stan

III. 1.a) Să se arate că $\sqrt{x^2+y^2}\geq\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ cu $a+b+c=1$, să se demonstreze că suma $S=\sqrt{(a+b+c)^2+(a-b+c)^2}+\sqrt{(a+b-c)^2+(-a+b+c)^2}\rangle\sqrt{2}$.

Adrian Stan

Clasa a X-a Tehnologic

I. Să se demonstreze că pentru orice număr real a există relația $\log_3\left(a^2+2a+6\right)\geq 2\cdot\log_3 2$.

Adrian Stan

II. Se consideră numerele: $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-(\sqrt{3}-2)^{-1}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{-8}$,

$c=\log_3\frac{\sqrt[3]{9}}{3\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)^2$. Să se compare numerele.

III. Determinați $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ știind că $x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\geq 2\sqrt{3y}-y-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Livia Stan

Clasa a XI-a Tehnologic

I. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} e^{\ln x} & \ln x \\ \sqrt{x} & \frac{1}{x}\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Să se calculeze suma $A(1)+A(2)+A(2^2)+....+A(2^{10})$;b) Să se calculeze $\det\left[A(1)^{2020}\cdot A(2)^{2020}\right]$.

Livia Stan

II. Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix} \log_2 a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1\end{pmatrix}, a\rangle 0$. Să se calculeze determinantul matricei

H(2) + H(2^2) + H(2^3) + ...+H(2^{2019}).

***

III. 1.Să se calculeze limitele: 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-(\sin x+\cos x)^2}{\ln(1+\sin x)+2x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log_2(2+2^x+4^x)}{\log_3(3+3^x+9^x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x+\sin^2 x)^2-1}{\sin^2 x+4\sin x}$.

Adrian Stan

Clasa a X-a Științe și M1

1. Dacă $a=\log_{2019}3$ și $b=\log_{2019}5$ arătați că $\log_{\sqrt[3]{2019}}675=3(3a+2b)$.

Darstaru Gheorghe

2. Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$

a) Să se arate că $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\geq \mathrm{Re}\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)$

b) Dacă $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=\mathrm{Re}\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)$ atunci $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}$. Luminița Petrișan

Clasa a XI-a Științe și M1

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\det(A+A^2+A^3+...+A^n)=0$;

Adrian Stan

2. Calculati: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[(1+\sin x)\cdot(1+\sin 2x)\cdot....\cdot(1+\sin nx)\right]}{arctg2x}$. Laura Tănase

3. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^n)\ -\ln^n(1+x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$. Adrian Stan

4. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n=\dfrac{n^n}{\left((n+1)!\right)^2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ b) Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$

Luminița Petrișan

Clasa a XII-a Științe și M1.

1.Pe mulțimea R, se definește legea de compozitie $x*y=xy-3x-3y+a,\quad a\in\mathbb{R}$.
Determinați simetricul lui x=5.

Tanase Laura

2. a) Se dă funcția $f:I\to\mathbb{R}$, derivabilă, cu derivate continue. Arătați că

$$\int\frac{f(x)+f^I(x)}{f(x)+e^{-x}}dx=\ln\left|e^x f(x)+1\right|+C.$$

b)Calculați $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{e^{-x}+\sin x}dx.$ Tanase Laura

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa. Calculati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

Aratati ca funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem.

Tanase Laura

4. Calculați: $\displaystyle\int_1^e\frac{e^x\left(1+\ln x-x\ln x\right)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx$. Marin Chirciu

5. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}\mathrm{dx}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{2n+1}$; b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c) Demonstrați că $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n-I_{n+2}=\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$. Luminița Petrișan

Clasa a XII-a Tehnologic

I. Se consideră mulțimea $M=\left\{X(a)\,\middle|\,X(a)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\right\}\subset M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că X(a) se poate scrie de forma $X(a)=I_2+aA$, unde $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

b) Să se demonstreze că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor, adică $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab),\ a,b\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot.....\cdot X(2019)=X(2020!-1)$.

II. Se consideră funcția $f:[0;\pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\cos x}{e^x+\sin x}, & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}$.

a) Să se arate că f admite primitive pe $[0;\pi]$. b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$. Adrian Stan

III. Să se calculeze: 1) $\int e^x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\ln\cos x\right)dx,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. 2). $\int\dfrac{18}{(x^2+9)\cdot(x^2-9)}dx,\ x\in(3;\infty)$.

Adrian Stan

Clasa a IX-a Științe și M1

1. Se consideră $x\in[2019;2020]$ astfel încât $\sqrt{2020-x}-\sqrt{x+2019}=1$.
Calculați $\sqrt{2020-x}\cdot\sqrt{x+2019}$.

Darstaru Gheorghe

2. Fie x, y numere reale astfel încât $x^2+y^2=4034$. Arătați că $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\le 2019$.

Darstaru Gheorghe

3. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația
$f(x-y)+f(2x-y)+f(2y-x)=2(x-3y+3)$. Livia Stan, Buzău

4. Să se arate că $2\sqrt{2^2}+3\sqrt{3^3}+....+2019\sqrt{2019^{2019}}\ \langle\ 2020!$, unde $n!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot n$

Adrian Stan, Buzău

5.Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $n!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot n$ și $S_n=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}$

a) Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge4\quad S_n<\dfrac{2n-1}{n}$ b) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ să se calculeze $[S_n]$.

Luminița Petrișan

6. Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid 2xy-x+7y=3\}$ și $B=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid 3xy-2x+10y=6\}$.
Demonstrați că $A=B$ Luminița Petrișan

Elevii care au obținut diplome au fost următorii:

Clasa a V-a: Locul I. Banu Denisa- Scoala „M. T. Bădulescu”, Casuta Flavia- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II**: Oancea Vlad Alexandru și Miron Rareș Florin- Scoala Gimnazială „ G. E. Palade”, Jipa Carina Andreea- Scoala Gimnazială Nr. 7, Barbu Alexandra și Bălan Eliza- Scoala Gimnazială nr. 11, **Locul III**: Tigau Daniel, Brutaru Alexandru și Stefan Raluca- Scoala Gimnazială nr. 11, Nica Bianca Andreea- Scoala Gimnazială nr. 7, Stroe Denisa, Stancu Ana Maria și Tarate Andrei- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, **Mențiune:** Sava Rares Fabian- Liceul cu Program Sportiv „ I. B. Soter”, Stanciu Sebastian, Banciu Alexandru, Vlad Ana Maria și Dincă Alexandra- Scoala Gimnazială nr. 11, Pandele Alessia- Scoala Gimnazială „M. T. Bădulescu”,Murgociu Mihai Cristian- Scoala Gimnazială nr. 7.

Clasa a VI-a : Locul I: Edu Andrei- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, **Locul II**: Petroiu David și Ion Antonio- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, Cîrstian Alexandra și Anghel Mario- Colegiul Național Pedagogic „ Spiru Haret”,**Premiul III**: Ciurea Andrei- Colegiul Național Pedagogic „ Spiru Haret”, **Mențiune**: Radu Cristian- Scoala Gimnazială Maxenu, Frățilă Rareș- Scoala Gimnazială „M. T. Bădulescu”, Epure Andreea și Apostu Miruna- Scoala Gimnazială nr. 11.

Clasa a VII-a: Locul I: Gresoiu Andrei și Mănăilă Luca- - Scoala Gimnazială nr. 11, Mihăilescu Ana- Colegiul Național „ B.P. Hașdeu”, **Premiul II**: Grigore Rareș- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, **Premiul III**: Ciubotaru Radu George- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, Sârbu Costin- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, **Mențiune**: Dumitru Andra- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, Teodor Alexandru- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”.

Clasa a VIII-a:

Locul I: Bălăceanu Teodor și Musceleanu Bianca- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, **Locul II**: Stanca Alexandra- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, Toma Sebastian- Scoala Gimnazială „M. T. Bădulescu”, **Locul III**: Tudor Andreea Irina- Liceul Tehnologic „ Sf. Mc. Sava ” Berca, Saiu Alexandra și Tanase Stefan Daniel- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”, Stefanescu Diana- Scoala Gimnazială „M. T. Bădulescu”, **Mențiune:** Păunescu Andrei- Scoala Gimnazială „M. T. Bădulescu”, Drăghici Daria- Scoala Gimnazială nr. 7, Eni Bianca- Scoala Gimnazială „ G.E. Palade”.

Clasa a IX-a Tehnologic:

Locul I: Tita Madalina- Colegiul Economic **Locul II**: Tita Bianca- Colegiul Economic **Locul III**: Adam Livia- Colegiul Economic, Cojocaru Mihaela- Colegiul Economic, **Mențiune**: Găvăneanu Adriana- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”.

Clasa a X-a Tehnologic :

Locul I: Stirbu Cătălin- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, **Locul II**: Macsim Mihaela- Colegiul Economic Buzău, **Locul III:** Tepeluș Marian- Liceul Tehnologic D. Filipescu.

Clasa a XI-a Tehnologic:

Locul I: Toader Garofița- Colegiul Economic Buzău, **II.** Pană Georgiana- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii” **Locul III**: Trifan Mircea- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, **Mențiune**- Beceru Mihaela- Colegiul Economic Buzău, Catinca Teodora și Cucu Iuliana- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”.

Clasa a XII-a Tehnologic:

Locul I: Mihai Andreea- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii” **Locul II:** Vizitiu Ana Maria- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii” **Locul III**: Roșioru Ionuț- Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”.

Clasa a IX-a Științe :

Locul I: Necula Diana- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, **Locul II**: Raducan Mara- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, Dragan Elena- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, **Mențiune:** Vidrașcu Alexandra Mihaela- Liceul Teoretic „ A. Marghiloman”

Clasa a X-a Științe:

Locul I: Dobrin Costin- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, **Locul II**: Mușat Cosmin- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”, **Locul III**: Iancu Andrei- Colegiul Național „B. P. Hașdeu”.

Clasa a XI-a Științe:
Locul I: Neagu Simona- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II**: Necula Nicoleta- Colegiul National „ M. Eminescu”, **Locul III**: Perțea Melania- Colegiul National „ .M. Eminescu”.

Clasa a XI-a Științe:
Locul I: Neagu Simona- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II**: Necula Nicoleta- Colegiul National „ M. Eminescu”, **Locul III**: Perțea Melania- Colegiul National „ .M. Eminescu”.

Clasa a XII-a
Locul I: Matei Mihai- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II:** Stana Alexandru- Colegiul National „ M. Eminescu”, **Locul III:** Prahoveanu Alina- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Mențiune**: Dinu Stefania- Colegiul National „ .M. Eminescu”, Blăgoi Daniela- Colegiul National „ .M. Eminescu”.

Clasa a IX-a M1:
Locul I: Drugea Alina Nicoleta- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II:** Grosaru Maria- Colegiul National „ .M. Eminescu”, Cazan Florin Ciprian- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul III:** Cristea Victor Andrei- Colegiul National „ .M. Eminescu”.

Clasa a XI-a:
Locul I: Năftănăilă Bianca- Colegiul National „ .M. Eminescu”, Bărbulescu Iustin- Colegiul National „ M. Eminescu”, **Locul II**: David Mihai- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul III:** Grigore Irina- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Mențiune:** Naftanailă Luiza- Colegiul National „ .M. Eminescu”,
Stroe Florin- Colegiul National „ .M. Eminescu”.

Clasa a XII-a:
Locul I: Alexandru Daniela- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul II:** Nica Nicoleta- Colegiul National „ M. Eminescu”, **Ene Alexandru-** Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Locul III:** Mondea Sorin Gabriel- Alexandru- Colegiul National „ .M. Eminescu”, **Mențiune:** Pescaru AnaMaria Andra- Colegiul National „ M. Eminescu”.

Știați că ....

Celebrul om de știință **Johannes Kepler** (1571- 1630) autorul lucrării „ Astronomia nova” (1609), și a traiectoriei eliptice a planetelor cu Soarele în centru, printre multele sale preocupări privind matematica, mecanica, fizica, astronomia s-a preocupat și de măsurarea butoaielor cu vin, mai precis de determinarea volumului lor.

Kepler este autorul celor trei legi ale mișcării planetelor, (în 1596, 1609, 1619) , a tabelelor astronomice ce descriu mișcările planetelor și precursorul calculului integral de care avea să se preocupa ulterior Newton. .

El calcula volumele corpurilor urmând o metodă a vechilor matematicieni antici, astfel că împărțind suprafețele corpurilor în porțiuni elementare și apoi le aduna reușind astfel să găsească mărimile pentru 87 de corpuri noi această metodă stând la baza calculului integral

În anul 1612, se remarcă prin preocuparea sa privind măsuratul butoaielor cu vin întrucât anul a fost unul bogat în recolta de struguri și de asemenea căuta să găsească care est eforma butoaielor care să aibă cea mai mare capacitate la cel mai mic consum de material, fapt ce l-a condus la problemele de maxim și minim pe care le- arezolvat.

În finalul cercetării sale, în 1615 scoate cartea „ Noua metodă de măsurare a butoaielor cu vin ” iar un an mai târziu îi apare celebra carte „ Extras din străvechea artă de a măsura a lui Arhimede”.

„Nu contează cât de încet mergi,
atâta vreme cât nu te oprești ”.
Confucius
(551- 479 î Hr)

4. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:867. **Arătaţi că dacă suma cifrelor numărului natural N este aceiaşi cu suma cifrelor lui $2012\cdot N$, atunci 9 divide pe N.**

Neculai Stanciu, Buzău

***Rezolvare*:** Notăm $S(N)$ suma cifrelor numărului N și lucrăm modulo 9 :

(1) $2012\cdot N\equiv S(2012\cdot N)\bmod 9$ şi (2) $N\equiv S(N)\bmod 9$.

Din ipoteză rezultă (3) : $S(2012\cdot N)=S(N)$.

Din (2) şi (3) rezultă (4): $N\equiv S(2012\cdot N)\bmod 9$.

Din (4) şi (1) rezultă (5) $2011\cdot N\equiv 0\bmod 9$.

Deoarece, $(9,2011)=1$ rezultă că 9 divide pe N. □

G:868. **Raportul mărimilor unui dreptunghi este $\dfrac{(1+2+...+2019):(2+4+...+4038)}{(2+4+.....+4038):(1+2+...+2019)}$, iar perimetrul are valoarea 5. Aflaţi aria dreptunghiului.** **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

Rezolvare:

1) $1+2+...+2019=2019\cdot 1010=a$, $2+4+...+4038=2019\cdot 2020=b$, a : b = $\frac{1}{2}$,

2) Numitorul. b : a = 2,

3) Raportul = $\frac{1}{2}$: 2 = $\frac{1}{4}$ = $\frac{l}{L}$,

4) P = 2(L+l) = 2· 5l = 5, l = $\frac{1}{2}$, L = 2, 5) A = 2·$\frac{1}{2}$ = 1.

G:869. **a) Fie numărul $x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7,\ n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle n ştiind că: suma cifrelor numărului x este 36348.**

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului 7^{2018} la $8\cdot 7^{2015}$.

Prof. Iuliana Trașcă, Olt

***Rezolvare*:**

a) $x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7\Rightarrow x=5^4\cdot 10^{2018n+2}-7$, atunci $x=625\underbrace{000...0}_{2018n+2}-7\Rightarrow x=624\underbrace{999...9}_{2018n+1}3$

Suma cifrelor numărului x: $6+2+4+3+9\cdot(2018n+1)=24+18162n.$

$24+18162n=36348\Rightarrow n=2$

b) $7^{2018}=343\cdot 7^{2015}=(336+7)\cdot 7^{2015}=(8\cdot 7^{2015})\cdot 42+7^{2016}$ Cum $7^{2016}<8\cdot 7^{2015}\Rightarrow$ câtul este 42, iar restul este 7^{2016}.

G:870. **Determinaţi $A\in\mathbb{N}$ care are produsul divizorilor săi naturali egali cu $7^{2039190}$.**

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Cum produsul divizorilor lui A este $7^{2039190}$, rezultă că A este de forma 7^m, $m \in \mathbb{N}^*$.
Divizorii lui A sunt: $1, 7, 7^2, 7^3, ..., 7^m$ și folosind produsul divizorilor, avem:

$$1 \cdot 7 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot ..... \cdot 7^m = 7^{1+2+3+...+m} = 7^{\frac{m(m+1)}{2}} = 7^{2039190} \Rightarrow m(m+1) = 4078380 = 2019 \cdot 2020 \Rightarrow m = 2019$$

$A = 7^{2019}$.

G:871. Se dă numărul $A = \overline{2019a_1a_2a_3.....a_n2019}$, unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt cifre în baza 10. Determinați cel mai mic număr A care are suma cifrelor 2019.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Suma cifrelor lui A este egal cu $S(A) = 2+0+1+9+a_1+a_2+.....+a_n+2+0+1+9 =$
$= 24 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 2019$. De aici rezultă că $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1995$.
Pentru ca A să fie cel mai mic trebuie să avem cât mai puține cifre $a_1, a_2, ..., a_n$, aceasta înseamnă că trebuie să existe cât mai multe cifre de 9.
Cum $1995 = 221 \cdot 9 + 6 \Rightarrow$ $A = \overline{20196\underbrace{999...99}_{221\ de\ 9}2019}$ este cel mai mic număr și are un număr de 230 cifre.

G:872. Stabiliţi paritatea numărului $A = (n+2011)(3n+5)(n+2018) + 7^n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Iuliana Trașcă, Olt

Rezolvare:

$(n+2018)-(n+2011) = 7 \Rightarrow$ numerele $n+2018$ şi $n+2011$ au parităţi diferite, deci unul este par
Deci: produsul $(n+2011)(3n+5)(n+2018)$ este par. Numărul 7^n este impar, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci A este impar.

G:873. Găsiți la ce numere trebuie împărțit numărul $3 \cdot 2^{2019}$, pentru a obține restul 2^{2018}.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Se aplică teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$: $a = b \cdot q + r,\ 0 \le r \langle b,\ r \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. **(*)**
Fie $a = 3 \cdot 2^{2019}$, $r = 2^{2018}$. Atunci, $b \cdot q = a - r = 2^{2018} \cdot 5$. Câtul q trebuie să fie un divizor al lui $2^{2018} \cdot 5$
Pentru $q = 1 \Rightarrow b = 2^{2018} \cdot 5 \rangle 2^{2018} = 4$. Pentru $q = 2 \Rightarrow b = 2^{2017} \cdot 5 \rangle 2 \cdot 2^{2017} = r$.
Pentru $q = 4 \Rightarrow b = 2^{2016} \cdot 5 \rangle 2^2 \cdot 2^{2016} = r$.
Pentru $q = 5 \Rightarrow b = 2^{2018} = r$, contradicție cu (*).
Analog, pentru cazurile $q = 2^n, n \ge 3$ și $q = 5 \cdot 2^k$, $1 \le k \le 2018$ se obțin contradicții.
Așadar, împărțitorul b poate fi doar în mulțimea $\{5 \cdot 2^{2016}; 5 \cdot 2^{2017}; 5 \cdot 2^{2018}\}$

G:874. Să se arate că $\overline{\underbrace{abcabc...abc}_{2019\ litere}} + \overline{\underbrace{bcabca...bca}_{2019\ litere}} + \overline{\underbrace{cabcab...cab}_{2019\ litere}} = \overline{\underbrace{aa...a}_{de\ 2019\ ori}} + \overline{\underbrace{bb...b}_{de\ 2019\ ori}} + \overline{\underbrace{cc...c}_{de\ 2019\ ori}}$

Constantin și Elena Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare:

$$\overline{\underbrace{abcabc...abc}_{2019 litere}} = a \cdot 10^{2018} + b \cdot 10^{2017} + c \cdot 10^{2016} + ... + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

$$\overline{\underbrace{bcabca...bca}_{2019 litere}} = b \cdot 10^{2018} + c \cdot 10^{2017} + a \cdot 10^{2016} + ... + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + a$$

$$\overline{\underbrace{cabcab...cab}_{2019 litere}} = c \cdot 10^{2018} + a \cdot 10^{2017} + b \cdot 10^{2016} + ... + c \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b$$. Evident,

$$\overline{\underbrace{abcabc...abc}_{2019 litere}} + \overline{\underbrace{bcabca...bca}_{2019 litere}} + \overline{\underbrace{cabcab...cab}_{2019 litere}} = a \cdot 10^{2018} + a \cdot 10^{2017} + a \cdot 10^{2016} + ... + a \cdot 10^2 + a \cdot 10 + a +$$

$+b\cdot 10^{2018}+b\cdot 10^{2017}+b\cdot 10^{2016}+...+b\cdot 10^{2}+b\cdot 10+b+c\cdot 10^{2018}+c\cdot 10^{2017}+c\cdot 10^{2016}+...+c\cdot 10^{2}+c\cdot 10+c=$
$=\underbrace{\overline{aa...a}}_{de\ 2019\ ori}+\underbrace{\overline{bb...b}}_{de\ 2019\ ori}+\underbrace{\overline{cc...c}}_{de\ 2019\ ori}$.

▪ Clasa a VI-a

G:875. Rezolvaţi, în $\mathbb{Z}$, ecuaţia $x^2+2xy=4-x-2y$. **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x+1)(x+2y)=4$ cu soluţiile: $(x;y)\in\{(0;2),(-2,-1),(-5;2)\}$.

G:876. Fie $p=2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot ....\cdot 9^9$. Arătați ca "p" se divide cu 210^5 și găsiți ultima cifră nenulă a lui p.

Petre Păunescu, Roșiorii de Vede, Teleorman

Rezolvare:

Se descompun bazele 4, 6, 8, 9, în factori primi și se aplică proprietățile puterilor:

$p=2^{40}\cdot 3^{27}\cdot 5^5\cdot 7^2=(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^5\cdot 2^{35}\cdot 3^{22}\cdot 7^2=210^5\cdot 2^{35}\cdot 3^{22}\cdot 7^2$.

$U(p)=U\left[U(21^5)\cdot U(6^{22})\cdot U(2^{13})\cdot U(7^2)\right]=U(1\cdot 6\cdot 2\cdot 9)=8$.

G:877. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^2+y^2=x^3+xy$. **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare: Se observă că x divide y, rezultă $y=kx,\ k\in\mathbb{Z}$.

Înlocuind în ecuaţie, obţinem: $x^2+k^2x^2=x^3+kx^2\Leftrightarrow x^2(1+k^2-x-k)=0\Rightarrow$

de unde rezultă soluţiile $(x;y)\in\{(0;0),(k^2-k+1,k(k^2-k+1)\}$.

G:878. Câte numere naturale sunt divizibile cu 2013 şi au exact 2013 divizori naturali ?

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare:

Fie n numărul natural care este divizibil cu 2013 şi are 2013 divizori naturali.

Fie $n=p_1^{\alpha_1}\cdot ...\cdot p_k^{\alpha_k}$, descompunerea lui n în factori primi, unde $p_1,...,p_k$ sunt numere prime distincte şi $\alpha_1,...,\alpha_k$ numere naturale.Astfel că numărul divizorilor lui n este dat de : $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)=2013=3\cdot 11\cdot 61$.

Deoarece n este divizibil cu 2013, rezultă că fiecare factor prim al lui 2013 este un factor al lui n. Deci, $k=3$ şi $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\{2,10,60\}$. Aşadar, trebuie să avem $\{p_1,p_2,p_3\}=\{3,11,61\}$.

Prin urmare avem şase posibilităţi pentru n:

$3^2\cdot 11^{10}\cdot 61^{60}, 3^2\cdot 11^{60}\cdot 61^{10}, 3^{10}\cdot 11^2\cdot 61^{60}, 3^{10}\cdot 11^{60}\cdot 61^2, 3^{60}\cdot 11^{10}\cdot 61^2, 3^{60}\cdot 11^2\cdot 61^{10}$.

G:879. Să se arate că numărul $A=12^n-2^{n+1}\cdot 3+3^{n+1}\cdot 2^n-18$ este divizibil cu 10 pentru orice n număr natural nenul.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$A=2^n(6^n-6)+3(6^n-6)-18=(6^n-6)(2^n+3)\vdots 10$, deoarece ultima cifră a numărului 6^n-6 este zero.

G:880. Arătați că numărul A nu este pătrat perfect, unde

$A=\left[2560+1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....+99\cdot 100-(2^2+3^2+4^2+....+100^2)\right]^{10}+2$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

***Rezolvare*:**

$$A=\left[2560+\left(1\cdot 2-2^2\right)+\left(2\cdot 3-3^2\right)+...+\left(99\cdot 100-100^2\right)\right]^{10}+2=$$

$$A=\left[2560+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)+...+100\cdot(-1)\right]^{10}+2=$$

$$A=\left[2560-\left(2+3+4+.....+100\right)\right]^{10}+2=\left(2560-\frac{102\cdot 50}{2}\right)^{10}+2=10^{10}+2$$, care nu poate fi pătrat perfect deoarece ultima sa cifră este 2.

G:881. Se consideră numărul $a=\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2019}\right)^n\cdot\frac{x}{2^n}$, **unde *n* și *x* sunt numere naturale.**
Să se determine cel mai mic număr natural *x* pentru care numărul *a* este natural nenul.
Determinați *n* pentru care numărul *a* găsit la punctul a) , are 121 divizori naturali.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Se știe că $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, atunci, numărul dat se scrie succesiv :

$$a=\left(1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{2019\cdot 2020}\right)^n\cdot\frac{x}{2^n}=x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)^n=$$

$$=x\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)^n=x\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)^n=x\cdot\frac{2019^n}{2020^n}.$$ Cum 2019 și 2020 sunt prime între ele, rezultă că fracția $\frac{2019^n}{2020^n}$ este ireductibilă iar numărul **a** este natural doar dacă x este un multiplu de 2020^n.

Cel mai mic număr natural **x** pentru care numărul ***a*** , este natural nenul este $x=2020^n\Rightarrow a=2019^n$. Descompunerea lui 2019 în factori primi este $2019=3\cdot 673\Rightarrow$numărul de divizori al lui $a=3^n\cdot 673^n$ este $(n+1)(n+1)=121\Rightarrow\ n+1=11\Rightarrow n=10.$

▪ Clasa a VII-a

G:882. Fie x , y , z ∈ [0 ; 1] . Arătați că $\frac{x^{2019}}{1+x+xyz}+\frac{y^{2019}}{1+y+xyz}+\frac{z^{2019}}{1+z+xyz}\le 1$.

În ce caz avem egalitate ?

Tuțescu Lucian, Roxana Vasile, Craiova

Rezolvare: $(1-y)(1-z)\ge 0\Rightarrow 1+yz\ge y+z$

$$1+x+xyz=1+x(1+yz)\ge 1+x(y+z)\ge x^2+xy+xz\qquad\Rightarrow\frac{x^{2019}}{1+x+xyz}\le\frac{x}{x+y+z}.$$

Analog pentru celelalte și prin adunare se obține inegalitatea.

Egalitate avem pentru x=y=z=1. Generalizare pentru x , y , z ∈ [0 ; a] , etc.

G:883. Fie a,b,c > 0. Arătați că $\max\left\{\frac{a^2+1}{2b},\frac{b^2+1}{2c},\frac{c^2+1}{2a}\right\}\ge 1$

Cremeneanu Luiza, Prunaru Constantina, Craiova

Rezolvare:

Presupunem prin absurd că $\max\left\{\frac{a^2+1}{2b},\frac{b^2+1}{2c},\frac{c^2+1}{2a}\right\}\langle 1$, rezultă că $\frac{a^2+1}{2b}\langle 1, \frac{b^2+1}{2c}\langle 1, \frac{c^2+1}{2a}\langle 1$

care înmulțite membru cu membru ne dau : $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) < 8abc$ (1)

Cum $a^2+1 \geq 2a$, $b^2+1 \geq 2b$, $c^2+1 \geq 2c$, rezultă prin înmulțire membru cu membru că

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$ (2)

Cum (1) și (2) sunt contradictorii rezultă $\max\left\{\frac{a^2+1}{2b},\frac{b^2+1}{2c},\frac{c^2+1}{2a}\right\}\geq 1$.

G:884. Numerele naturale $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ sunt invers proporţionale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2019}$ şi $a_1+a_3+...+a_{2019}=2020^2$. Determinaţi numerele naturale $a_1, a_2, ..., a_{2019}$.

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni

***Rezolvare*:**

Numerele naturale $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ sunt invers proporţionale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2019}$

atunci : $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=\frac{a_3}{3}=...=\frac{a_{2019}}{2019}=k \Rightarrow a_j = j\cdot k,\ j\in\{1,2,3,...,2019\}$

$a_1+a_3+...+a_{2019}=k+3\cdot k+5\cdot k+...+2019\cdot k=k\cdot(1+3+5+...+2019)=k\cdot 1010^2$

$\Rightarrow k\cdot 1010^2=2020^2 \Rightarrow k=4$. Rezultă, $a_1=4$, $a_2=8$, ..., $a_{2019}=8076$.

G:885. Fie $k>0$. Arătaţi că dacă aria unui patrulater convex este $2k^2$, iar suma diagonalelor este $4k$, atunci patrulaterul este ortodiagonal.

Neculai Stanciu, Buzău și **Titu Zvonaru,** Comănești

Rezolvare: Dacă patrulaterul are diagonalele d_1 şi d_2 , iar α este unghiul dintre ele atunci aria trapezului este $A=\frac{d_1d_2\sin\alpha}{2}$. Din ipoteză şi $\sin\alpha\leq 1$ avem:

(1) $4k^2=d_1d_2\sin\alpha\leq d_1d_2$. Din inegalitatea mediilor şi ipoteză rezultă $\sqrt{d_1d_2}\leq\frac{d_1+d_2}{2}=2k$

$\Leftrightarrow (2)d_1d_2\leq 4k^2$. Din (1) şi (2) rezultă că avem egalitate. Deci, $\sin\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=90^0$.

G:886. Să se determine triungiurile ABC de laturi $a=\sqrt{n},\ b=(n+1)\sqrt{n},\ c=n\sqrt{2n+1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

***Rezolvare*:** Pentru a exista un triunghi trebuie ca orice latură să fie mai mică decât suma celorlaite două. Inegalitatea $a\langle b+c$ este evidentă.

Inegalitatea $b\langle a+c\Leftrightarrow(n+1)\sqrt{n}\langle\sqrt{n}+n\sqrt{2n+1}\Leftrightarrow n\sqrt{n}\langle n\sqrt{2n+1}$, adevărată pentru orice n natural.

Inegalitatea

$c\langle a+b\Leftrightarrow n\sqrt{2n+1}\langle\sqrt{n}+(n+1)\sqrt{n}\Leftrightarrow\sqrt{2n^2+n}\langle n+2\Leftrightarrow 2n^2+n\langle n^2+4n+4$

$\Leftrightarrow n^2-3n-4\langle 0\Leftrightarrow(n+1)(n-4)\langle 0\Leftrightarrow n-4\langle 0\Leftrightarrow n\in\{1,2,3\}$.

Numărul triunghiurilor este trei: un triunghi de laturi $1, 2$ *şi* $\sqrt{3}$, alt triunghi de laturi $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ *şi* $2\sqrt{5}$ *şi* un al treilea triunghi de laturi $\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ *şi* $3\sqrt{7}$.

G:887. a)Să se arate că: $\frac{1}{4n} < \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{3}{4(2n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$, ecuația: $\left[5\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n-1)}{4\cdot6\cdot8\cdot...\cdot(2n)}\right]=1$, **unde prin [*a*] se notează partea întreagă a unui număr real *a*.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se demonstrează mai întâi inegalitățile: $\frac{2k-2}{2k} < \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 < \frac{2k-1}{2k+1}$, $\forall k \geq 1$ (*) .

Astfel, $\frac{2k-2}{2k} < \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 \Leftrightarrow \quad 2k(2k-2) < (2k-1)^2 \quad \Leftrightarrow 4k^2-4k < 4k^2-4k+1 \Leftrightarrow 0 < 1$ adevărat.

$\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 < \frac{2k-1}{2k+1} \Leftrightarrow (2k-1)(2k+1) < (2k)^2 \Leftrightarrow 4k^2-1 < 4k^2$, adevărat.

Dând valori lui k din mulțimea $\{2,3,4,...,n\}$ în inegalitățile (*) obținem succesiv:

$\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, $\quad \frac{2}{4} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{3}{5}$, $\quad \frac{4}{6} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^2 \leq \frac{5}{7}$, ..., $\frac{2n-2}{2n} < \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{2n-1}{2n+1}$.

Înmulțim membru cu membru aceste 2n-1 inegalități și obținem

$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot.....\cdot\frac{2n-2}{2n} < P^2 < \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n+1}$, unde am notat $P < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n}$.

Se obține că $\frac{2}{8n} < P^2 < \frac{3}{4(2n+1)}$, de unde rezultă inegalitățile a).

Cu notația făcută ecuația se scrie $[10P]=1 \Leftrightarrow 1 \leq 10P < 2$, sau $1 \leq 100P^2 < 4$. (1).

Din a) rezultă: $\frac{100}{4n} < 100P^2 < \frac{300}{4(2n+1)}$ (2).

Inegalitățile (1) și (2) sunt simultan adevărate dacă $1 \leq \frac{25}{n} < 100P^2 < \frac{75}{2n+1} < 4$. Rezultă $n \leq 25$ și $n \geq 9$.

Deci mulțimea soluțiilor naturale ale ecuației date este: $S=\{9;10,11,....,24,25\}$

G:888. Cât la sută din aria cercului circumscris triunghiului echilateral (A_1) este aria cercului înscris corespunzător (A_2)? b) Verificaţi relaţia $2^{2019} A_1 = 2^{2023} A_2$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

a) 1) $A_1 = \prod R^2$, 2) $A_2 = \prod \frac{R^2}{4} = 25\% A_1$.

b) Relaţia devine $A_2 = 25\% A_1$ (A).

▪ Clasa a VIII-a

G:889. Fie $n=\sqrt{(x+y+11)^2}+\sqrt{(x+y-14)^2}$, $x\in(-6;5)$, $y\in(-5;9)$. **Arătaţi că** $\sqrt{n}$ **este număr întreg.**

Daniela Badea, Ploiești

Înmulţind inegalităţile (1), (2) şi (3) membru cu membru găsim:

$$x^2y^4z^8 \geq (2x-1)(4y-3)(8z-7).$$

Pentru că avem egalitate rezultă x = y = z = 1.

G:893. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $(m-2)x^2-2(m+2)x+m=0$ să aibă soluţii reale.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Ecuația are soluții reale dacă discriminantul ecuației este pozitiv.

$\Delta = (2(m+2))^2 - 4(m-2)m = 24m+16 \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{2}{3}$.

G:894. Arătați că există numere naturale m și n distincte , astfel încât numărul $x = 3^m + 3^n + 3^{46} + 3^{57}$, să fie cub perfect.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Pentru ca x să fie cub perfect, el trebuie să fie de forma $x = (3^k + 3^l)^3$ adică $x = 3^{3k} + 3\cdot 3^{2k}\cdot 3^l + 3\cdot 3^k \cdot 3^{2l} + 3^{3l}$, $1 \leq k \langle\ l,\ k,l \in \mathbb{N}$. Cum $3^{57} = (3^{19})^3$, putem lua l = 19. Atunci, $x = 3^{3k} + 3^{2k+20} + 3^{k+39} + 3^{57}$ pe care-l putem scrie sub forma $x = 3^m + 3^n + 3^{46} + 3^{57}$.

Vom cerceta dacă există $k \in \mathbb{N}^*$, pentru care unul din termenii 3^{3k}, 3^{2k+20}, 3^{k+39} este egal cu 3^{46}.

Se verifică pentru $3^{2k+20} = 3^{46} \Rightarrow 2k+20 = 46 \Rightarrow k = 13$ iar x se scrie $x = 3^{39} + 3^{46} + 3^{52} + 3^{57} = (3^{13} + 3^{19})^3$ pentru $(m,n) \in \{(39,52)\}$.

Dacă $3^{k+39} = 3^{46} \Rightarrow k+39 = 46 \Rightarrow k = 7$ iar x se scrie $x = 3^{21} + 3^{34} + 3^{46} + 3^{57} = (3^7 + 3^{19})^3$ pentru $(m,n) \in \{(21,34)\}$.

G:895. Să se rezolve ecuaţia $[nx] + \{(n+1)x\} = n+2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia se scrie: $[nx] + (n+1)x - [(n+1)x] = n+2 \Leftrightarrow$

$[nx] - [(n+1)x] = n+2 - (n+1)x \overset{notam}{=} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{n+2-k}{n+1} = 1 + \frac{1-k}{n+1}$, ecuația devine:

$$\left[n + \frac{n(1-k)}{n+1}\right] - [n+2-k] = k \Leftrightarrow n + \left[\frac{n(1-k)}{n+1}\right] - n - 2 + k = k \Leftrightarrow \left[\frac{n(1-k)}{n+1}\right] = 2.$$

Din definiţia părţii întregi avem: $2 \leq \frac{n(1-k)}{n+1} \langle 3 \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{n} \leq 1-k \langle\ 3 + \frac{3}{n} \Leftrightarrow -2 - \frac{3}{n} \langle k \leq -1 - \frac{2}{n}$.

Avem cazurile:

1) Pentru n =1 obţinem $-5 \langle k \leq -3 \Rightarrow k \in \{-4;-3\} \Rightarrow x \in \left\{3; \frac{7}{2}\right\}$;

2) Pentru n =2 obţinem $-\frac{7}{2} \langle k \leq -2 \Rightarrow k \in \{-3;-2\} \Rightarrow x \in \left\{2; \frac{7}{3}\right\}$

3) Pentru $n \geq 3$ avem: $-3 \leq -2 - \frac{3}{n} \langle k \leq -1 - \frac{2}{n} \langle -1 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow x = \frac{n+4}{n+1}$.

G:896. Se consideră funcţia $f : [1;\sqrt{12}] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{12-x^2}$.

Să se compare $f(x)$ și $f(y)$ pentru $1 \leq x \langle y \leq \sqrt{12}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{12-x^2} = \sqrt{2}$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: $n=\sqrt{(x+y+11)^2}+\sqrt{(x+y-14)^2}=|x+y+11|+|x+y-14|$

$$\left.\begin{array}{l} x\in(-6;5)\Leftrightarrow -6<x<5 \\ y\in(-5;9)\Leftrightarrow -5<y<9 \end{array}\right\}\Rightarrow -11<x+y<14 \qquad \Rightarrow 0<x+y+11<25\Rightarrow |x+y+11|=x+y+11$$

$$\Rightarrow -25<x+y-14<0\Rightarrow |x+y-14|=-x-y+14$$

$$\Rightarrow n=x+y+11-x-y+14=25 \qquad \Rightarrow \sqrt{n}=\sqrt{25}=5\in\mathbb{Z}.$$

G:890. **Fie $a,b>0$ cu proprietatea $a^3+b^3=2$. Arătaţi că $b+\dfrac{2}{ab}\geq\sqrt{3(a^2+2b^2)}$.**

Nela Ciceu, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Deoarece $a^3+b^3=2$, inegalitatea se scrie succesiv

$$b+\frac{a^3+b^3}{ab}\geq\sqrt{3(a^2+2b^2)}\Leftrightarrow a^3+ab^2+b^3\geq ab\sqrt{3(a^2+2b^2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^6+a^2b^4+b^6+2a^4b^2+2a^3b^3+2ab^5\geq 3a^4b^2+6a^2b^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^6-a^4+2a^3b^3-5a^2b^4+2ab^5+b^6\geq 0\Leftrightarrow (a-b)^2(a^4+2a^3b+2a^2b^2+4ab^3+b^4)\geq 0.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=1$.

G:891. **Să se demonstreze că dacă $n>1$ este un număr natural şi p un număr prim astfel încât $n|p-1$ şi $p|n^3-1$, atunci n^2+n+1 este număr prim şi $p+n$ este pătrat perfect.**

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Deoarece $n|p-1$, deducem că $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$ şi $n\leq p-1$. Deci, $n-1<p$, şi cum p este prim avem că $(n-1,p)=1$. Deoarece din ipoteză $p|n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$, şi cum $(n-1,p)=1$, avem că $p|n^2+n+1$. Fie k un număr natural nenul astfel încât $n^2+n+1=kp$. Astfel,

$k\equiv kp=n^2+n+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$ şi deoarece $p\geq n+1$, are loc relaţia: $k=\dfrac{n^2+n+1}{p}\leq\dfrac{n^2+n+1}{n+1}<n+1$,

de unde rezultă $k=1$ şi prin urmare $n^2+n+1=p$. Deci, n^2+n+1 este număr prim .Astfel, prima parte a concluziei este demonstrată.

În continuare, $p+n=(n^2+n+1)+n=n^2+2n+1=(n+1)^2$ = pătrat perfect. Q.E.D.□

G:892. **Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale strict pozitive sistemul:**

$$\begin{cases} xy^2+7=8z \\ y^2z^4+1=2x \\ z^4x+3=4y \end{cases}.$$

Cătălin Cristea, Craiova

Rezolvare: Sistemul se scrie echivalent $\begin{cases} xy^2=8z-7 \\ y^2z^4=2x-1 \\ z^4x=4y-3 \end{cases}$

Înmulţind membru cu membru cele trei egalităţi avem $x^2y^4z^8=(2x-1)(4y-3)(8z-7)$. Pe de altă parte avem: $x^2\geq 2x-1$, cu egalitate pentru x=1. (1)

$y^4+3=(y^4+1)+2\geq 2y^2+2=2(y^2+1)\geq 4y$ deci $y^4\geq 4y-3$ cu egalitate pentru y=1.(2)

$z^8+7=\left[(z^2)^4+3\right]+4\geq 4z^2+4=4(z^2+1)\geq 8z$ deci $z^8\geq 8z-7$ cu egalitate pentru z=1.(3)

Rezolvare:

a) $f(x)-f(y)=(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)-\left(\sqrt{12-x^2}-\sqrt{12-y^2}\right)=$

$(x-y)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}+\dfrac{x+y}{\sqrt{12-x^2+\sqrt{12-y^2}}}\right)\langle\ 0,\ \forall x\langle y.$ Așadar, $f(x)\langle f(y)$.

b) Pentru ecuația $f(x)=\sqrt{2}$ singura soluție este x = 3.

Fie $1\le x\langle 3\Rightarrow f(x)\langle f(3)=\sqrt{2}$. Contradicție.

Dacă $3\langle x\le\sqrt{12}\Rightarrow f(3)=\sqrt{2}\langle f(x)$. Contradicție.

G:897. O prismă dreaptă ABCDA′B′C′D′ cu baza pătratul ABCD de latură 12cm are măsura unghiului dintre BD′ și planul (AA′B) egală cu *x*.
a) Arătați că *x* < 45⁰ ;
b) Calculaţi cos *x* pentru care paralelipipedul ABCDA′B′C′D′ este cub ;
c) Se secţionează paralelipipedul ABCDA′B′C′D′ cu planul (D′AM) unde M este mijlocul muchiei CC′. Calculaţi aria secţiunii obţinute în cazul în care CC′=12 cm.

Daniela Badea, Ploiești

Rezolvare. a) $\Pr_{(AA'B)}D'B=A'B\Rightarrow m\left(\measuredangle D',(AA'B)\right)=m\left(\measuredangle D'BA'\right)=x$.

$\Delta ABA'$ dreptunghic în $A\Rightarrow A'B>AB\Leftrightarrow A'B>A'D'$

$D'A'\perp(AA'B),A'B\subset(AA'B)\Rightarrow D'A'\perp A'B$

$\Delta D'A'B$ dreptunghic în $A'\Rightarrow D'B>A'B>A'D'\Rightarrow 90^0>m\left(\measuredangle A'D'B\right)>m\left(\measuredangle A'BD'\right)$

Cum $\Delta D'A'B$ nu este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m\left(\measuredangle A'D'B\right)>45^0>m\left(\measuredangle A'BD'\right)$

b) $\Delta D'A'B,\measuredangle A'=90^0,A'B=12\sqrt{2}cm,D'B=12\sqrt{3}cm\Rightarrow\cos x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

c) $D'M\cap DC=\{P\},AP\subset(ABC),AP\cap BC=\{N\}\Rightarrow N\in(D'AM)$

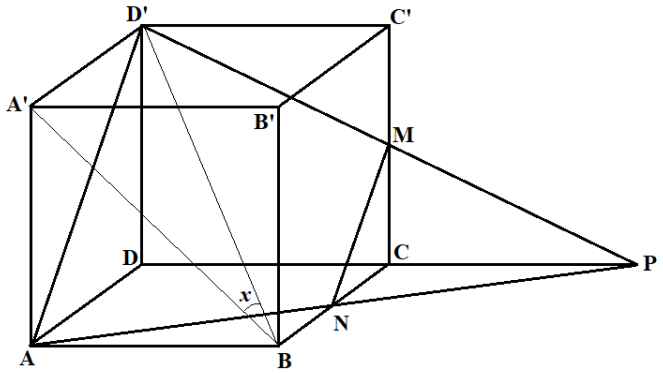
$$\left.\begin{array}{l}(ADD')\cap(D'AM)=D'A\\(BCC')\cap(D'AM)=MN\\(ADD')\parallel(BCC')\end{array}\right\}\Rightarrow D'A\parallel MN.$$

În $\Delta D'DP$ avem OM linie mijlocie $\Rightarrow$DP=24cm $\Rightarrow$AP=12 $\sqrt{5}$ cm

$\Delta D'DP\equiv\Delta ADP(CC)\Rightarrow D'P=AP\Rightarrow\Delta D'AP$ isoscel, $PS\perp AD'\Rightarrow\Delta APS,\measuredangle S=90^0\Rightarrow PS=18\sqrt{2}\ cm$

$\Rightarrow A_{PAD'}=\dfrac{AD'\cdot PS}{2}=216cm^2$

În ΔADP avem MN linie mijlocie $\Rightarrow\dfrac{A_{PMN}}{A_{PAD'}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow A_{AD'MN}=\dfrac{3}{4}\cdot A_{PAD'}\Rightarrow A_{AD'MN}=162cm^2$.



▪ Clasa a IX-a

L:679. Fie a , b , c , a+b+c numere raționale care nu sunt întregi . Arătați că există k $\in\mathbb{N}^*$ astfel încât ka , kb , kc nu este număr întreg 1 < {ka} + {kb} + {kc} < 2 , unde {x} reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Alina Ghiță, Craiova, **Mădălina Giurgescu,** București

Rezolvare: Fără a restrânge generalitatea putem presupune a , b , c $\in$ (0 ; 1)

Putem lua k=1 = > {a} + {b} + {c} = a + b + c $\in$ (1 ; 2)

L:680. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ definite prin $a_n = 8n-4,\ b_n = 2^{a_n},\ n\in\mathbb{N}^*$;

a) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_1+a_2+.....+a_n = 2020^2$;

b) Calculați suma $S = b_1+b_2+....+b_{2020}$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

a) $a_{n+1}-a_n = 8n+8-4-8n+4 = 8 = ct.$ Atunci, $(a_n)_{n\geq1}$ este progresie aritmetică.

Așadar, membrul stâng este suma unei progresii aritmetice, $\frac{(4+8n-4)\cdot n}{2}$:

$$\frac{(4+8n-4)\cdot n}{2} = 2020^2 \Rightarrow 4n^2 = 2^2\cdot 1010^2 \Rightarrow n = 1010.$$

b) $b_n = 2^{8n-4} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^8 = q$. Atunci, $(b_n)_{n\geq1}$ este progresie geometrică.

$$b_1 = 2^4;\quad S = 2^4+2^{8\cdot2-4}+2^{8\cdot3-4}+...+2^{8\cdot2020-4} = 2^4\cdot\frac{(2^8)^{2020}-1}{2^8-1} = \frac{16}{255}(2^{16160}-1).$$

L:681. Calculați $S = 2^2+3^2+5^2+6^2+7^2+8^2+...+\left((n^2-2n+2)^2+...+(n^2-1)^2\right)$.

Petre Păunescu, Roșiorii de Vede

Rezolvare: Observăm că S este suma pătratelor primelor n^2 numere naturale, dar fără $1^2=1^4,\ 4^2=2^4, 9^2=3^4,....,(n^2)^2=n^4$. Deci, $S = 1^2+2^2+3^2+...+(n^2)^2-\left(1^4+2^4+.....+n^4\right)$ care se determină țimând cont de relația de recurență $S_k = 1^k+2^k+3^k+...+n^k$.

L:682. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică cu $a_2 = 5$ și $a_{10} = 21$.

a) Calculaţi S_n;

b) Arătaţi că $\frac{a_1^2}{1}+\frac{a_2^2}{2}+.....+\frac{a_{2019}^2}{2019} \geq \frac{2019\cdot2021^2}{1010}$. **Laura Tănase,** Buzău

Rezolvare:

Evident, $r = \frac{a_{10}-a_2}{8} = 2,\ a_1 = a_2-r = 3,\ S_n = \frac{n(2n+4)}{2} = n(n+2)$.

b) Folosind inegalitatea Titu Andreescu obţinem:

$$\frac{a_1^2}{1}+\frac{a_2^2}{2}+.....+\frac{a_{2019}^2}{2019} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_{2019})^2}{1+2+3+...+2019} = \frac{S_{2019}^2}{\frac{2019\cdot2020}{2}} = \frac{2019^2\cdot2021^2}{2019\cdot1010} = \frac{2019\cdot2021^2}{1010}.$$

L:683. Fie a,b,c > 0. Arătați că $\max\left\{\frac{a^4+6a^2+1}{4b(b^2+1)}, \frac{b^4+6b^2+1}{4c(c^2+1)}, \frac{c^4+6c^2+1}{4a(a^2+1)}\right\} \geq 1.$

Claudiu Ciurcu, Anicuța Bețiu, Craiova

Rezolvare: Presupunem prin reducere la absurd că maximul cerut este mai mic decât 1, adică fiecare raport este mai mic decât 1. Prin înmulțirea celor trei rapoarte obținem

$\frac{a^4+6a^2+1}{4b(b^2+1)}\cdot\frac{b^4+6b^2+1}{4c(c^2+1)}\cdot\frac{c^4+6c^2+1}{4a(a^2+1)} \langle 1$. Dar cum $\frac{a^4+6a^2+1}{4a(a^2+1)}\geq 1$ deoarece $(a-1)^4\geq 1$. Analog pentru celelalte rapoarte, obținem că produsul rapoartelor este mai mare sau egal cu 1. Contradicție.
Așadar, enunțul problemei este adevărat.

L:684. **Fie** $a,b,c,d>0$. **Să se demonstreze că inegalitatea**

$$\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}+\frac{d\sqrt{d}}{a\sqrt{a}}\geq\frac{4\cdot\sqrt[4]{(a+2b)(b+2c)(c+2d)(d+2a)}}{3\cdot\sqrt[4]{abcd}}.$$

Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi **Nela Ciceu**, Bacău

Rezolvare: Folosind inegalitatea mediilor obţinem

$$\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}\geq 6\cdot\sqrt[6]{\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^3c^3d^3}}}=\frac{6a}{\sqrt[4]{abcd}}$$

$\Rightarrow\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}+\frac{d\sqrt{d}}{a\sqrt{a}}\geq\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$. Aplicând din nou inegalitatea mediilor rezultă

$$\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}=\frac{a+2b+b+2c+c+2d+d+2a}{3\cdot\sqrt[4]{abcd}}\geq\frac{4\cdot\sqrt[4]{(a+2b)(b+2c)(c+2d)(d+2a)}}{3\cdot\sqrt[4]{abcd}}.$$

L:685. **Numerele reale strict pozitive** $x_1,x_2,.....,x_{25}$ verifică relația $x_1+x_2+.....+x_{25}=25$.

Arătaţi că $\frac{x_1}{2x_1^2+3}+\frac{x_2}{2x_2^2+3}+....+\frac{x_{25}}{2x_{25}^2+3}\leq 5$. **În ce caz avem egalitate ?**

Ion Pătrașcu, Alina Georgiana Ghiță, Craiova

Rezolvare: Pentru orice x > 0 avem : $\frac{x}{2x^2+3}\leq\frac{x+4}{25}$ (*).

Într-adevăr relaţia (*) se scrie : $25x\leq 2x^3+8x^2+3x+12$ sau $2x^3+8x^2-22x+12\geq 0$, adică $2(x-1)^2(x+6)\geq 0$, cu egalitate pentru x=1

Folosind inegalitatea (*) obţinem $\sum_{i=1}^{25}\frac{x_i}{2x_i^2+3}\leq\sum_{i=1}^{25}\frac{x_i+4}{25}=\frac{1}{25}\cdot(25+4\cdot 25)=5.$

Egalitate avem pentru $x_1=x_2=...=x_{25}=1$.

L:686. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **, ecuaţia :** $\frac{3^x-2^y}{5^z+2^y}+\frac{5^z-3^x}{2^y+3^x}=\frac{5^z-2^y}{5^z+3^x}$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Se fac notațiile $a=3^x\rangle 0$, $b=2^y\rangle 0$, $c=5^z\rangle 0$ iar ecuația dată devine $\frac{a-b}{c+b}+\frac{c-a}{b+a}=\frac{c-b}{c+a}$ sau

$\left(\frac{a-b}{c+b}+1\right)+\left(\frac{c-a}{b+a}+1\right)+\left(\frac{b-c}{c+a}+1\right)=3$. Rezultă $S=\frac{a+c}{c+b}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{b+a}{c+a}=3$.

Cum cei trei membri ai sumei notată prin S sunt strict pozitivi , se verifică inegalitatea mediilor

$$S\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+c}{c+b}\cdot\frac{b+c}{b+a}\cdot\frac{b+a}{c+a}}=3$$

Cum S=3 , inegalitatea mediilor se verifică cu egalitate și atunci $\frac{a+c}{c+b}=\frac{b+c}{b+a}=\frac{b+a}{c+a}$, de

unde obținem egalitățile simultane: $(b+c)^2=(a+b)(a+c)$, $(a+b)^2=(a+c)(b+c)$, $(a+c)^2=(a+b)(b+c)$.

Adunăm membru cu membru aceste trei egalități și obținem:

$(b+c)^2+(a+b)^2+(a+c)^2=(a+b)(a+c)+(a+c)(b+c)+(a+b)(b+c)$ de unde

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Rightarrow a=b=c\Rightarrow x=y=z=0.$

L:687. Să se demonstreze prin metode elementare egalităţile:

$$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}\ ;\qquad \sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}=\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

(în legătură cu articolul „Sume gaussiene şi consecinţe trigonometrice” din GM-B, nr. 7 / 2006).

Rezolvare: Notăm:

$$\mathrm{E}=\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11},\quad \mathrm{F}=\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}$$

Pentru a demonstra prima egalitate, calculăm $\mathrm{E}\cdot\sin\frac{\pi}{11}$. Transformând produsele care apar în sume, se obţine $\mathrm{E}=\frac{1}{2}$.

Pentru a demonstra a doua egalitate, calculăm F^2. Transformând produsele care apar în sume, se obţine $\mathrm{F}^2=\frac{5+\mathrm{E}}{2}=\frac{11}{4}$, de unde $\mathrm{F}=\frac{\sqrt{11}}{2}$, deoarece evident F > 0.

L:688. Să se arate că: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\ge\frac{2n}{3n+1},\forall n\in N^*.$ **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare:

Din egalitatea **Botez-Catalan**: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$, inegalitatea se rescrie: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\ge\frac{2n}{3n+1},\forall n\in N^*.$

Din inegalitatea C-B-S, avem:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}=\frac{1^2}{n+1}+\frac{1^2}{n+2}+...+\frac{1^2}{n+n}\ge\frac{(1+1+...+1)^2}{n^2+1+2+...+n}=\frac{n^2}{\frac{n(3n+1)}{2}}=\frac{2n}{3n+1},$$

de unde rezultă inegalitatea de demonstrat.

Inegalitatea de mai sus se poate demonstra şi prin metoda inducţiei matematice.

Observaţie. Inegalitatea propusă este şi o generalizare a inegalităţii C.2814 din Gazeta Matematică, nr, 12/2004, Aurel Doboşan, Lugoj .

L:689. Dacă $a_1,a_2,...,a_n$ **sunt numere reale strict pozitive cu** $a_1a_2...a_n=1$ **şi notăm** $s=a_1+a_2+...+a_n$ **, să se demonstreze că avem inegalitatea:**

$$\frac{a_1^2}{s-a_1+1}+\frac{a_2^2}{s-a_2+1}+...+\frac{a_n^2}{s-a_n+1}\ge 1$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

(în legătură cu problema O: 1172 din Gazeta Matematică nr. 10/2007).

Rezolvare:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot....\cdot a_n}=1\Rightarrow a_1+a_2+...+a_n\ge n\Rightarrow s\ge n\,\Big|\cdot(s+1)\Rightarrow s^2\ge(n-1)s+n$$

Folosind inegalitatea Cauchy- Buniakovski- Schwarz, putem scrie:

$$\left(\frac{a_1^2}{s-a_1+1}+\frac{a_2^2}{s-a_2+1}+...+\frac{a_n^2}{s-a_n+1}\right)\left[(s-a_1+1)+(s-a_2+1)+...+(s-a_n+1)\right]\geq$$

$$\geq\left(\frac{a_1}{\sqrt{s-a_1+1}}\cdot\sqrt{s-a_1+1}+\frac{a_2}{\sqrt{s-a_2+1}}\cdot\sqrt{s-a_2+1}+...+\frac{a_n}{\sqrt{s-a_n+1}}\cdot\sqrt{s-a_n+1}\right)^2=$$

$$=(a_1+a_2+...+a_n)^2=s^2$$

Deci, $\left(\frac{a_1^2}{s-a_1+1}+\frac{a_2^2}{s-a_2+1}+...+\frac{a_n^2}{s-a_n+1}\right)\left[(n-1)s+n\right]\geq s^2$

Rezultă $\frac{a_1^2}{s-a_1+1}+\frac{a_2^2}{s-a_2+1}+...+\frac{a_n^2}{s-a_n+1}\geq\frac{s^2}{(n-1)s+n}\geq 1$

Observaţie: pentru n=3 se obţine problema O: 1172 din Gazeta Matematică nr. 10/2007.

L:690. Să se arate că, în orice triunghi ascuţitunghic sau dreptunghic ABC, are loc inegalitatea: $\frac{(a+m_a)^2}{b^2c^2}+\frac{(b+m_b)^2}{c^2a^2}+\frac{(c+m_c)^2}{a^2b^2}<5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ **notaţiile fiind cele uzuale.**

Cătălin Cristea, Craiova

Rezolvare:

Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic sau dreptunghic rezultă că $b^2+c^2\geq a^2$.

Avem succesiv: $\frac{(a+m_a)^2}{b^2c^2}\leq\frac{2(a^2+m_a^2)}{b^2c^2}=\frac{3a^2+2b^2+2c^2}{2b^2c^2}\leq\frac{3(b^2+c^2)+2b^2+2c^2}{2b^2c^2}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

şi analog $\frac{(b+m_b)^2}{c^2a^2}\leq\frac{5}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)$, $\frac{(c+m_c)^2}{a^2b^2}\leq\frac{5}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)$.

Adunând cele trei inegalităţi obţinem că $\frac{(a+m_a)^2}{b^2c^2}+\frac{(b+m_b)^2}{c^2a^2}+\frac{(c+m_c)^2}{a^2b^2}<5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

Egalitatea nu poate avea loc deoarece, în acest caz, ar rezulta $a=m_a$, $b=m_b$, $c=m_c$ de unde obţinem imediat că $a^2+b^2+c^2=m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=0$ ceea ce evident este fals.

L:691. Arătaţi că nu există numere reale x şi numere raţionale y astfel încât: $\frac{x}{y^2(1-y)}=3$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

Observăm că pentru $x\neq 0$, $y\neq 0, y\neq 1$, $\frac{x}{y^2(1-y)}=3\Leftrightarrow$ (*) $3y^3-3y^2+x=0$.

Fie $y=\frac{a}{b}$, cu a şi b întregi, $b>0,(a,b)=1$ care verifică (*).

Avem că (**) $3a^3-3a^2b+b^3x=0$.

Rezultă $b|3a^3$, dar $(a,b)=1$. Prin urmare $b=1$ sau $b=3$.

Dacă $b=3$, din (**) obţinem $3a^3-9a^2+27x=0\Leftrightarrow a^3-3a^2+9x=0$, de unde rezultă că $3|a$, contradicţie ! (deoarece $(a,b)=1$).

Aşadar $b=1$, iar din (**) rezultă $x=3a^2(1-a)$, care înlocuit în (*) conduce la :

$y^3-y^2-a^3+a^2=0\Leftrightarrow(y-a)\left[y^2+y(a-1)+a^2-a\right]=0$.

Trebuie ca ultima ecuaţie să aibă numai rădăcini raţionale.Deci discriminantul ecuaţiei din paranteza pătrată trebuie să fie în primul rând pozitiv.

Astfel avem: $\Delta_y=-3a^2+2a+1=(1-a)(3a+1)>0$, şi ţinând cont că a este număr întreg

obţinem $a \in \{0,1\}$.În ambele cazuri rezultă $x = 0$ şi $y \in \{0,1\}$, contradicţie!(vezi condiţiile iniţiale).
Prin urmare, nu există numere reale x şi numere raţionale y care verifică relaţia din enunţ.

L:692. Fie ABC un triunghi, Γ cercul său circumscris şi M mijlocul laturii BC. Paralele prin A la BC intersectează cercul Γ în punctul P, iar dreapta PM intersectează acelaşi cerc în punctul Q. Să se demonstreze că $AB \cdot QC = AC \cdot BQ$.

Nela Ciceu, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Dacă $AB = AC$, concluzia este evidentă. Presupunem că $AB < AC$. Notăm cu T intersecţia dintre dreapta AM şi cercul Γ. Trapezul $ABCP$ este isoscel, şi atunci triunghiul AMP este isoscel cu $AM = MP$. Deoarece patrulaterul $AQTP$ este inscriptibil, avem

$$\angle PQT = \angle PAT = \angle APQ \text{, deci } AP \| BC \| QT.$$

Rezultă că dreapta AQ este simediană atât în triunghiul ABC cât şi în triunghiul QBC. Dacă AQ intersectează latura BC în punctul D, atunci

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}, \ \frac{BD}{DC} = \frac{BQ^2}{QC^2}, \text{ de unde deducem că } AB \cdot QC = AC \cdot BQ.$$

L:693. Fie $a,b,c \in (0;\infty)$ cu $a^2+b^2+c^2 \le 3$. Să se arate că

$$\frac{a}{b+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b^2} + \frac{b}{c+(1+\sqrt{c}+\sqrt[3]{c})\cdot c^2} + \frac{c}{a+(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})\cdot a^2} \ge \frac{3}{4}.$$

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b^2} = \sum_{cyc} \frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{1+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b}.$$ Utilizând inegalitatea Cauchy- Schwarz-

Buniakowski: $$\sum_{cyc} \frac{a}{b+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b^2} \ge \frac{\sum_{cyc}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{3+\sum_{cyc} b+\sum_{cyc}\sqrt{b^3}+\sum_{cyc}\sqrt[3]{b^4}}.$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b}} \ge 3, \quad \sum_{cyc} b \le \sum_{cyc}\frac{b^2+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{cyc} b^2 + \frac{3}{2}, \quad \sum_{cyc}\sqrt{b^3} \le \sum_{cyc}\frac{3b^2+1}{4} = \frac{3}{4}\sum_{cyc} b^2 + \frac{3}{4},$$

$$\sum_{cyc}\sqrt[3]{b^4} \le \sum_{cyc}\frac{2b^2+1}{3} = \frac{2}{3}\sum_{cyc} b^2 + 1, \quad \text{Rezultă,}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b^2} \ge \frac{9}{3+\frac{1}{2}\sum b^2+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\sum b^2+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sum b^2+1} = \frac{9}{\frac{25}{4}+\frac{23}{12}\sum b^2} \ge \frac{3}{4}.$$

▪ Clasa a X-a

L:694. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $8x^3-6x-1=0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Deoarece, $8x^3-6x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 4x^3-3x$ rezultă că $\exists \alpha \in [0,2\pi]$ astfel încât:

$x=\cos\alpha$. Deci, $\frac{1}{2}=4x^3-3x=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos(3\alpha)\Rightarrow\ 3\alpha=\pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Pe $\alpha\in[0,2\pi]$ avem soluţiile: $x_1=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $x_2=\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ şi $x_3=\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$.

L:695. **Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia:** $\frac{3\cdot\sqrt{x+2}-4\cdot\sqrt[3]{2x+1}}{2\cdot\sqrt{x+2}-3\cdot\sqrt[3]{2x+1}}=1.$ **Adrian Stan,** Buzău

***Rezolvare*:** Ecuaţia dată este echivalentă cu $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{2x+1}\,|()^6$ prin ridicare la puterea a şasea $\Rightarrow$

$(x+2)^3=(2x+1)^2\Rightarrow\quad x^3+2x^2+8x+7=0\Leftrightarrow\quad x^3+x^2+x^2+x+7x+7=0\Leftrightarrow$

$x^2(x+1)+x(x+1)+7(x+1)=0\Rightarrow\quad (x+1)(x^2+x+7)=0\quad .\ x\in\left\{-1,\frac{-1\pm3i\sqrt{3}}{2}\right\}.$

L:696. **Fie $n\in N^*, n\geq 2$ şi numerele $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$. Să se demonstreze că**

$\frac{x_1^{\ 2}+x_2}{x_1x_2+x_2}+\frac{x_2^{\ 2}+x_3}{x_2x_3+x_3}+...+\frac{x_n^{\ 2}+x_1}{x_nx_1+x_1}\geq n.$ **Cătălin Cristea,** Craiova

Rezolvare: Se utilizează inegalitatea: $\frac{x_1^{\ 2}+x_2}{x_1x_2+x_2}\geq\frac{x_1+1}{x_2+1}\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\geq 0$ şi analog pentru celelalte.

Se aplică apoi inegalitatea mediilor cu egalitate pentru $x_1=x_2=...=x_n$.

L:697. **Dacă $a,b,c,d\geq 0$, demonstraţi inegalitatea** $\frac{1+a^3}{1+abc}+\frac{1+b^3}{1+bcd}+\frac{1+c^3}{1+cda}+\frac{1+d^3}{1+dab}\geq 4$.

Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi **Nela Ciceu**, Bacău

Rezolvare: Folosind inegalitatea lui Hölder avem $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\geq(1+abc)^3$.

Rezultă că $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)=\sqrt[3]{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)}\cdot\sqrt[3]{(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}$

$\sqrt[3]{(1+c^3)(1+d^3)(1+a^3)}\cdot\sqrt[3]{(1+d^3)(1+a^3)(1+b^3)}\geq\ (1+abc)(1+bcd)(1+cda)(1+dab)$.

Aplicând ultima inegalitate şi inegalitatea mediilor MA-MG obţinem concluzia.

L:698. **Să se compare numerele :**

$a=nC_{2n+1}^0+\frac{n-1}{2}C_{2n+1}^1+\frac{n-2}{3}C_{2n+1}^2+....+\frac{1}{n}C_{2n+1}^{n-1},\quad b=\frac{1}{n+2}C_{2n+1}^{n+1}+\frac{2}{n+3}C_{2n+1}^{n+2}+....+\frac{n}{2n+1}C_{2n+1}^{2n},$

$n\in\mathbb{N}^*$. **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Dacă $n=1$, atunci $a=C_3^0=1,\ b=\frac{1}{3}C_3^2=1\Rightarrow\ a=b.$ Arătăm că $a=b$ şi pentru orice

$n\geq 2$. $\quad a-b=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k+1}C_{2n+1}^k-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-n}{k+1}C_{2n+1}^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k+1}C_{2n+1}^k+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n-k}{k+1}C_{2n+1}^k=\sum_{k=0}^{2n}\frac{n-k}{k+1}C_{2n+1}^k=$

$=\sum_{k=0}^{2n}\frac{n+1}{k+1}C_{2n+1}^k-\sum_{k=0}^{2n}\frac{k+1}{k+1}C_{2n+1}^k=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{2}C_{2n+2}^{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\ C_{2n+1}^k=$

$\frac{1}{2}\left(C_{2n+2}^1+C_{2n+2}^2+...+C_{2n+2}^{2n+1}\right)-\left(C_{2n+1}^0+...+C_{2n+1}^{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(2^{2n+2}-1-1\right)-(2^{2n+1}-1)=0\Rightarrow a=b$

S-a folosit formula $C_{m+1}^{p+1}=\frac{m+1}{p+1}C_m^p$.

L:699. **Dacă într-un triunghi ABC are loc relaţia $S=\frac{\pi}{e}\cdot R^2$, demonstraţi inegalitatea**

$r^2+r_a^{\ 2}+r_b^{\ 2}+r_c^{\ 2}\geq\frac{112\pi^2}{27e^2}\cdot R^2$, **notaţiile fiind cele cunoscute într-un triunghi.** **Radu Diaconu**, Sibiu

Rezolvare:

Folsind relațiile $r_a = \frac{S}{p-a}$ și analoagele, $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$, precum și inegalitățile lui Mitrinovic $3r\sqrt{3} \le p \le \frac{3R\sqrt{3}}{2}$, atunci inegalitatea din enunț devine: $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \ge r^2 + r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a =$ $r^2 + p^2 \ge 28r^2 \Rightarrow r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \ge 28r^2$. (1)

Din inegalitatea lui Mitrinovic, rezultă $\frac{1}{p^2} \ge \frac{4}{27R^2}$ și folosind ipoteza, inegalitatea (1) devine:

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \ge 28r^2 = 28 \cdot \frac{S^2}{p^2} \ge 28S^2 \cdot \frac{4}{27R^2} = \frac{112\pi^2}{27e^2} \cdot R^2.$$

L:700. Dacă într-un triunghi ABC are loc relația $S = 6\sqrt{5}$, demonstrați inegalitatea: $(m_a + m_b + m_c)^2 \ge 162 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$, notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{\sqrt{3}}{27} \cdot (m_a + m_b + m_c)^2 \ge S$. Din inegalitatea mediilor și ținând cont că $m_a \cdot m_b \cdot m_c \ge rp^2 = r_a r_b r_c$, avem:

$m_a + m_b + m_c \ge 3 \cdot \sqrt[3]{m_a \cdot m_b \cdot m_c} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{r_a \cdot r_b \cdot r_c} = 3\sqrt[3]{Sp}$. Atunci,

$$\frac{\sqrt{3}}{27} \cdot (m_a + m_b + m_c)^2 \ge \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \left(3\sqrt[3]{Sp}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt[3]{S^2 p^2} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{S^2 \cdot 3\sqrt{3}S} = S. \text{ c.c.t.d}$$

S-a folsit inegalitatea $p^2 \ge 3\sqrt{3} \cdot S$ care rezultă din

$$\frac{p}{3} = \frac{p-a+p-b+p-c}{3} \ge \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^3 \ge \frac{S^2}{p} \Leftrightarrow p^2 \ge 3\sqrt{3}S.$$

L:701. Să se arate că are loc egalitatea: $C_n^1 + \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 + ... + \frac{1}{n}C_n^n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{3} + ... + \frac{2^n - 1}{n}, n \in N^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare:

Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{\sqrt{3}}{27} \cdot (m_a + m_b + m_c)^2 \ge S$. Din inegalitatea mediilor și ținând cont că $m_a \cdot m_b \cdot m_c \ge rp^2 = r_a r_b r_c$, avem:

$m_a + m_b + m_c \ge 3 \cdot \sqrt[3]{m_a \cdot m_b \cdot m_c} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{r_a \cdot r_b \cdot r_c} = 3\sqrt[3]{Sp}$. Atunci,

$$\frac{\sqrt{3}}{27} \cdot (m_a + m_b + m_c)^2 \ge \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \left(3\sqrt[3]{Sp}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt[3]{S^2 p^2} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{S^2 \cdot 3\sqrt{3}S} = S. \text{ c.c.t.d}$$

S-a folsit inegalitatea $p^2 \ge 3\sqrt{3} \cdot S$ care rezultă din

$$\frac{p}{3} = \frac{p-a+p-b+p-c}{3} \ge \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^3 \ge \frac{S^2}{p} \Leftrightarrow p^2 \ge 3\sqrt{3}S.$$

L:702. Se consideră funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = n\left(\sin\frac{3\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right)$. Să se studieze : injectivitatea funcției f ; mărginirea funcției f ; Rezolvați în $\mathbb{N}^*$, ecuația $f(2n) = n$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: $f(1)=\sin 3\pi-\sin\pi=0$, $f(4)=4(\sin\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4})=0$. Rezultă f nu este injectivă, deoarece din $1\neq 4\Rightarrow f(1)=f(4)$.

$f(n)=2n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\Rightarrow |f(n)|=2n\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|\cdot\left|\cos\frac{2\pi}{n}\right|\leq 2n\cdot 1\cdot\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|=2\pi$. S-a aplicat faptul că $\sin x\leq x,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ și $|\cos x|\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f este mărginită.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=f(2n)\langle 7\Rightarrow n\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Singurele soluții care verifică ecuația $f(2n)=n$ sunt n=3 și n = 5.

▪ Clasa a XI-a

L:703. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & c & 0\\ d & e & a\end{pmatrix}, a\neq c.$ **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare:

Avem: $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc & 0\\ 0 & c^2 & 0\\ 2ad & bd+ce+ae & a^2\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix} a^3 & a^2b+abc+bc^2 & 0\\ 0 & c^3 & 0\\ 3a^2d & 2abd+bcd+c^2e+ace+a^2e & a^3\end{pmatrix},$

şi atunci: $A^n=\begin{pmatrix} a^n & x_n & 0\\ 0 & c^n & 0\\ na^{n-1}d & y_n & a^n\end{pmatrix}.$

Din egalitatea matricelor

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix} a^{n+1} & a^nb+cx_n & 0\\ 0 & c^{n++1} & 0\\ na^nd & na^{n-1}bd+cy_n+a^ne & a^{n+1}\end{pmatrix}, A^{n+1}=AA^n=\begin{pmatrix} a^{n+1} & ax_n+bc^n & 0\\ 0 & c^{n+1} & 0\\ na^nd & dx_n+c^ne+ay_n & a^{n+1}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-c^n}{a-c} & 0\\ 0 & c^n & 0\\ na^{n-1}d & \frac{na^{n-1}bd}{a-c}+\frac{a^n-c^n}{(a-c)^2}(ae-ce-bd) & a^n\end{pmatrix}.$$

L:704. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcţie continuă şi strict crescătoare. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir definit de $a_0=x,\ a_1=f(x)$, $a_{n+1}=f(a_n)\ \forall n\geq 1$ şi $a_{n+2}+a_{n+1}=2a_n+a\ \forall n\geq 0$, atunci determinaţi legea $f(x)$ care defineşte funcţia f şi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

Rezolvăm recurenţa prin metoda obişnuită. Ecuaţia omogenă caracteristică ataşată este $r^2+r-2=0$.

Observăm că $a_n=\frac{na}{3}$ este o soluţie particulară a recurenţei. Aşadar, soluţia generală este

$a_n=\alpha\cdot r_1^n+\beta\cdot r_2^n+\frac{na}{3}$, unde $r_1=1$ şi $r_2=-2$, iar constantele α şi β se determină din condiţiile

iniţiale: $\alpha+\beta=a_0=x$, respectiv $\alpha-2\beta+\frac{a}{3}=a_1=f(x)$.

Rezultă $\alpha=\frac{1}{3}\left(2x+f(x)-\frac{a}{3}\right)$ şi $\beta=\frac{1}{3}\left(x-f(x)+\frac{a}{3}\right)$. Deci,

$$a_n=\cos x-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos x+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\cos\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+....+\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}$$

Rezultă , $a_n=\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}-2\cos 2x\Rightarrow l(x)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-2\cos 2x$. $l\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\pi=2$.

▪ Clasa a XII-a

L:708. Să se calculeze $\int\limits_2^3 \ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$ **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\int\limits_2^3 x^I\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx=x\cdot\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\Big|_2^3-\int\limits_2^3\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx$$

$$=3\ln\left(2-\sqrt{2}\right)-2\ln(\sqrt{3}-1)-\int\limits_2^3\frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x+1-x+1}\cdot\frac{-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x^2-1}}dx=$$

$$=\ln\frac{(2-\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}-1)^2}+\int\limits_2^3\frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}dx=\ln\frac{20-14\sqrt{2}}{4-2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\Big|_2^3.$$

L:709. Să se calculeze $\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{x\ln x}{(x^2+2x+2)^2}dx,\ a\rangle 0$. **Gheorghe Ghiţă, Buzău**

Rezolvare:

Se efectuează schimbarea de variabilă $x=\frac{2}{t}\Rightarrow dx=-\frac{2}{t^2}dt$, iar integrala dată devine

$$I=\int\limits_{\frac{2}{a}}^{a}\frac{\frac{2}{t}\ln\frac{2}{t}}{(\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t}+2)^2}\cdot\frac{-2}{t^2}dt=\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{t\ln\frac{2}{t}}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt=\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{t\ln 2}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt-\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{t\ln t}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt$$

$$2I=(\ln 2)\cdot\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{t}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt=(\ln 2)\cdot\left[\frac{1}{2}\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{2t+2}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt-\int\limits_a^{\frac{2}{a}}\frac{1}{(t^2+2t+2)^2}\cdot dt\right]$$

Se obține $I=\frac{2-a^2}{4(a^2+a+2)}\ln 2-\frac{\ln 2}{4}\left(arctg\frac{a+2}{a}-arctg(a+1)\right)$.

L:710. Dacă ecuaţia $x^3+2013x-2012=0$**, are rădăcinile** α,β,γ **atunci calculaţi** $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Avem $S=\frac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$.

Deoarece $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=2013$, $\alpha\beta\gamma=2012$, iar $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=f(1)=2$, unde $f(x)=x^3+2013x-2012$, rezultă că $S=2013$.□

L:711. Se consideră ecuaţia $x^5-110x^3-384=0$. **Stabiliţi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei. Să se rezolve ecuaţia în C , ştiind că are două rădăcini cu produsul 16.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

(*) $a_n = \frac{1}{3}\left(2x + f(x) - \frac{a}{3}\right) + \frac{1}{3}(-2)^n\left(x - f(x) + \frac{a}{3}\right) + \frac{na}{3}$.

Deoarece f este crescătoare, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ trebuie să fie monoton, deci semnul diferenţei $a_{n+1} - a_n$ trebuie să fie constant (pozitiv sau negativ) $\forall n \geq 0$. Dar, acest lucru este posibil numai dacă termenul al doilea din (*) este nul, adică $f(x) = \frac{3x+a}{3}$, $\forall x \in R$.

Mai departe înlocuim $f(x) = \frac{3x+a}{3}$ în (*) şi obţinem şi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$, respectiv $a_n = \frac{3x+na}{3}$.

L:705. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4 + e^{4x} + 4^x)}{\ln(x^3 + e^{3x} + 3^x)}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+3)\sqrt{x} - 3x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$; **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4 + e^{4x} + 4^x)}{\ln(x^3 + e^{3x} + 3^x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln e^{4x}(\frac{x^4}{e^{4x}} + 1 + \frac{4^x}{e^{3x}})}{\ln e^{3x}(\frac{x^3}{e^{3x}} + 1 + \frac{3^x}{e^{3x}})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x\ln e + \ln(\frac{x^4}{e^{4x}} + 1 + \frac{4^x}{e^{3x}})}{3x\ln e + \ln(\frac{x^3}{e^{3x}} + 1 + \frac{3^x}{e^{3x}})} = \frac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+3)\sqrt{x} - 3x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^3 \cdot (\sqrt{x}+1)^3}{(x-1)^3 \cdot (\sqrt{x}+1)^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3 \cdot (\sqrt{x}+1)^3} = \frac{1}{8}$.

unde $(x+3)\sqrt{x} - 3x - 1 = x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3x - 1 = x(\sqrt{x}-1) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x} - 1 =$
$= (\sqrt{x}-1)(x - 2\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x}-1)^3$.

L:706. Să se determine toate perechile $(x;y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, soluţii ale ecuaţiei $(x+n)^x - x^{x+n} = n$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

$x = 0 \Rightarrow n^0 - 0^n = n$. Perechea $(0;1)$ este soluție.

$x = 1 \Rightarrow (1+n)^1 - 1^{1+n} = n$, deci $(1,n)$ este soluție.

$x = 2 \Rightarrow (2+n)^2 - 2^{2+n} = n \Rightarrow 2^{n+2} = n^2 + 3n + 4 \Rightarrow n \in \{0;1\}$. Pentru $n \geq 2$ se arată prin inducție că $2^{n+2} \rangle n^2 + 3n + 4$. Soluțiile sunt (2,0) și (2,1).

Dacă $x \in \mathbb{N}^*$ și $n = 0 \Rightarrow x^x - x^x = 0$, adevărat, deci și perechile (x;n) sunt soluții.

Pentru $x \in \mathbb{N} - \{0;1;2\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, scriem ecuația în forma $x^n + \frac{n}{x^n} = \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x \Leftrightarrow x^n + \frac{n}{x^n} = \left[\left(1 + \frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^n$.

Notăm $\frac{n}{x} = t \rangle 0 \Rightarrow (1+t)^{\frac{1}{t}} \langle e \langle 3$, rezultă $\left(1 + \frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}} \langle 3 \Rightarrow x^n + \frac{n}{x^x} \langle 3^n \Rightarrow 3^n - x^n \rangle \frac{n}{x^x} \rangle 0$, $3^n \rangle x^n$, fals pentru $x \geq 3$. Ecuaţai nu are soluţii cu $x \geq 3$.

Aşadar, $S = \{(0;1),(1;n),(x;0),(2,1) \mid n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^*\}$.

L:707. Dacă l(x)este limita şirului $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left(4\sin^2\frac{x}{2^k} + \cos\frac{x}{2^k} - 2\right)$. Calculaţi $l\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Laura Tănase, Buzău

Rezolvare :

$4\sin^2 x + \cos x - 2 = \cos x - 2\cos 2x$.

Rezolvare: Se consideră funcția $f(x)=x^5-110x^3-384$ care este derivabilă și are derivata $f^I(x)=5x^4-330x^2$. Ecuația $f^I(x)=0$ are soluțiile reale $-\sqrt{66},\ 0,\ \sqrt{66}$ iar cu șirul lui Rolle obținem că ecuația dată are trei rădăcini reale, $x_1\in\left(-\infty,-\sqrt{66}\right)$, $x_2\in\left(-\sqrt{66},\sqrt{66}\right)$, $x_3\in\left(\sqrt{66},+\infty\right)$ întrucât $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\langle 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\rangle 0$.

Fie x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 rădăcinile ecuației și presupunem că $x_1\cdot x_2=16$.

Conform relațiilor lui Viéte avem $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ și $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=384\Rightarrow x_3\cdot x_4\cdot x_5=24.$

Notăm $a=x_1+x_2$, atunci $x_3+x_4+x_5=-a$.

Ecuația cu rădăcinile x_1,x_2 este $x^2-ax+16=0$ iar ecuația cu rădăcinile x_3,x_4,x_5 este $x^3+ax^2+bx-24=0$. Ecuația din enunț este echivalentă cu $(x^2-ax+16)(x^3+ax^2+bx-24)=0$ sau $x^5+(b-a^2+16)x^3+(16a-ab-24)x^2+8(3a+2b)x-384=0$. Prin identificarea coeficienților cu cei din ecuația din enunț se obține a = -12, b= 18.

Așadar, din $x^2+12x+16=0\Rightarrow x_{1,2}=-6\pm2\sqrt{5}$ și pentru ecuația $x^3-12x^2+18x-24=0$ se utilizează substituția $x=y+4\Rightarrow y^3-30y-80=0$ la care se aplică formulele lui Cardan pentru ecuația de gradul 3 sub formă redusă: $y_1=\sqrt[3]{40+10\sqrt{6}}+\sqrt[3]{40-10\sqrt{3}}$, $y_1=\varepsilon\cdot\sqrt[3]{40+10\sqrt{6}}+\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{40-10\sqrt{3}}$,

$y_3=\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{40+10\sqrt{6}}+\varepsilon\cdot\sqrt[3]{40-10\sqrt{3}}$,unde $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

L:712. Pe o mulțime nevidă M este dată o lege de compoziție asociativă și fie $a\in M$. Dacă $M=a^2Ma$ să se determine $x\in M$ astfel ca $axa=a$. **Emil C. Popa** , Sibiu

Rezolvare:

Fie $t\in M$. Există $u\in M$ cu $t=a^2\cdot u\cdot a$ și există $b\in M$ astfel ca $a=a^2\cdot b\cdot a$. Notând $e_1=a^2\cdot b$ și $e_2=a\cdot b\cdot a$ obținem $e_1\cdot t=\left(a^2\cdot b\right)\cdot\left(a^2\cdot u\cdot a\right)=\left(a^2\cdot b\cdot a\right)\cdot\left(a\cdot u\cdot a\right)=a^2\cdot u\cdot a=t$ și $t\cdot e_2=\left(a^2\cdot u\cdot a\right)\cdot\left(a\cdot b\cdot a\right)=\left(a^2\cdot u\right)\cdot\left(a^2\cdot b\cdot a\right)=a^2\cdot u\cdot a=t$. Deci, $e_1\cdot t=e_2\cdot t=t,\ \forall t\in M$. Pentru $t=e_1\Rightarrow e_1\cdot e_2=e_1$ și pentru $t=e_2\Rightarrow e_1e_2=e_2\Rightarrow e_1=e_2=e$ este element neutru pentru M.

Avem $a^2\cdot b=aba\Rightarrow a\cdot\left(a\cdot b\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot a=e$ și de aici rezultă că a este inversabil, $a^{-1}=a\cdot b.$ Prin urmare, din $a\cdot x\cdot a=a$ rezultă $x=a^{-1.}$.

„Pasiunea de a ști
este pasiunea adevărului”
Dumitru Popescu
(n.1928-)

5. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:898. Care este ultima cifră a numărului $\frac{44^{2019}}{2}$? Sorin Pîrlea, Craiova

G:899. Arătați că numărul 2019 se poate scrie în trei moduri ca suma a trei numere prime , dintre care unul este mai mare decât 2000.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

G:900. Arătați că numărul $a = 169^n$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte , oricare ar fi n natural. Gheorghe Struțu, Buzău

G:901. Să se scrie numărul 10^{2019} ca sumă de cinci numere pare consecutive.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:902. Fie $p = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot ..... \cdot 9^9$. Arătați că “p” se divide cu 210^5 și găsiți ultima cifră nenulă a lui p. Petre Păunescu, Roșiorii de Vede

G:903. Dacă k este un număr natural oarecare și a = 3k+11, b = 2k+5, atunci (a;b) = 1 sau (a;b) = 7.

Petre Rău, Galați

G:904. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale: $16:(x-y) = x+2$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:905. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $A = 5^{n+4} \cdot 3^{n+1} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} + 3^2 \cdot 15^n$ la 2019.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:906. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $2^n + 7^m$ este divizibil cu 5 dacă și numai dacă $3^n + 8^m$ este divizibil cu 5. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

G:907. Fie a, b, c numere naturale diferite. Să se arate că numărul $N = (a-c)\cdot(b-c)$ se divide la numărul $2n^2 + n$ știind că are loc egalitatea $na + (n+1)c = (2n+1)b$. Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:908. Să se afle două numere naturale a și b știind că suma numerelor naturale mai mari ca a și mai mici ca b este 2017. Petre Rău, Galați

G:909. Arătați că există numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 10^{2021}$.

Iuliana Trașcă, Olt

G:910. Într-o cutie sunt 2 creioane roşii şi 3 creioane albastre de aceeaşi mărime. Se extrage câte un creion.
1) Care este numărul minim de creioane extrase la întâmplare, pentru a fi siguri că apare un creion roşu ?
2) Ce tip de creion se extrage, dacă probabilul (probabilitatea) apariţiei este 60 % ?

Ion Stănescu, Smeeni,Buzău

G:911. Două scumpiri succesive cu același procent, un produs își majorează prețul cu 21% . Care este procentul unei scumpiri **?** Marian Ciuperceanu, Craiova

G:912. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, pentru care numărul $a = 3^n + 81$ este pătrat perfect.

Ionel Tudor ,Călugăreni ,Giurgiu

G:913. Determinați x, y, z știind că $\frac{x+y}{8} = \frac{y-z}{3} = \frac{z}{2}$ și că $3x - 2z = 10$. Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:914. Arătați că $\overline{\underset{2019\ cifre}{55...5}} + \overline{\underset{2019\ cifre}{33...3}}^{\,2} = \overline{\underbrace{11.....1}_{2019\ cifre}\underbrace{44....4}_{2019\ cifre}}$. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:915. Fie a_1 şi a_2 două numere diferite de zero. Fie $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pentru $n > 2$. Arătaţi că produsul oricăror 2015 termeni consecutivi ai şirului $a_1, a_2, a_3, ...$ este termen al şirului.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:916. Suma măsurilor a 10 unghiuri este 1000^0. Să se calculeze suma măsurilor suplementelor acestor unghiuri.

Florentina Popescu, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:917. Aflaţi numărul natural n, dacă $2 + 4 + 6 + ... + 2n = abc$ este maxim.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:918. Fie $\frac{x+y}{y} = 3 - \sqrt{3}$. Calculați $\frac{x^2+y^2}{xy}$. Tatiana Cristea, Craiova

G:919. Există valori ale numărului real a, astfel încât numerele $x = \frac{2a+3}{4}$ și $y = \frac{3a-1}{2}$ să fie simultan numere întregi ?

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:920. Să se arate că 7 divide numărul $A = 29^{6n+1} - 22,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Florentina Popescu, Buzău

G:921. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 31 = 0$. Arătați că $|y - x - 8| \le 2\sqrt{3}$.

Ionel Morozenco, Tulcea

G:922. Se dau numerele raţionale $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ..... + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$

$B = \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + ... + \frac{1}{2020}$ şi $C = \sqrt{n+1+\sqrt{2n+1}} - \sqrt{n+1-\sqrt{2n+1}}$.

a) Calculaţi $(A-B)^{2019}$; b) Calculaţi $(C-A+B)^2$ pentru n = 2019.

Daniela Badea, Ploiești

G:923. Se dă numărul $A = 4 \cdot \overline{\underbrace{11.....1}_{2019\ cifre}\underset{2019\ cifre}{55....5}} + 4$. Calculați $\sqrt{A}$. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:924. Să se determine numerele reale x, y, z știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4 și că $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 3xz - 2yz + 129 = 0$.

Petre Rău, Galați

▪ Clasa a VII-a

G:925. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 3y - 2017 = 0$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

G:926. Să se rezolve ecuația $2019=\sqrt{2019+2(1+2+3+....+x)},\ x\in\mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:927. Calculați $(x+y)^7$ dacă $\begin{cases} x+3y=\dfrac{13}{x^2} \\ 3x+y=\dfrac{14}{y^2} \end{cases}$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:928. Pe latura BC a triunghiului echilateral ABC se consideră punctul D și se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BDE și CDF. Dreptele AE și AF intersectează latura BC în punctele M, respectiv N. Calculați $\dfrac{DM}{MB}+\dfrac{CN}{NB}$.

Roxana Vasile, Craiova

G:929. Fie triunghiul ABC, $D\in(BC)$, $E\in(AC)$ astfel încât AD şi BE să fie bisectoarele unghiurilor BAC respectiv ABC. Dacă $AB^2=AC\cdot AE$ şi $AC^2=AB\cdot DC$, atunci calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:930. O coală de hârtie dreptunghiulară cu dimensiunile L şi l se îndoaie o singură dată astfel încât două colţuri opuse să se suprapună. Calculaţi lungimea îndoiturii.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:931. Fie AA',BB',CC' mediane în triunghiul ABC, care intersectează cercul circumscris în punctele A'',B'',C''. Să se arate că: $\dfrac{1}{A'A''}+\dfrac{1}{B'B''}+\dfrac{1}{C'C''}\geq\dfrac{1}{R}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:932. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ știind că $ab^2+4ab-2b^2+4a-8b=44$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:933. Aflaţi n, natural, pentru care $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+...+\dfrac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}=\dfrac{120}{121}$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:934. Să se calculeze $S_n=2020+\overline{2020aa}+....+\overline{2020aa...a}$, unde a este o cifră iar la ultimul număr al sumei avem n-1 de a. caz particular a=9.

Petre Rău, Galați

G:935. Să se scrie numărul 17^{2019}, ca sumă a trei pătrate perfecte iar numărul $17^{2019}-1944\cdot17^{2016}$, ca sumă a trei cuburi perfecte.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

G:936. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, cu $x\cdot y\cdot z=6$. Determinați $x^2+y^2+z^2$ dacă $x+y+z=5$ și $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$.

Florentina Popescu, Buzău

G:937. Fie numărul $A=\dfrac{5x+4}{x+1}$, cu x număr rațional pozitiv. Calculați partea întreagă a numărului A. Aflați $x\in\mathbb{Q}_+$, pentru care partea fracționară a numărului A este 0,8.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:938. Aflați numerele reale a,b,c care verifică inegalitatea
$5(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)\le 3(2a+2b+2c-1)$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

G:939. Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care fracția $\dfrac{35x^3-29x^2-76x-12}{70x^3+47x^2-29x-6}$ se simplifică prin 41.

Constantin Nicolau , Curtea de Argeș

G:940. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-2}+2\sqrt{y-3}+3\sqrt{z-4}=\dfrac{x+y+z+5}{2}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:941. Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $a_n=\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:942. Fie punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât AD=BD=CD$=x$, $m(\measuredangle ADB)=60^0$, $m(\measuredangle BDC)=120^0$, $m(\measuredangle ADC)=90^0$.

a) Calculaţi $ctg(\sphericalangle ABC)$;

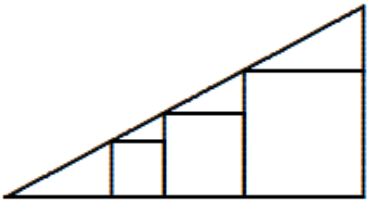
b) Determinaţi şi calculaţi distanţa de la punctul D la planul (ABC) şi măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (BCD);

c) Determinaţi şi calculaţi sinusul unghiului diedru format de planele (ABC) şi (ABD) şi distanţa de la punctul C la planul (ABD).

Daniela Badea, Ploiești

G:943. Trei pătrate sunt înscrise într-un triunghi dreptunghic ca în figura de mai jos.
Aflaţi lungimea laturii pătratului din mijloc ştiind că lungimea laturii pătratului mic este 1 cm iar lungimea laturii pătratului mare este 4 cm.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău



▪ Clasa a IX-a

L:713. Fie $A=\sqrt{n+\sqrt{6n-9}}-\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. Să se determine numerele naturale n astfel încât $\sqrt{6}\cdot A\in\mathbb{N}$.

Adrian Stan, Buzău

L:714. Fie $a,b,c\rangle 0$. Arătați că $\max\left\{\dfrac{a^4+6a^2+1}{4b(b^2+1)},\dfrac{b^4+6b^2+1}{4c(c^2+1)},\dfrac{c^4+6c^2+1}{4a(a^2+1)}\right\}\ge 1$.

Tatiana Cristea, Dorina Goiceanu, Craiova

L:715. Dacă 0<a<1, atunci $\dfrac{\sqrt{1-a^3}+1-\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}+1-\sqrt{a}}\rangle\sqrt{1+a+a^2}$. Petre Rău, Galați

L:716. Să se arate că dacă $a_1\langle a_2\langle a_3\langle.....\langle a_{2n-1}\langle a_{2n}$, pentru $n\ge 1$, atunci
$(a_1+a_2+a_3+.....+a_{2n})^2\rangle 4n(a_1a_{2n}+a_2a_{2n-1}+a_3a_{2n-2}+....+a_na_{n+1})$.

Ionel Tudor , Călugăreni ,Giurgiu

L:717. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația
$f(x-y)+f(2x-y)+f(2y-x)=2(x-3y+3)$. Livia Stan, Buzău

L:718. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(a,b,c)=\dfrac{(a+b+c)^3}{(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)}$, când a,b,c parcurg $(0,\infty)$. Marin Chirciu, Pitești

L:719. Arătați că numărul 22^{111} are cel puțin 149 cifre .
Constantin Nicolau , prof. , Curtea de Argeș

L:720. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\dfrac{1}{1-x}\right]=\dfrac{1}{1-[x]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

L:721. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=a+b+c+2$. Arătați că $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2\ge 75$.
Marin Chirciu, Pitești

L:722. Să se determine funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că $\begin{cases} f(x+y)+2g(2x-12)=\dfrac{x+1}{2} \\ f(\dfrac{x+13}{2})+g(x-7)=x+3 \end{cases}$.
Ionel Morozenco, Tulcea

L:723. Dacă $(b_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale în progresie geometrică , cu $q\ne\{-1;0;1\}; b_1\in R^*$, atunci demonstraţi :

$$\frac{q^4}{\sum_{k=1}^{n}b_{4k+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{4k+5}}+\frac{q^8}{\sum_{k=1}^{n}b_{4k+5}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{4k+9}}+\ldots+\frac{q^{i+4}}{\sum_{k=1}^{n}b_{4k+i+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{4k+i+5}}=\frac{q^4(q^{i+4}-1)}{q^4-1}$$

$\forall n\in N^*; i=4p, p\in N$

Prof. Ciobîcă Constantin; prof Ciobîcă Elena , Fălticeni

L:724. Dacă a,b,c sunt laturile unui triungh cu semiperimetrul p, atunci
$$(2a-p)(2b-p)(2c-p)\le(p-a)(p-b)(p-c).$$
D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:725. Într-un triunghi arbitrar de laturi a, b, c, notăm cu w_a, h_a lungimile bisectoarei interioare , respectiv înălțimii corespunzătoare laturii a, etc , și cu $\{u,v,w\}=\{\frac{w_a}{h_a},\frac{w_b}{h_b},\frac{w_c}{h_c}\}$. Demonstrați că are loc identitatea : $\dfrac{uv}{w}+\dfrac{vw}{u}+\dfrac{wu}{v}=uvw+2$. Vasile Jiglău, Arad

L:726. Să se calculeze: $\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{x+n-1}}-2\sqrt{x+n-1}\right)\right]$, unde $x>1, n\in N^*$ (unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x).
Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a X-a

L:727. Să se calculeze, fără ajutorul tabelelor, expresia: $E=\lg^3 2+\lg5\lg^2 2+2\lg5\lg2+\lg^2 5$.
Petre Rău, Galați

L:728. a) Arătaţi că $\operatorname{Re}\frac{1+2019i}{1-2019i}=\operatorname{Im}\frac{2019+i}{1+2019i}$.

Demonstraţi că $\left[\frac{1+n^2}{4n}\left(\frac{1+ni}{1-ni}+\frac{n+i}{1+ni}\cdot i\right)\right]^{2019}=-i;\ \forall n\in N^*$. Ciobîcă Constantin, Fălticeni

L:729. Dacă $a,b\in(0;1)$ cu $a^3+b^3=1$ atunci să se arate că $(a+b)\cdot e^{\sqrt{a+b}}\le a\cdot e^{\frac{1}{a}}+b\cdot e^{\frac{1}{b}}$

Florică Anastase, Lehliu Gară

L:730. Rezolvați ecuația $10^{-2}\cdot x^{\lg x}+\lg^2 x=x+\lg x+2$ în $\mathbb{R}^*$. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

L:731. Determinați $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ știind că $x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ge 2\sqrt{3y}-y-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Livia Stan, Buzău

L:732. Să se demonstreze că orice triunghi de arie egală cu S, unde S verifică ecuația $\sqrt[4]{3-x}+\sqrt[4]{x-1}=2$ are raza cercului înscris în triunghi mai mică sau egală cu $\frac{2}{\sqrt[4]{108}}$.

Emil C.Popa, Radu Diaconu, Sibiu

L:733. Fie $B=1!!\cdot 2!!\cdot 3!!\cdot\ldots\cdot 1944!!\cdot 1945!!$. Arătați că B nu este pătrat perfect. Poate fi scos un număr k!! din B astfel încât numărul rămas să fie pătrat perfect ?

Lucian Tuțescu, Cristina Ene, Craiova

L:734. Să se arate că $S=\sqrt{C_{2020}^0\cdot C_{2020}^1}+\sqrt{C_{2020}^1\cdot C_{2020}^2}+\ldots+\sqrt{C_{2020}^{2019}\cdot C_{2020}^{2020}}\ \langle\ 2^{2020}-1$.

Adrian Stan, Buzău

L:735. Rezolvați ecuația: $arctg\frac{1-x}{1+x}=44^0$. Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

L:736. Fie $a\ge 0$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=ax^5+(1-5a)x+4a+6$. Marin Chirciu, Pitești

L:737. Să se rezolve în Z ecuaţia: $(2n+3)3^n=2^{2n+2}-1$. Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:738. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{1+4^{\sin x}}\ge\frac{\cos x}{2}+\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

L:739. Să se arate că într-un triunghi ABC în care p = 2R, are loc inegalitatea :
$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\rangle 9\cdot\sqrt[3]{2}\cdot r$, notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.

Alin Pop, Radu Diaconu, Sibiu

L:739. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi cu aria S, atunci să se demonstreze că

$\left(\sum\frac{a^3}{a+b}\right)\left(\sum\frac{a^3}{a+3b}\right)\ge 6S^2$. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

▪ Clasa a XI-a

L:740. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} e^{\ln x} & \ln x\\ \sqrt{x} & \frac{1}{x}\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Să se calculeze suma $A(1)+A(2)+A(2^2)+\ldots+A(2^{10})$;

b) Să se calculeze $\det\left[A(1)^{2020}\cdot A(2)^{2020}\right]$. Livia Stan, Buzău

L:741. Se consideră matricea $M_n(x)=\begin{pmatrix}1+nx & nx\\ -nx & 1-nx\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.

a. Arătaţi că $\det(M_{2019}(0))=1$.

b. Demonstraţi că $M_n(x)\cdot M_n(y)=M_n(x+y)$, unde $x,y\in R; n\in N^*$.

c. Determinaţi matricea $M_1(0)+M_2(0)+...+M_{2019}(0)$.

d. Demonstraţi că $M_n(x)\cdot M_m(x)=M_{n+m}(x)$, unde $x\in R; n,m\in N^*$.

e. Demonstraţi că $M_1(0)\cdot M_2(0)\cdot...\cdot M_{2019}(0)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

f. Arătaţi că $M_n(x)+M_n(-x)=2M_n(0)$, unde $x\in R, n\in N^*$.

g. Determinaţi numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea: $M_n(\sqrt{x})\cdot M_n(\sqrt{x+2})=M_n(2), \forall n\in N^*$. Ciobîcă Constantin;Ciobîcă Elena, Fălticeni

L:742. Să se rezolve în $\mathbf{N}^*$, ecuația: $(n+1)cos^{2n}\frac{\pi}{n}+(n+1)cos^{2n}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2^n}$

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:743. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x+\sin^2 x)^2-1}{\sin^2 x+4\sin x}$. Adrian Stan, Buzău

L:744. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det[(I_2-B)\cdot A+(A-I_2)\cdot B]=\det(A-B)$. Să se arate că $(A-B)^n=O_2$, $n\in\mathbb{N}^*$. Florică Anastase, Lehliu Gară

L:745. Fie $a_1,a_2,...,a_n>0$ astfel încât $a_1a_2...a_n=1$ și $\lambda\geq\frac{1}{2}$. Arătați că

$\frac{1}{\lambda+a_1}+\frac{1}{\lambda+a_2}+...+\frac{1}{\lambda+a_n}\leq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\lambda+1}$. Marin Chirciu, Pitești

L:746. Fie $n\geq 2$. Determinați imaginea funcției

$f(x)=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-2\operatorname{ctg}x+n-1}{\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{ctg}x+n+1}$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. Marin Chirciu, Pitești

L:747. Arătaţi că dacă $M\in M_2(C)$ astfel încât ecuaţia $\det(M-\lambda I_2)=0$ are în mulţimea numerelor complexe C două soluţii distincte, şi X_i sunt soluţiile ecuaţiei $X^2=M$ atunci $\sum\limits_i X_i^n=O_2$, $\forall\ n=impar$. Gabriel Tica, Dolj și Neculai Stanciu, Buzău

L:748. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x\cdot 7^{\frac{7(1-x)}{6}}=1$. Constantina Prunaru, Luiza Cremeneanu, Craiova

L:749. Să se calculeze $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(7x+\sqrt{x^2+1})^n+(7x-\sqrt{x^2+1})^n}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Alina Tigae, Ileana Duma, Craiova

L:750. Fie funcţia f : [a,b] $\to\mathbb{R}_+^*$ continuă, cu 0 < a < b şi f(a) ≠ f(b). Să se arate că pentru orice k, l, m, n∈N, $\exists c\in(a,b)$ astfel încât: $\frac{f^k(c)-f^k(a)}{f^l(b)-f^l(a)}=\frac{b^m-c^m}{b^n-a^n}$. Gheorghe Ghiță, Buzău

L:751. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir monoton, astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a_n>0$. Notăm $s_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Dacă șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent, demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot\sqrt{n})=0$. Luminița Petrișan, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:752. Se consideră mulţimea $G=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\cdot x & \sqrt{2}\cdot x\\ -\sqrt{2}\cdot x & 1-\sqrt{2}\cdot x\end{pmatrix}/\,x\in R\right\}$.

Să se arate că mulţimea G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(R)$.

Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Arătaţi că funcţia $f:R\to G,\ f(x)=M(x)$ este morfism de grupuri (de la grupul $(R,+)$ la grupul $(G,\cdot)$)

Arătaţi că $f(0)=I_2$, unde f este funcţia de la punctul c.

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni

L:753. Să se arate că în orice triunghi ABC în care $A, B, C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\le 2\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:754. Fie numărul natural $n\ge 2$ și mulțimea $G_n=\left\{A=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\middle|\,x,y\in C^*, A^n=I_2\right\}\subset M_2(C^*)$

Să se arate că $(G_n,\cdot)$ este grup comutativ. Aflați numărul elementelor grupului G_n.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:755. Să se demonstreze egalitatea: $\sqrt[3]{2\sin\frac{\pi}{18}}+\sqrt[3]{2\sin\frac{5\pi}{18}}-\sqrt[3]{2\sin\frac{7\pi}{18}}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}-6}$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:756. Să se calculeze $\int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\ln\cos x\right)dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Adrian Stan, Buzău

L:757. Să se calculeze $\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-2x+3}dx$. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:758. Să se calculeze $\int_a^b\frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx$, $a,b,c\in\mathbb{R},c>0$. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:759. Calculați: $\int_1^e\frac{e^x(1+\ln x-x\ln x)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx$. Marin Chirciu, Pitești

L:760. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[(a+1)n^2]{\frac{(a+1)(k+n)-a}{(a+1)n}}\right)^{(a+1)(k+n)-a}$, unde $a\in\mathbb{N}^*$.

Gabriel Tica, Dolj şi Neculai Stanciu, Buzău

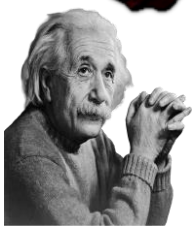
L:761. Să se calculeze $\int_a^{\frac{2}{a}}\frac{x\ln x}{(x^2+2x+2)^2}dx,\ a\rangle 0$. Gheorghe Ghiță, Buzău

L:762. Se consideră funcția $f:(0;1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\arcsin x-\ln x}{x^2}$.

a) Determinaţi primitiva **F** a funcţiei **f** pentru care $F(\frac{1}{2})=2-\frac{\pi}{2}$. b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\nearrow 1}F(x)\langle 4-\frac{\pi}{2}$.

c) Calculaţi $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^3\cdot(f(x)+\frac{\ln x}{x^2})dx$. Radu Diaconu, Sibiu

„ Science can flourish only
in an atmosphere of free speech”.
Albert Einstein
(1879-1955)



6. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 31, 2020.

PROPOSALS – QUICKIES

Q55. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Let $a \in R$, $f : R \to R$, be a strictly increasing function and $g : R \to R$ be a function which satisfy

$f(g(x+a)) \le f(x) \le f(g(x)+a)$ for any $x \in R$, then compute $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)dx$.

Q56. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $(a_n)_{n\ge1}$ be a positive real sequence such that $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n} = a \in R_+^*$. Evaluate the following limits:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\sqrt[n^2]{\frac{(n!)^n}{b}}$, where $b \in R_+^*$; b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$.

Q57. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
If ABC is a triangle, then prove the inequality

$$\frac{\sin^6 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^6 B}{\sin^2 C}+\frac{\sin^6 C}{\sin^2 A} \ge \frac{\left(s^2-4Rr-r^2\right)^3}{8s^2R^4}.$$

Q58. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If ABC is a triangle, then prove the inequality $\frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b} \ge 4$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q50. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $(a_n)_{n\ge1}$ be a positive real sequence sequence such that $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n} = a \in R_+^*$. Find $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{a_k}}$.

$$=\frac{\left(\sqrt{ab}\right)^t\left(\sqrt{bc}\right)^t+\left(\sqrt{bc}\right)^t\left(\sqrt{cd}\right)^t+\left(\sqrt{cd}\right)^t\left(\sqrt{da}\right)^t+\left(\sqrt{da}\right)^t\left(\sqrt{ab}\right)^t}{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^t}, (1).$$

From Jensen's inequality for $t\ge 2$ we have

$$\left(\sqrt{ab}\right)^t+\left(\sqrt{cd}\right)^t\ge 2\left(\sqrt{\frac{ab+cd}{2}}\right)^t=2^{\frac{2-t}{2}}(ab+cd)^{\frac{t}{2}}=2^{\frac{2-t}{2}}x_2^{\frac{t}{2}}, (2),$$

and similarly

$$\left(\sqrt{bc}\right)^t+\left(\sqrt{da}\right)^t\ge 2^{\frac{2-t}{2}}x_1^{\frac{t}{2}}, (3).$$

From (1), (2) and (3) we onbtain the desired inequality.

Q53. Proposed by Mihály Bencze, Bucharest, Romania.
If a,b,c are positive real numbers, then prove the following inequalities

(i) $\sum a^2b^2\left(\sum a^2+\sum ab\right)\ge 18a^2b^2c^2$; (ii) If $abc\ge 1$, then $\sum\frac{1}{a^2b+bc^2+2}\le\frac{3}{4}$.

Solution by Gheorghiţă Robert, Buzău, Romania. (i) By AM-GM inequality, we obtain $\sum a^2b^2\ge 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$, and $\sum a^2+\sum ab\ge 6\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, which by multiplying yields (i), q.e.d.

(ii) By AM-GM inequality, we have $a^2b+bc^2+2\ge 2abc+2\ge 4$.

So, $\sum\frac{1}{a^2b+bc^2+2}\le\sum\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, q.e.d.

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Q54. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Prove that in any triangle ΔABC holds

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\le\sqrt{\frac{6R}{r}}.$$

Solution by Gheorghiţă Robert, Buzău, Romania. By CBS inequality we obtain:

$$\left(\sum\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2=\left(\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}\right)^2=\left(\sum\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}}\right)^2\le\sum bc\sum\frac{1}{p(p-a)}=$$

$=\left(p^2+r^2+4Rr\right)\cdot\frac{4R+r}{rp^2}\le\frac{6R}{r}\Leftrightarrow p^2(2R-r)\ge r(4R+r)^2$, and by the inequality of Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$ it remains to show that

$\left(16Rr-5r^2\right)(2R-r)\ge r(4R+r)^2\Leftrightarrow 8R^2-17Rr+2r^2\ge 0\Leftrightarrow(R-2r)(8R-r)\ge 0$, true by $R\ge 2r$ (the inequality of Euler).

The equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Also solved by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Solution by author. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{a_k}}\overset{Cesaro-Stolz}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{k}{\sqrt[k]{a_k}}-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{a_k}}}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{a_n}}\overset{Cauchy-D'Alembert}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{e}{a}.$$

Also solved by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Q51. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1+\ln x)\sin x-x\cos x\ln x}{\sin^2 x+x^2\ln^2 x}dx.$

Solution by author. We have

$$\frac{(1+\ln x)\sin x-x\cos x\ln x}{\sin^2 x+x^2\ln^2 x}=\frac{(\cos x+\ln x+1)(\sin x-x\ln x)}{2\sin^2 x+2x^2\ln^2 x}-\frac{(\cos x+\ln x+1)(\sin x+x\ln x)}{2\sin^2 x+2x^2\ln^2 x}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin x+x\ln x}{\sin x-x\ln x}\right)'}{1+\left(\frac{\sin x+x\ln x}{\sin x-x\ln x}\right)^2}.\quad \text{Hence, } \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1+\ln x)\sin x-x\cos x\ln x}{\sin^2 x+x^2\ln^2 x}dx=\left(\arctan\frac{\sin x+x\ln x}{\sin x-x\ln x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\ln\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\ln\frac{\pi}{3}}-\arctan\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{4}}=\arctan\frac{3\sqrt{3}+2\pi\ln\frac{\pi}{3}}{3\sqrt{3}-2\pi\ln\frac{\pi}{3}}-\arctan\frac{2\sqrt{2}+\pi\ln\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}-\pi\ln\frac{\pi}{4}}.$$

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Gheorghiţă Robert, Buzău, Romania.

Q52. Proposed by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

If $ABCD$ is a bicentric quadrilateral, then prove that

$$\sum_{cyc}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^t\ge 2^{2-t}\text{, for } t\ge 2 \text{ and reverse for } t<2.$$

Solution by author. We denote $x_1=ad+bc, x_2=ab+cd$.

We use well-known

$$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{bc}{x_1}},\ \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{ad}{x_1}},\ \sin\frac{B}{2}=\cos\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{cd}{x_2}},$$

$$\sin\frac{D}{2}=\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{ab}{x_2}}.$$

We obtain that

$$\sum_{cyc}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^t=\frac{\left(\sqrt{ab^2c}\right)^t+\left(\sqrt{bc^2d}\right)^t+\left(\sqrt{cd^2a}\right)^t+\left(\sqrt{da^2b}\right)^t}{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^t}=$$

„Cea mai mare artă a unu profesor este câștigarea și menținerea atenției elevului ”.

John Locke
(1632-1707)

7. Caleidoscop matematic

Două mii nouăsprezece
Bencze Mihály, Brașov şi Kovács Béla, Satu Mare
(II)

Suma pătretelor a cinci numere naturale: $2019 = 13^2 + 15^2 + 20^2 + 21^2 + 28^2$

$2019 = 15^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 24^2$

Diferența a două pătrate: $2019 = 1010^2 - 1009^2$

$2019 = 338^2 - 335^2$

Suma puterilor a patru numere prime: $2019 = 2^{10} + 3^3 + 5^4 + 7^3$

Suma puterilor a patra: $2019 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4$

Cu ajutorul puterilor numărului 2: $2019 = 2^{11} - 2^5 + 2^2 - 2^0$

$2019 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2 + 2^0$

$2019 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 + 2^0$

Scriere cu alte puteri: $2019 = 3^7 - 3^4 - 3^4 - 3^2 + 3$

$2019 = 4^5 + 4^5 - 4^2 - 4^2 + 4 - 4^0$

$2019 = 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^3 + 5^2 - 5 - 5^0$

Printre numere pitagorice: $2019 = \sqrt{1155^2 + 1656^2} = 3 \cdot \sqrt{385^2 + 552^2}$

Suma unor progresii aritmetice: $2019 = 671 + 673 + 675$

$2019 = 334 + 335 + 336 + 337 + 338 + 339$

Permutări, variații, factoriale:

$2019 = V_8^3 \cdot P_3 + V_3^1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3$ $\qquad 2019 = \frac{8! \cdot 3!}{5!} + \frac{3!}{2!}$

Numai cu două cifre: $2019 = \frac{8! \cdot 3!}{(8-3)!} + 3$

Numai cu factoriale: $2019 = \sqrt{10! + 9! + 8! + 7 \cdot 7! + 7! + 6 \cdot 6! - 5! - 5! - 4! - 3! - 3! - 2! - 1!}$

$2019 = 3 \cdot 6! - 5! - 4! + 2! + 1!$

Alte sisteme de numerație: $2019 = 1203_{12} = 1576_{11} = 2019_{10} = 2683_9 = 3743_8 = 5613_7 = 13203_6$

$2019 = 31034_5 = 133203_4 = 2202210_3 = 11.111.100.011_2$

Descompunere în factori în alte sisteme de numerații:

$2019 = 17 \cdot 126$ dacă baza de numerație este 11

$2019 = 49 \cdot 51$ dacă baza de numerație este 12

$2019 = 39 \cdot 71$ dacă baza de numerație este 13

Alte posibilități:

$2019 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 3028^2}{1 + 2 + 3 + \ldots 3028}$ $\qquad 2019 = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2019 \cdot 2020}\right) \cdot 2020$

$2019 = \dfrac{676^2 - 670^2}{4}$ $\qquad$ $2019 = \dfrac{677^3 + 669^3 - 675^3 - 671^3}{24}$

Scriere cu cuburi perfecte:

$20^3 + 25^3 + 42^3 - 10^3 - 15^3 - 32^3 = 30 \cdot 2019$

$16^3 + 24^3 + 47^3 - 2^3 - 10^3 - 33^3 = 42 \cdot 2019$

$28^3 + 33^3 + 48^3 - 2^3 - 7^3 - 22^3 = 78 \cdot 2019$

$40^3 + 41^3 + 42^3 - 6^3 - 7^3 - 8^3 = 102 \cdot 2019$

Scriere cu puterile a doua și a patra:

$2^2 + 8^2 + 10^2 + 16^2 + 23^2 + 24^2 + 26^2 + 31^2 + 33^2 + 47^2 + 49^2 + 57^2 = 6 \cdot 2019$

$2^4 + 8^4 + 10^4 + 16^4 + 23^4 + 24^4 + 26^4 + 31^4 + 33^4 + 47^4 + 49^4 + 57^4 = 6 \cdot 2019^2$

$2^2 + 5^2 + 7^2 + 15^2 + 20^2 + 22^2 + 28^2 + 33^2 + 35^2 + 48^2 + 50^2 + 55^2 = 6 \cdot 2019$

$2^4 + 5^4 + 7^4 + 15^4 + 20^4 + 22^4 + 28^4 + 33^4 + 35^4 + 48^4 + 50^4 + 55^4 = 6 \cdot 2019^2$

$3^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 12^2 + 15^2 + 34^2 + 38^2 + 41^2 + 46^2 + 49^2 + 53^2 = 6 \cdot 2019$

$3^4 + 4^4 + 7^4 + 8^4 + 12^4 + 15^4 + 34^4 + 38^4 + 41^4 + 46^4 + 49^4 + 53^4 = 6 \cdot 2019^2$

Numai pătrate perfecte:

$2019^2 = 2004^2 + 151^2 + 119^2 + 113^2 + 71^2 + 58^2 + 47^2$

$2019^2 = 1990^2 + 267^2 + 171^2 + 75^2 + 60^2 + 59^2 + 55^2$

$2019^2 = 1966^2 + 285^2 + 275^2 + 205^2 + 81^2 + 75^2 + 12^2$

$2019^2 = 1964^2 + 315^2 + 315^2 + 91^2 + 78^2 + 65^2 + 45^2$

$2019^2 = 1921^2 + 430^2 + 340^2 + 270^2 + 100^2 + 44^2 + 28^2$

$2019^2 = 1480^2 + 969^2 + 555^2 + 485^2 + 455^2 + 300^2 + 200^2 + 185^2 + 150^2 + 100^2$

$2019^2 = 1360^2 + 1311^2 + 433^2 + 360^2 + 280^2 + 241^2 + 153^2 + 126^2 + 119^2 + 32^2$

$2019^2 = 1344^2 + 815^2 + 740^2 + 600^2 + 555^2 + 455^2 + 370^2 + 175^2 + 100^2 + 75^2$

$2019^2 = 1200^2 + 977^2 + 782^2 + 575^2 + 552^2 + 425^2 + 408^2 + 240^2 + 167^2 + 49^2$

$2019^2 = 1104^2 + 991^2 + 850^2 + 600^2 + 575^2 + 408^2 + 391^2 + 336^2 + 167^2 + 47^2$

Puteri de ordin mai are: $2019^2 = 1155^2 + 1656^2$

$2019^3 = 671^3 + 673^3 + 675^3 + 3 \cdot 1344 \cdot 1346 \cdot 1348$

$2019^5 = 671^5 + 673^5 + 675^5 + 5 \cdot 1344 \cdot 1346 \cdot 1348 \cdot 2717578$

$2019^7 = 671^7 + 673^7 + 675^7 + 7 \cdot 1344 \cdot 1346 \cdot 1348 \cdot 8000658788059$

2019^{501} este un număr foarte mare, cea mai mică putere în care ultimele patru cifre sunt 2019

2019! este un număr uriaș în care ultimele 502 cifre sunt 0 .

În acest articol numărul 2019 apare de 87 ori.

Deşertul nesfârşit al zecimalelor lui Pi

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

În cele ce urmează vom calcula zecimalele lui Pi cu ajutorul motorului computational Wolfram Alpha dezvoltat de Wolfram Research.

- Perimetrul cercului cu diametrul egal cu unitatea este egal cu π.

1. Perimetrul poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul cu raza R este $p_n = 2nR\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Pentru $2R = 1$ obţinem $p_n = n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Pentru perimetrul unor poligoane regulate înscrise în cercul cu diametrul egal cu unitatea, am obţinut umătoarele valori:

$p_3 = 3\sin\frac{\pi}{3} = 2{,}598076211\ldots;$ $\quad p_4 = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2{,}828427124\ldots;$

$p_6 = 6\sin\frac{\pi}{6} = \mathbf{3};$ $\quad p_{57} = 57\sin\frac{\pi}{57} = \mathbf{3{,}14}0002340..;$

$p_{94} = 94\sin\frac{\pi}{94} = \mathbf{3{,}141}007838..;$ $\quad p_{2018} = 2018\sin\frac{\pi}{2018} = \mathbf{3{,}14159}1384\ldots$

În calculele efectuate mai sus am dat valori lui n în formula $p_n = n\sin\frac{\pi}{n} < \pi$ (deoarece $2R = 1$); dacă $n \to \infty$, atunci $p_n \to \pi$.

În cazul general i.e. $p_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$, dacă $n \to \infty$, atunci $p_n \to 2\pi R$ (clasa a XI-a).

2. Perimetrul poligonului regulat cu n laturi circumscris în cercul cu raza r este

$$P_n = 2nrtg\frac{\pi}{n}.$$

Pentru $2r = 1$ obţinem $P_n = ntg\frac{\pi}{n}$.

Pentru perimetrul unor poligoane regulate circumscrise în cercul cu diametrul egal cu unitatea, am obţinut umătoarele valori:

$$P_3 = 3tg\frac{\pi}{3} = 5{,}196152422\ldots;$$

$$P_4 = 4tg\frac{\pi}{4} = 4;$$

$$P_6 = 6tg\frac{\pi}{6} = \mathbf{3{,}}464101615\ldots;$$

$$P_{36} = 36tg\frac{\pi}{36} = \mathbf{3{,}14}9591886\ldots;$$

$$P_{160} = 160tg\frac{\pi}{160} = \mathbf{3{,}141}996443\ldots;$$

$$P_{2018} = 2018tg\frac{\pi}{2018} = \mathbf{3{,}14159}5191\ldots.$$

În rezultatele obţinute mai sus $2r = 1$, $P_n = ntg\frac{\pi}{n} > \pi$; dacă $n \to \infty$, atunci $P_n \to \pi$.

În cazul general i.e. $P_n = 2nrtg\frac{\pi}{n}$, dacă $n \to \infty$, atunci $P_n \to 2\pi r$.

- Aria cercului cu raza egală cu unitatea este egală cu π.

1. Aria poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul cu raza R este

$$\Delta_n = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Pentru $R = 1$ obţinem $\Delta_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

Pentru aria unor poligoane regulate înscrise în cercul cu raza egală cu unitatea, am obţinut umătoarele valori:

$$\Delta_3 = \frac{3}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = 1{,}299038105\ldots;$$

$$\Delta_4 = \frac{4}{2}\sin\frac{2\pi}{4} = 2;$$

$$\Delta_6 = \frac{6}{2}\sin\frac{2\pi}{6} = 2{,}598076211\ldots;$$

$$\Delta_{114} = \frac{114}{2}\sin\frac{2\pi}{114} = \mathbf{3{,}14}0002340\ldots;$$

$$\Delta_{187} = \frac{187}{2}\sin\frac{2\pi}{187} = \mathbf{3{,}141}001567\ldots;$$

$$\Delta_{2018} = \frac{2018}{2}\sin\frac{2\pi}{2018} = \mathbf{3{,}1415}87577\ldots$$

Mai sus am luat $R = 1$, deci $\Delta_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < \pi$; atunci, pentru $n \to \infty$ avem că $\Delta_n \to \pi$.

În cazul general i.e. $\Delta_n = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ dacă $n \to \infty$, atunci $\Delta_n \to \pi R^2$.

2. Aria poligonului regulat cu n laturi circumscris în cercul cu raza r este

$$A_n = nr^2 tg\frac{\pi}{n}.$$

Pentru $r = 1$ obţinem $A_n = ntg\frac{\pi}{n}$.

Pentru aria unor poligoane regulate circumscrise în cercul cu raza egală cu unitatea, am obţinut umătoarele valori:

$$A_3 = 3tg\frac{\pi}{3} = 5{,}196152422\ldots;$$

$$A_4 = 4tg\frac{\pi}{4} = 4;$$

$$A_6 = 6tg\frac{\pi}{6} = \mathbf{3{,}}464101615\ldots;$$

$$A_{36} = 36tg\frac{\pi}{36} = \mathbf{3{,}14}9591886\ldots;$$

$$A_{160} = 160tg\frac{\pi}{160} = \mathbf{3{,}141}996443\ldots;$$

$$A_{2018} = 2018tg\frac{\pi}{2018} = \mathbf{3{,}14159}5191\ldots$$

Rezultatele au fost obţinute pentru $r = 1$, $A_n = ntg\frac{\pi}{n} > \pi$ şi prin urmare pentru $n \to \infty$ rezultă că $A_n \to \pi$. În cazul general i.e. $A_n = nr^2 tg\frac{\pi}{n}$, dacă $n \to \infty$, atunci $A_n \to \pi r^2$.

Concluzie. Cele mai bune rezultate se obţin atunci când se calculează perimetrul poligoanelor regulate înscrise în cercul cu diametrul egal cu unitatea. În cazul poligoanelor circumscrise rezultatele pentru perimetru şi arie sunt identice.

„ Un om de succes este acela care poate construi o fundație solidă cu cărămizile pe care alții le aruncă în el”.

David Charles Brink
(n.1939-)

8. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 24** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 25** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **31 MARTIE 2020**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

ELEVI REZOLVITORI

Şcoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scornicești, Olt
Clasa a VIII-a: . Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Prof. Iuliana Trașcă**

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a X-a: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**

Şcoala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeș:
Clasa a V-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;

Şcoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova
Clasa a VII-a: Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Nițoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a IX-a: Găvăneanu Adriana, Berechet Ștefan**; Clasa a X-a :** Știrbu Cătălin; **Clasa a XI-a:** Catinca Teodora; **Clasa a XII-a:** Vizitiu Anamaria, Coman Andrei, Roșioru Ionuț**; Prof. Adrian Stan.**

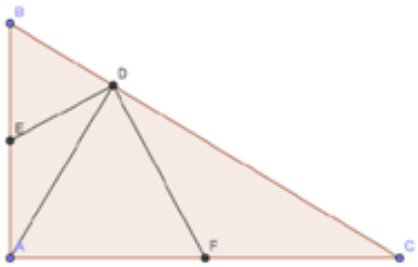
Scoala Gimnazială Smeni:
Clasa a V-a: Ion Alexandru, Militaru Clara, Toma Miruna, Țigănuș David, Nițu Mădălin, Mînzu Alexandru, Poșircă Izabela, Rusu Maria; **Clasa a VI-a:** Anghel Marius, Borchin Jana, Ivan Ana, Andrei Diana, Rusu Sebian, Fotea Denis, Bălan Carla, Crăciun Ilie; **Clasa a VII-a**: Andreescu Mario, Filip Marius, Bănică David, Teodorescu Sebastian, Petre Gabriel, Cristea Tandra; **Clasa a VIII-a:** Cucuvea Rareș, Drăghici Claudiu, Ghiță Georgian, Zamfir Bianca, Neacșu Alexandra, Neagu Georginel, Ciolacu Cristina, Borchin Vlad, Sandu Robert. **Prof. Ion Stănescu**

Inscripting inscriptible quadrilateral

by **Daniel Văcaru**, Pitești

Let ABC a right triangle, $D \in (BC)$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Given E and F, in what circumstances the quadrilateral AFDE is inscriptible?

The aim of this note is to study this configuration. This will followed by some construction(s).



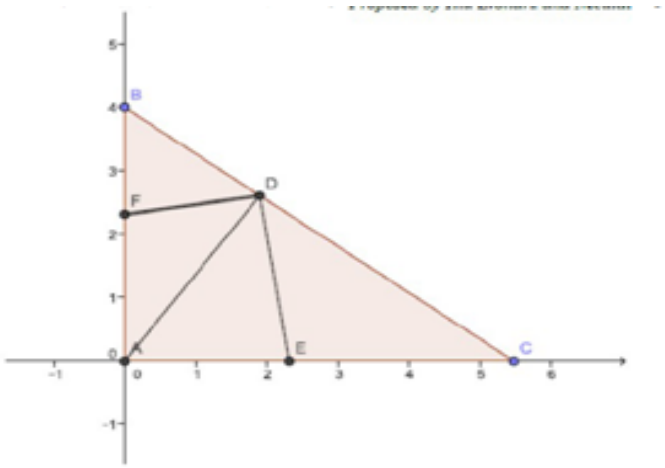
A) a) Consider ABC a right $\left(m(A)=90^0\right)$ triangle, $D = pr_{BC}A$ and let E and F midpoints of $[AB]$, respectively $[AC]$. Triangles DBA and CDA are right triangles; one obtain $DE = \frac{AB}{2}$ and $DF = \frac{AC}{2}$. One has $EF = \frac{BC}{2}$, $EF \parallel BC$ (EF is the medium line, relatively at $[BC]$) . One obtain that DEF is a right triangle, with $EF^2 = \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = DE^2 + DF^2$.

If one presume that ABC is a (scalene) triangle, $D = pr_{BC}A$ and, as before, e and F are midpoints of $[AB]$and $[AC]$, respectively, and DEF ia a right triangle, with $m(EDF) = 90^0$, one obtain that $BC^2 = AB^2 + AC^2$, showing that BAC is a right $\left(m(A)=90^0\right)$ triangle.

B) As an another situaţion, on has

Problem S338. Let ABC a triangle with $\sphericalangle A$ being the largest angle. Let D,E and F be points on sides BC, CA and AB such that AD is the altitude from A, DE is the internal angle bisector of $\sphericalangle ADC$ and DF is the internal angle bisector of $\sphericalangle ADB$. If AE=AF, prove that ABC is isosceles or right.

This problem is proposed by two regulars proposer in Crux, namely Titu Zvonaru and Neculai Stanciu (1).



By bisector theorem, one has

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} = \tan C \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \tan\frac{C}{\tan C + 1} \Rightarrow AE = \frac{2R\sin B\tan C}{\tan C + 1} \quad (1)$$

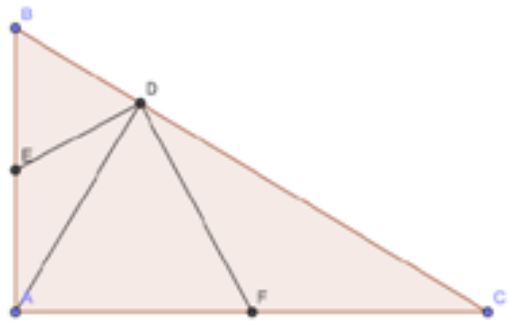
Again by bisector theorem, one has

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{DB} = \tan B \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \tan\frac{B}{\tan B + 1} \Rightarrow AF = \frac{2R\sin C\tan B}{\tan B + 1}.$$

One has the equivalence

$AE = AF \Leftrightarrow \dfrac{\sin B \tan C}{\tan C + 1} = \dfrac{\sin C \tan B}{\tan B + 1}$. Eventually, one obtain $\dfrac{\sin B \cdot \sin C}{\sin C + \cos C} = \dfrac{\sin C \sin B}{\cos B + \sin B} \Leftrightarrow$ $\sin C + \cos C = \sin B + \cos B,$ which is equivalent to „ ABC isosceles or right". It is clear that $m(EDF) = 90^0$.

C) Let try some reciprocal afirmation. Consider that BAC is a right triangle in A, and consider $D \in (BC)$, E and F midpoints of $[AB]$, respectively $[AC]$. One presume that EDF is right triangle, with $m(EDF) = 90^0$.



a) Then $DE^2 + DF^2 = EF^2$ (2).
One obtain $4 \cdot DE^2 + 4 \cdot DF^2 = 4 \cdot EF^2 \Rightarrow$
$\left[2 \cdot \left(DB^2 + DA^2\right) - AB^2\right] + \left[2 \cdot \left(DC^2 + DA^2\right) - AC^2\right] = BC^2 \Rightarrow$
$2DB^2 + 2DC^2 + 4DA^2 = 2BC^2 \Rightarrow DB^2 + DC^2 + 2DA^2 = BC^2$ (2).
But $DB^2 + DA^2 = AB^2 + 2DB \cdot DA \cdot \cos ADB$ and $DC^2 + DA^2 = AC^2 + 2DC \cdot DA \cdot \cos ADC$.
One obtain $DB^2 + DC^2 + 2DA^2 = BC^2 + 2DA \cdot (DB \cdot \cos ADB + DC \cos ADC)$. But $\cos ADB + \cos ADC = 0$,(2) implies then that DB=DC. It follows that D is midpoint of $[BC]$.

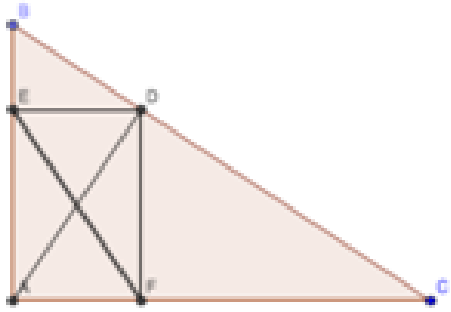
b) Analitically, if A(0;0), B(0;b), C(c;0), then $BC: \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{b} = 1$. One put equation $DE^2 + DF^2 = EF^2$ (2), after one write $D(x;y), E(0;\dfrac{b}{2}), F(\dfrac{c}{2};0)$ in the form

$$\left[(x-0)^2 + (y - \frac{b}{2})^2\right] + \left[(x - \frac{c}{2})^2 + (y-0)^2\right] = \frac{b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - cx - by = 0.$$

If $D(\underbrace{\frac{c}{2}}_{x^2_p}, \underbrace{\frac{b}{2}}_{x^2_p})$ then is clear that $\dfrac{\frac{c}{2}}{c} + \dfrac{\frac{b}{2}}{b} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 \Rightarrow D \in BC$ and

$2(\frac{c}{2})^2 + 2(\frac{b}{2})^2 - c \cdot (\frac{c}{2}) - b \cdot (\frac{b}{2}) = 2 \cdot \frac{c^2}{4} + 2 \cdot \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} = 0$ showing that D verify equation (2). As an exercise, you can put equation (2) in a closer form (substituting x in function of y or viceversa) showing that solution $D(\frac{c}{2}, \frac{b}{2})$ is unique.

D) As for the case of altitude(s), let again $D = pr_{BC}A$ and $E \overset{not}{=} pr_{AB}D$ and $F \overset{not}{=} pr_{AC}D$. If $m(EDF) = 90^0$, then one has AD=EF.



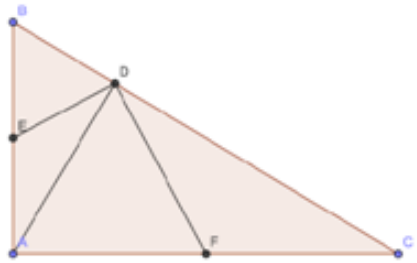
Clearly, $ED \| AC$ and $DF \| AB$. Then EDFA is a parallelogram and $m(EAF) = m(BAC) = 90^0$. Then EDFA is rectangle, and AD=EF.

Reciprocally, if $D = pr_{BC}A$, $E \overset{not}{=} pr_{AB}D$ and $F \overset{not}{=} pr_{AC}D$, AD=EF and $m(EDF) = 90^0$, then $DE^2 + DF^2 = EF^2 \Leftrightarrow DE^2 + DF^2 = AD^2$.

This last relation could be written as $AD^2 - DE^2 = DF^2 \Rightarrow AE^2 = DF^2 \Rightarrow AE = DF$ and

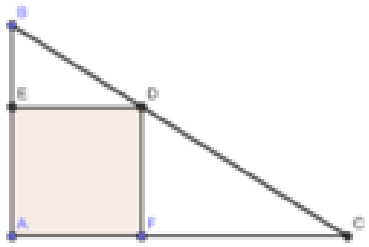
$AD^2 - DF^2 = DE^2 \Rightarrow AF^2 = DE^2 \Rightarrow AF = DE$.

Then again, AFDE is a parallelogram with congruent diagonals, proving that is a rectangle. One obtain that $m(EAF) = m(BAC) = 90^0$, as desired.



E) Now, one consider triangle DEF isosceles, where $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ and determine, with straithedge and compass, position of D.

Again, triangle ABC is right. Now one has DE=DF.



E1)

Suppose that $E = pr_{AB}D$ and $F = pr_{AC}D$. Then $2 \cdot S_{ADB} = DE \cdot AB$ and $2 \cdot S_{DAC} = DF \cdot AC$ and $2 \cdot S_{ABC} = AB \cdot AC = 2S_{DAB} + 2S_{DAC} \Rightarrow AB \cdot AC = DE \cdot AB + DF \cdot AC \Rightarrow DE = DF = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$.

One must construct $D \in (BC)$ such that $DE = DF = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$. One obtain

$$\frac{DE}{DB} = \cos B = \frac{AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} \Rightarrow DB = \frac{DE \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2}}{AC} = \frac{AB}{AB + AC} \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

To obtain lengh of DB, one can proceed in this manner:

At first, on right AB, and opposite direction AB, construct AF (with compass) such that AF=AC. Now, one can construct FM, such that FM=BC. Consider triangle BFM and consider $N = AC \cap BM$. Then one has similar triangles BAN and BFM. Then $\frac{BA}{BF} = \frac{BA}{BA + AF} = \frac{AB}{AB + AC} = \frac{BN}{FM} = \frac{BN}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} \Rightarrow$

$$BN = \frac{AB}{AB + AC} \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

One can construct $D \in (BC)$ such that BD=BN. This concludes this construction.

E2) Consider now E and F midpoints of $[AB]$, respectively $[AC]$. . One has

$4 \cdot DE^2 = 2 \cdot (DB^2 + DA^2) - AB^2$ and $4 \cdot DF^2 = 2 \cdot (DC^2 + DA^2) - AC^2$.

One obtain $2DB^2 - AB^2 = 2 \cdot DC^2 - AC^2) = 2(DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2 \Rightarrow$

$DB - DC = \frac{AB^2 - AC^2}{2BC}$. On the other hand, one has $DB + DC = BC$.

Summing these relations, one has $2 \cdot DB = BC + \frac{AB^2 - AC^2}{2BC} = \frac{2BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC} = \frac{3AB^2 + AC^2}{2BC} \Rightarrow$

$$DB = \frac{BC^2 + 2AB^2}{4BC}.$$

It will be necessary to construct an right triangle with two legs, one BC, another of length $AB\sqrt{2}$.

Bibliography

1. Mathematicall Reflections, Problem S338.

CALENDAR 2019 – 2020

LUNA	SAPTAMANA								
	Sapt	L	M	M	J	V	S	D	ZILE IMPORTANTE
IANUARIE	-	30	31	1	2	3	4	5	1: Ziua Mondială a Păcii
	-	6	7	8	9	10	11	12	11: Ziua internațională a rezervațiilor naturale
	S16	13	14	15	16	17	18	19	15: Ziua Culturii Naționale
	S17	20	21	22	23	24	25	26	24: Mica Unire- Unirea Principatelor Române
	S18	27	28	29	30	31	1	2	30: Ziua internațională a nonviolenței în școli
FEBRUAR	S19	3	4	5	6	7	8	9	4: Ziua internațională de luptă împotriva cancerului
	S20	10	11	12	13	14	15	16	14: Sfântul Valentin
	S21	17	18	19	20	21	22	23	19: Ziua Brîncuși
	S22	24	25	26	27	28	29	1	24: Dragobetele
MARTIE	S23	2	3	4	5	6	7	8	8: Ziua internațională pentru drepturile femeii
	S24	9	10	11	12	13	14	15	14: Ziua internațională a numărului pi
	S25	16	17	18	19	20	21	22	20: Ziua internațională a Francofoniei
	S26	23	24	25	26	27	28	29	24: Ziua mondială de combatere a tuberculozei
APRILIE	S27	30	31	1	2	3	4	5	2: Ziua internaționalăa autismului
		6	7	8	9	10	11	12	7: Ziua Mondială a Sănătății
		13	14	15	16	17	18	19	18: Ziua europeană împotriva obezității
	S28	20	21	22	23	24	25	26	22: Ziua Mondială a Pământului
	S29	27	28	29	30	1	2	3	29: Ziua dansului
MAI	S30	4	5	6	7	8	9	10	4: Ziua Națională a Inimii
	S31	11	12	13	14	15	16	17	12. Ziua internațională a asistenței medicale
	S32	18	19	20	21	22	23	24	21: Ziua Mondială a Culturii
	S33	25	26	27	28	29	30	31	31: Ziua Mondială de luptă împotriva fumatului
IUNIE	S34	1	2	3	4	5	6	7	1: Ziua internațională a copilului
	S35	8	9	10	11	12	13	14	14: Ziua internațională a donatorului de sânge
	S36	15	16	17	18	19	20	21	20: Ziua internațională a refugiaților
	S37	22	23	24	25	26	27	28	24: Sânzienele
IULIE	S38	29	30	1	2	3	4	5	4: Ziua Crucii Roșii Române
	S39	6	7	8	9	10	11	12	11: Ziua Mondială a Populației
	S40	13	14	15	16	17	18	19	15: Ziua Mărcii Poștale Române
	S41	20	21	22	23	24	25	26	20: Ziua Mondială a Șahului
	S42	27	28	29	30	31	1	2	28: Ziua Mondială de luptă împotriva hepatitei
AUGUST		3	4	5	6	7	8	9	7: Ziua internațională a prieteniei
		10	11	12	13	14	15	16	12: Ziua internațională a tineretului
		17	18	19	20	21	22	23	15: Ziua Marinei Române
		24	25	26	27	28	29	30	31: Ziua Limbii Române
SEPTEMBRIE		31	1	2	3	4	5	6	1: Ziua Rezervației Biosferei Delta Dunării
		7	8	9	10	11	12	13	13. Ziua pompierilor din România
	S1	14	15	16	17	18	19	20	15: Ziua Internațională a democrației/ 16: Z. Europeană de prim ajutor
	S2	21	22	23	24	25	26	27	21: Ziua internațională a păcii/ 23: Z. M. a curățeniei
	S3	28	29	30	1	2	3	4	1: Ziua internațională a persoanelor în vârstă
OCTOMBRIE	S4	5	6	7	8	9	10	11	5: Ziua Mondială a Educației
	S5	12	13	14	15	16	17	18	15: Ziua mondială a mersului pe jos
	S6	19	20	21	22	23	24	25	24: Ziua Națiunilor Unite
	S7	26	27	28	29	30	31	1	31: Ziua internațională a Mării Negre
NOIEMBRIE	S8	2	3	4	5	6	7	8	3: Ziua mondială pentru protecția pădurii
	S9	9	10	11	12	13	14	15	13: Ziua internațională a nevăzătorilor
	S10	16	17	18	19	20	21	22	16: Ziua internațională pentru toleranță
	S11	23	24	25	26	27	28	29	25: Ziua internat. pentru eliminarea violentei împotriva femeilor
	S12	30	1	2	3	4	5	6	1: Ziua Națională a României/ 1: Ziua M. de luptă împotriva HIV
DECEMBRIE	S13	7	8	9	10	11	12	13	10: Ziua internațională a drepturilor omului
	S14	14	15	16	17	18	19	20	20: Ziua internațională a solidarității umane
	S15	21	22	23	24	25	26	27	25: Crăciunul
		28	29	30	31				29: Ziua internațională a bio-diversității

REVISTA SCLIPIREA MINŢII
NR. 24 ANUL XII - DECEMBRIE 2019

Cuprins

1. Istoria matematicii
Leonardo da Vinci de Adrian Stan 1

2. Articole şi note matematice
Asupra unei clase de integrale definite
de Florică Anastase 4

Asupra unei probleme date la ONM 2019
de Marin Chirciu..... 6

Primitive cu logaritmi
de Constantin și Elena Ciobîcă 7

O inegalitate în două variabile
de Dumitru Tudor, Titu Zvonaru 8

Again about the problem 12068 from ANM/2018
by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, Daniel Sitaru 10

Minimal and maximal bound for the sum a6+b6+c6
by Marius Drăgan si Neculai Stanciu 13

Inscripting inscriptibile quadrilateral
By Daniel Văcaru 57

3. Examene și concursuri..... 14

4. Probleme rezolvate 21

5 Probleme propuse 41

6. Quickies 49

7. Caleidoscop matematic 52

8. Poşta redacţiei 56

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 12 RON