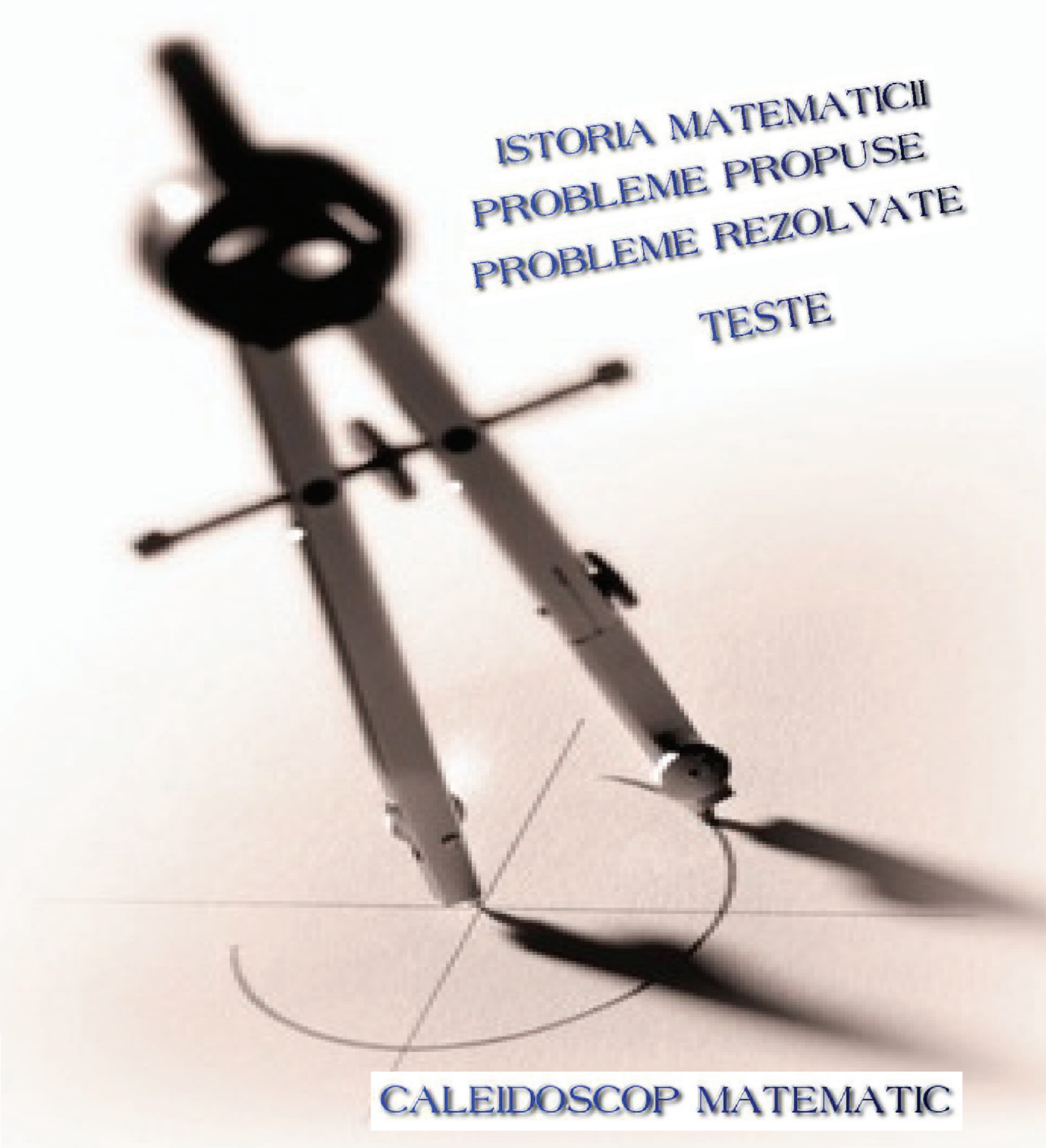
SCLIPIREA MINȚII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN VI, NR XII, 2013

SM



ISTORIA MATEMATICII

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME REZOLVATE

TESTE

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiințe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIȚESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

Sclipirea Minții 12

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An VI, Nr. XII, NOIEMBRIE 2013, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

• Membrii onorifici:

Constantin Apostol - Președinte de onoare

Constantin Rusu - Președinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Științe Matematice

Costică Ambrinoc - Președinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Științe Matematice

Lenuța Pîrlog - Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice

D. M . Bătinețu - Giurgiu **Titu Zvonaru**

Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

• Director:

Neculai Stanciu

• Redactor şef:

Adrian Stan

• Redactori principali:

Constantin Dinu **Ana Panaitescu**

Andrei Octavian Dobre **Iuliana Trașcă**

Gabriel Tica **Ion Stănescu** **Lăcrimioara Năstase**

• Membri :

Maria **Anton**, Mirela **Axente**, Jose Luis Diaz – **Barrero**, Liviu **Bordianu**, Nicoleta **Bran**, Dana **Camelia**, Ovidiu **Cioponea**, Ana **Cismaru**, Nicoleta **Clinciu**, Ciprian **Cheşcă**, Marcel **Chiriță**, Aurel **Chiriță**, Nela **Ciceu**, Ileana **Didu**, Camelia **Dana**, Gheorghe **Dârstaru**, Marius **Drăgan**, Otilia **Drăgan**, Jamel **Ghanouchi**, **Gheorghe Ghiță**, Cornelia **Gurău**, Ionuț **Ivănescu**, Cornelia Mihaela **Luca**, Ion **Lupşan**, Cristian Cosmin **Lupşan**, Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Gabriela **Marinescu**, Mariana **Mărculescu**, Mariana **Mitea**, Ion **Nedelcu**, Delia **Naidin**, Andrei **Nicolaescu**, Dumitru **Panțuru**, Valerica **Pometescu**, Claudia **Popa**, Florentina **Popescu**, Petre **Păunescu**, Ramona **Puchiu**, Dumitru **Săvulescu**, Roxana **Stanciu**, Babis **Stergiou**, Liviu **Smarandache**, Andrei **Spătaru**, Florin **Stănescu**, Ligia **Struțu**, Gheorghe **Struțu**, Doina **Stoica**, Mircea Mario **Stoica**, **George Florin Şerban**, Daniela **Ticea**, Ionel **Tudor**, Lucian **Tuțescu**, Ovidiu **Țâțan**, Marioara **Vrabie**, Daniel **Văcaru**

CUPRINS

REDACȚIA

Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”, Buzău , Strada Transilvaniei, Nr. 134, Cod. 120012, Tel. 0238725206

e-mail: ady_stan2005@yahoo.com

Coordonator: Adrian Stan

„Cel mai sigur zid de apărare este mintea”
Antisthenes

1. Istoria Matematicii

ISTORIA UNEI INEGALITĂȚI

de prof. Dumitru M. Bătinețu – Giurgiu, Neculai Stanciu

În [1] s-a demonstrat că: ***Ion Ionescu*** a publicat cu 22 de ani înaintea lui ***Roland Weitzenböck*** inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. În Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 2 , Octombrie 1897, la pagina 52, ***Ion Ionescu***, fondatorul Gazetei Matematice, a publicat problema:

****273. Să se arate că nu există nici un triunghiu pentru care inegalitatea:***
$4S\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2$ ***să fie satisfăcută.*** **(I. IONESCU.)**

Soluția problemei 273, apare în Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 12, August 1898, la paginile 281, 282 şi 283, şi anume:

- *Soluția 1* dată de D-l *N. G. Muzicescu* (Student, Iaşi).
- *Soluția 2* dată de D-nii: *I. Moscuna* (Bucureşti) şi *I. Penescu* (Bucureşti).
- *Soluția 3* dată de D-ra *Maria Rugescu* (Studentă, Iaşi) şi de D-nii: *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul Vîlcea); *G. G. Urechiă* şi *I. Sichitiu* (Sc. Sp. De Art. şi Geniu) şi *Corneliu P. Ionescu* (Elev Clasa a VI-a, Liceu Galați).
- Au mai rezolvat această problemă pe alte căi şi D-nii: *A. Iliovici*, *I. Nicolaescu*, *Emil G. Nițescu*, *V. V. Cambureanu* şi *C. Vintilă*.

În anul 1919, ***Roland Weitzenböck*** a publicat în Mathematische Zeitschrift, Vol. 5, Nr. 1-2, pp. 137-146 articolul *Uber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*, în care demonstrează că: “*În orice triunghi ABC, cu notațiile obişnuite, are loc inegalitatea:* $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ “ ***(W)***

Observăm că inegalitatea lui *Ion Ionescu* este aceeaşi cu inegalitatea lui *Weitzenböck*, şi de aceea inegalitatea *Weitzenböck* (W) se numeşte inegalitatea ***Ionescu-Weitzenböck*** (I-W).

Inegalitatea ***Ionescu – Weitzenböck***, la a *III-a O.I.M., Veszprém, Ungaria, 8-15 iulie 1961* a fost dată spre rezolvare concurenților.

În legătură cu inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck* există în literatura de specialitate alte două inegalități celebre, şi anume:

Inegalitatea *Hadwiger-Finsler*: $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

Inegalitatea *Neuberg-Pedoe*: pentru un al doilea triunghi de arie T şi laturile de lungimi x, y, z avem: $a^2(y^2+z^2-x^2)+b^2(z^2+x^2-y^2)+c^2(x^2+y^2-z^2) \geq 16ST$, cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiurile sunt asemenea.

La a XX-a O.I.M., Bucureşti, România în 1978 a fost propusă comisiei O.I.M. de către Cehoslovacia problema: ''Fie T_1 un triunghi de laturi a, b, c şi arie P, iar T alt triunghi de laturi u, v, w şi arie Q.

Să se demonstreze că: $a^2\left(-u^2+v^2+w^2\right)+b^2\left(u^2-v^2+w^2\right)+c^2\left(u^2+v^2-w^2\right) \geq 16PQ$''.

Observăm că problema este de fapt inegalitatea *Neuberg–Pedoe.*

Un număr de 11 demonstrații ale inegalității (I-W) au fost prezentate de *Arthur Engel* în cartea *Problem solving strategies*, Springer Verlag, 1998.

Alte *23 de demonstrații* noi (vezi [1]) şi 10 *generalizări* inedite (vezi [2]) au fost publicate în acest an (2013) iar alte aplicații ale inegalității (I-W) au fost făcute de autori în mai multe lucrări tipărite.

Remarcă. Descoperirea din titlu a fost făcută de autorii articolului după 117 ani de la publicarea sa în Gazeta Matematică.

Bibliografie:

1. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Inegalități de tip Ionescu- Weitzenböck*, Gazeta Matematică-seria B, Nr. 1, 2013, pp. 1-10.**
2. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Some generalizations of Ionescu-Weitzenböck's inequality*, Journal of Science and Arts – Year 13, No. 1(22), pp. 27-32, 2013.**

„Greu nu e să ai dreptate, greu e să convingi pe alții.
Nu întotdeauna e greu ci numai când ai dreptate.
Şi mai ales e greu să convingi pe cei care spun că s-au convins.
Grigore C. Moisil

2. Articole si note matematice

Probleme legate de reprezentarea suprafeței unui triunghi

de prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În această lucrare se exprimă aria suprafeței unui triunghi în funcție de ariile suprafețelor triunghiurilor asociate laturilor sale, se obțin identități trigonometrice cărora li se precizează interpretarea geometrică şi se deduc inegalități trigonometrice. Astfel se consideră un triunghi ABC şi un punct K din planul său. Introducem următoarele notații: $S = A(\Delta ABC)$, $S_a(K) = A(\Delta BKC)$, $S_b(K) = A(\Delta AKC)$, $S_c(K) = A(\Delta BKA)$, $\angle A' =$ unghiul opus la vârf unghiului A. Avem în mod evident următoarele relații: R_1: $S_a(K) + S_b(K) + S_c(K) = S$, dacă $K \in [ABC]$;
R_2: $S_a(K) - S_b(K) - S_c(K) = S$, dacă $K \in Int(\angle A')$; R_3: $S_b(K) + S_c(K) - S_a(K) = S$, dacă $K \in Int(\angle A) - [ABC]$. Cu acestea avem:

Propoziția 1. $S_a(K) = S_a(K') \Leftrightarrow KK' \| BC$ (a se vedea [1]).

Propoziția 2. Dacă $K \in Int(\Delta ABC)$, atunci cu inegalitatea mediilor şi R_1, obținem:

a) $S_a(K) \cdot S_b(K) \cdot S_c(K) \le \left(\frac{S}{3}\right)^3$; b) $S_a^2(K) + S_b^2(K) + S_c^2(K) \ge \frac{S^2}{3}$.

Aplicații:

A1. Se consideră ΔABC ascuțitunghic. Dacă $S_a(K) = S \cdot ctgB \cdot ctgC$ şi $S_b(K) = S \cdot ctgA \cdot ctgC$, atunci $CK \perp AB$.

Soluție. Fie H ortocentrul ΔABC cu AA' înălțimea corespunzătoare vârfului A.

În $\Delta BHA'$ avem $tg(\angle BHA') = tgC = \frac{BA'}{A'H} \Rightarrow A'H = \frac{BA'}{tgC} = c \cdot \cos B \cdot ctgC$ şi

$$S_a(H) = \frac{BC \cdot HA'}{2} \frac{a \cdot c \cdot \cos B \cdot ctgC}{2} = \frac{S}{\sin B} \cos BctgC = SctgBctgC.$$

Deci, $S_a(H) = S_a(K) \Rightarrow HK \| BC$ (s-a aplicat propoziția 1). Analog găsim $S_b(H) = S_b(K) \Rightarrow HK \| AC$. Deoarece punctele A, B, C sunt necolineare rezultă $K = H$ şi $CK \perp AB$.

Remarca 1.1. Analog se demonstrează că dacă în ΔABC cu $\angle A > 90^0$, $K \in Int(\angle A')$, $S_a(K) = S \cdot ctgB \cdot ctgC$, $S_b(K) = -S \cdot ctgC \cdot ctgA$, atunci $CK \perp AB$.

A2. Dacă $S_a(K) = \dfrac{a^2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}$ şi $S_b(K) = \dfrac{b^2 \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}}$, atunci $(CK$ este bisectoarea unghiului C.

Soluție. Se calculează $S_a(I)$ şi $S_b(I)$, unde I este punctul de intersecție al bisectoarelor ΔABC, şi se obține: $S_a(I) = S_a(K) \Rightarrow IK \| BC$ şi $S_b(I) = S_b(K) \Rightarrow IK \| CA$. Deci, $I = K$, aşadar $(CK$ este bisectoarea unghiului C.

Observația 2.1. Relația R_1 scrisă în punctul I devine $S_a(I) + S_b(I) + S_c(I) = S \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}+\frac{b^2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}}+\frac{c^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}}=S \Leftrightarrow a^2\sin B\sin C+$$

$$+b^2\sin C\sin A+c^2\sin A\sin B=8S\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow 2S\sin A+2S\sin B+2S\sin C=$$

$$=8S\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (A_{21})$$

Remarca 2.1. Relația R_1 scrisă în punctul I reprezintă interpretarea geometrică a identității (A_{21}).

Observația 2.2. Folosind propoziția 2 și (A_{21}) obținem

$$\sin A+\sin B+\sin C\ge 3\cdot\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}\le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow 27\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le$$

$$\le 8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} \Rightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\le\frac{8}{27}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (A_{22})$$

Egalitatea are loc dacă $A=B=C$.

A3. În relația R_1 luăm $K=O$ (centrul cercului circumscris ΔABC) și obținem:

$$S_a(O)+S_b(O)+S_c(O)=S \Leftrightarrow \frac{R^2\sin 2A}{2}+\frac{R^2\sin 2B}{2}+\frac{R^2\sin 2C}{2}=S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{2S}{R^2} \Leftrightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{ab\sin C}{R^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C \qquad (A_{31})$$

Remarca 3.1. Relația R_1 scrisă în punctul O reprezintă interpretarea geometrică a identității (A_{31}).

Observația 3.1. Din propoziția 2 și identitatea (A_{31}) avem:

$$\frac{R^6}{8}\sin 2A\sin 2B\sin 2C\le\left(\frac{S}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{R^6}{8}\sin 2A\sin 2B\sin 2C\le\frac{\frac{a^3b^3c^3}{4^3R^3}}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^6}{8}\sin 2A\sin 2B\sin 2C\le\frac{8R^6}{27}\sin^3 A\sin^3 B\sin^3 C \text{ (s-a folosit teorema sinusurilor)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A\sin 2B\sin 2C\le\frac{64}{27}\sin^3 A\sin^3 B\sin^3 C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\le\frac{8}{27}\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ctgActgBctgC\le\frac{8}{27}\sin A\sin B\sin C \qquad (A_{32})$$

Observația 3.2. Tot din propoziția 2 și identitatea (A_{31}) avem:

$$\frac{R^4\sin^2 2A}{4}+\frac{R^4\sin^2 2B}{4}+\frac{R^4\sin^2 2C}{4}\ge\frac{S^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C\ge\frac{a^2b^2c^2}{12R^6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C\ge\frac{16}{3}\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B\sin^2 C}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C\sin^2 A}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A\sin^2 B}\ge\frac{4}{3} \qquad (A_{33})$$

A4. Dacă în relația R_1 luăm $K=H$ (ortocentrul triunghiului ABC) găsim:

$$\sum S\cdot ctgA\cdot ctgB = S \Leftrightarrow \sum ctgActgB = 1 \qquad (A_{41})$$

Remarca 4.1. Relația (A_{41}) este valabilă în orice triunghi, iar pentru triunghiurile nedreptunghiceeste echivalentă cu identitatea $\sum tgA = tgA\cdot tgB\cdot tgC$.

A5. Dacă în relația R_1 luăm $K = G$ (centrul de greutate al triunghiului ABC) atunci:

$$3S_a(G) = S \Leftrightarrow \frac{GB\cdot GC\cdot \sin\angle BGC}{2} = \frac{S}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}m_b m_c \sin\angle BGC = S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\angle BGC = 6\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}} \qquad (A_{51})$$

A6. Relația R_1 scrisă într-un punct $K\in Int(\Delta ABC)$ reprezintă interpretarea geometrică a următoarei identități: $\sum \frac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}\cdot\frac{\sin(B-B_1)}{\sin(B+C_1-B_1)} = 1 \qquad (A_{61})$

ce se obține cu ajutorul formulei $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$, unde A_1, B_1, C_1 reprezintă $\angle KAC, \angle KBA, \angle KCA$.

Bibliografie:
1. Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2012, 201-203.
2. Sclipirea Minții, nr. XI. 2013, 6.

O generalizare a inegalității lui Nesbitt

de Nela Ciceu, Roșiori - Bacău și Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

În această scurtă notă vom prezenta o generalizare a inegalității lui Nesbitt, i.e.
Pentru $a,b,c\in R_+^*$, și $m,n\in N$ avem inegalitatea:

$$\frac{a^m}{b^n+c^n}+\frac{b^m}{c^n+a^n}+\frac{c^m}{a^n+b^n} \ge \frac{3(a^m+b^m+c^m)}{2(a^n+b^n+c^n)}.$$

Demonstrație. Putem presupune că $a\ge b\ge c$. Atunci:

$$a^m\ge b^m\ge c^m \text{, și } b^n+c^n\le c^n+a^n\le a^n+b^n \Leftrightarrow \frac{1}{b^n+c^n}\ge\frac{1}{c^n+a^n}\ge\frac{1}{a^n+b^n}.$$

Aplicând inegalitatea lui *Cebâșev* și apoi inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică, obținem:

$$\frac{a^m}{b^n+c^n}+\frac{b^m}{c^n+a^n}+\frac{c^m}{a^n+b^n} \ge \frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\left(\frac{1}{b^n+c^n}+\frac{1}{c^n+a^n}+\frac{1}{a^n+b^n}\right)\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\cdot\frac{9}{b^n+c^n+c^n+a^n+a^n+b^n} = \frac{3(a^m+b^m+c^m)}{2(a^n+b^n+c^n)}.$$

Pentru $m = n = 1$ obținem inegalitatea lui ***Nesbitt.***

„Educația este un ornament în vremuri de prosperitate și un refugiu în vremuri de restriște”

Aristotel

Demonstrarea unor inegalități din Octogon

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu şi Titu Zvonaru

În acest articol vom demonstra unele inegalități enunțate în [1].

1. $x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}\ge 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2}-\sqrt[3]{z}\right)^3$, $x,y,z>0$ (vezi [1], Teorema 5, p. 79).

Demonstrație. Notând $x=a^3, y=b^3, z=c^3$, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:
$4(a^3+b^3+c^3-3abc)\ge(a+b-2c)^3 \Leftrightarrow 4a^3+4b^3+4c^3-12abc\ge a^3+b^3-8c^3+$
$+3a^2b+3ab^2-6a^2c+12ac^2-6b^2c+12bc^2-12abc \Leftrightarrow 3(a^3+b^3-a^2b-ab^2)+$
$+6c(2c^2+a^2+b^2-2ac-2bc)\ge 0 \Leftrightarrow 3(a-b)^2(a+b)+6c[(a-c)^2+(b-c)^2]\ge 0$, adevărată.
Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$, adică $x=y=z$.■

2. $2(x^3+y^3+z^3)+3xyz\ge(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$, $x,y,z>0$ (vezi [1], Teorema 11, p. 88).
Demonstrație. După desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea devine:
$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2$, care este inegalitatea lui Schur.■

3. $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 3\cdot\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}\right)\ge 9$, $x,y,z>0$ (vezi [1], Teorema 22, p. 94).
Demonstrație. Inegalitatea din dreapta rezultă imediat aplicând Cesaro ($(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$).
Pentru inegalitatea din stânga, aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi geometrică, avem:
$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=3+\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}\ge 3+3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}$.■

4. $\dfrac{27}{8}\le\dfrac{(x+y+z)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}<4$, $x,y,z>0$ (vezi [1], Teorema 36, p. 101).
Demonstrație. Inegalitatea din stânga se scrie succesiv: $8\sum x^3+24\sum x^2y+$
$+24\sum xy^2+48xyz\ge 27\sum x^2y+27\sum xy^2+54xyz \Leftrightarrow 3(\sum x^3+3xyz-\sum x^2y-$
$-\sum xy^2)+5(\sum x^3-3xyz)\ge 0$. Prima paranteză este pozitivă conform inegalității lui Schur, iar a doua paranteză este pozitivă conform inegalității mediilor. Inegalitatea din dreapta nu este adevărată; de exemplu, pentru $x=4, y=1, z=1$, obținem
$\dfrac{216}{5\cdot5\cdot2}=\dfrac{108}{25}>4$.■

5. $(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)\ge(x+y+z+t)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\right)xyzt$, $x,y,z,t>0$ (vezi [1], Teorema 18, p. 91).
Demonstrație. După desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea devine:
$x^2z^2+y^2t^2-2xyzt\ge 0 \Leftrightarrow (xz-yt)^2\ge 0$.■

6. Dacă $x\ge y\ge z>0$, atunci $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge\dfrac{7}{3}(x-y)(y-z)$ (vezi [1], Teorema 27, p. 96).
Demonstrație. Vom demonstra că dacă $x\ge y\ge z>0$, atunci:
$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 3(x-y)(y-z)$. Avem:
$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-3(x-y)(y-z)=\dfrac{1}{2}(x-y)^2+\dfrac{1}{2}(y-z)^2+\dfrac{1}{2}(x-z)^2-$

$-3(x-y)(y-z)=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}[(x-y)+(y-z)]^2-3(x-y)(y-z)=$

$=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-y)(y-z)-3(x-y)(y-z)=[(x-y)-(y-z)]^2=$

$=(x-2y+z)^2$. Dacă în inegalitatea $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq k(x-y)(y-z)$ luăm $x=3, y=2, z=1$, obținem $14-11\geq k \Leftrightarrow k\leq 3$, deci $k=3$ este cea mai mare valoare a parametrului k pentru care inegalitatea $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq k(x-y)(y-z)$ este adevărată.

7. $\frac{x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}}{3}\leq\sqrt[3]{x\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}}$, $x,y,z>0$ (vezi [1], Teorema 3, p. 76).

Demonstrație. Aplicând inegalitatea lui Hölder obținem:

$(x+x+x)(x+x+x)(x+x+y)(x+y+y)(x+y+z)(x+y+z)\geq\left(x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}\right)^6$,

și rezultă că este suficient să demonstrăm că:

$9x^2(2x+y)(x+2y)(x+y+z)^2\leq 3^6\cdot x^2\cdot\frac{(x+y)^2}{4}\cdot\frac{(x+y+z)^2}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(2x+y)(x+2y)\leq 9(x+y)^2\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$.■

8. $\frac{x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[4]{xyzt}}{4}\leq\sqrt[4]{x\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z+t}{4}}$, $x,y,z,t>0$ (vezi [1], Teorema 4, p. 78).

Demonstrație. Aplicând inegalitatea lui Hölder obținem:

$(x+x+x+x)^3(x+x+y+y)^3(x+y+x+z)(x+y+y+z)(x+y+z+z)\ (x+y+z+t)^3$

$\geq\left(x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[4]{xyzt}\right)^{12}$, și rezultă că este suficient să demonstrăm că:

$4^3\cdot x^3\cdot 2^3(x+y)^3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)(x+y+z+t)^3\leq$

$\leq 4^{12}\cdot\frac{x^3(x+y)^3}{2^3}\cdot\frac{(x+y+z)^3}{3^3}\cdot\frac{(x+y+z+t)^3}{4^3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 27(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)\leq 64(x+y+z)^3 \qquad (1)$$

Folosind inegalitatea mediilor avem:

$3\cdot\sqrt[3]{(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}\leq 2x+y+z+x+2y+z+x+y+2z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)\leq 4^3(x+y+z)^3$, adică exact inegalitatea (1).■

Bibliografie:

1. Octogon Mathematical Magazine, Vol. 13, April, 2005.

DIN CUGETĂRILE LUI MOISIL

„Știința se răzbună ca o femeie: nu când o ataci, ci când o neglijezi”.
„Libertate totală, ai impresia că e un joc de cuvinte; cel puțin pentru mine pare o expresie corectă din punct de vedere gramatical, dar de fapt nu are sens, căci fiecare trebuie să se încadreze în legile societății.”
„Un om e uman nu numai prin defectele lui, ci şi prin calitățile lui.”
„Se ştie că un profesor bun e cel care te face ca lucrurile mai grele să ți se pară uşoare.”
„Pe omul cu adevărat capabil, limitele îl stimulează. Evident, morala nu e "puneți, fraților, piedici!", ci "dacă dați de piedici, depăşiți-le!".”

Alte identități remarcabile în triunghi (II)

de prof. dr. Mihàly Bencze, Brașov

Această notă este o continuare a articolului din [1].

Teoremă. Dacă $x, y, z \in C$ $(x \neq y \neq z)$, atunci avem identitatea:

$$\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=6-\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)-\sum x^3}{xyz}.$$

Demonstrație. Identitatea rezultă prin simplu calcul algebric.

Aplicația 5. În orice triunghi ascuțitunghic şi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos C}\right)\left(\sum\frac{\cos C}{\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{4(R+r)(s^2-2Rr-5R^2)-3R(s^2-(2R+r)^2)}{R(s^2-(2R+r)^2)}.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$.

Aplicația 6. În orice triunghi ascuțitunghic şi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin(A-B)\sin^2 C}{\cos C}\right)\left(\sum\frac{\cos C}{\sin(A-B)\sin^2 C}\right)=$$

$$=6-\frac{(s^2-4Rr-r^2)(4s^2r^2-(s^2-r^2-4Rr)^2)+48s^2R^2r^2}{4sr(s^2-(2R+r)^2)}.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=ctgA, y=ctgB, z=ctgC$.

Aplicația 7. În orice triunghi ascuțitunghic şi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)\left(\sum\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}\right)=5-\frac{16R}{r}+\left(\frac{s}{r}\right)^2.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=ctg\frac{A}{2}, y=ctg\frac{B}{2}, z=ctg\frac{C}{2}$.

Aplicația 8. În orice neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)\left(\sum\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)=$$

$$=6-\frac{2(2R-r)(s^2-4Rr-4R^2)-3Rr^2}{Rr}.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=\sin^2\frac{A}{2}, y=\sin^2\frac{B}{2}, z=\sin^2\frac{C}{2}$.

Bibliografie:

1. Bencze M., *Identități remarcabile în triunghi***,** Sclipirea Minții, Nr. XI, 2013, 9-10.

2. Colecția Octogon Mathematical Magazine (1993-2012).

Studiile reprezintă ceia ce rămâne, când uiți totul ce ai învățat la școală.

Albert Einstein

Câteva identități cu numere complexe și aplicații

de Marius Drăgan și Liviu Bordianu, București

În acest articol prezentămăm câteva identități cu numere complexe și aplicații ale acestora.
Lemă (vezi [1]). Pentru orice numere complexe z_1, z_2, z_3 au loc egalitățile:

1) $\sum (z_3 - z_2)(z_3 + z_2)^2 = \prod (z_1 - z_2)$;

2) $\sum (z_3 - z_2)z_1(z_3 + z_2)^2 = -\prod (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + z_3)$;

3) $\sum (z_3 - z_2)z_1^2(z_3 + z_2)^2 = -\prod (z_1 - z_2)(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$;

4) $\sum (z_3 - z_2)z_1^3(z_3 + z_2)^2 = -\prod (z_1 - z_2)z_1z_2z_3$;

5) $\sum (z_3 - z_2)z_2z_3(z_3 + z_2)^2 = \prod (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + z_3)^2$;

6) $\sum (z_3 - z_2)z_1^4(z_3 + z_2)^2 = \prod (z_1 - z_2)(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)^2$;

7) $\sum (z_3 - z_2)z_2^2z_3^2(z_3 + z_2)^2 = \prod (z_1 - z_2)\left[\left(\sum z_1z_2\right)\left(\sum z_1\right)^2 - 2z_1z_2z_3\sum z_1\right]$;

8) $\sum (z_3 - z_2)z_2^5(z_3 + z_2)^2 = \prod (z_1 - z_2)\left[\left(\sum z_1\right)\left(\sum z_1z_2\right)^2 - 2z_1z_2z_3\sum z_1z_2\right]$.

Aplicații:

1) Pentru orice numere reale pozitive x, y și z are loc inegalitatea

$$\sum (z - y)x^3(z + y)^2(x^2 + 7yz) \geq 0.$$

Soluție. Din lema 8 pentru $z_1 = x,\ z_2 = y,\ z_3 = z$, rezultă

$$\sum (z - y)x^5(z + y)^2 = \prod (x - y)\sum xy\left(\sum x\sum xy - 2xyz\right) \qquad (1)$$

Dar $\sum x\sum xy \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz$. Deci, $\sum x\sum xy - 2xyz \geq 7xyz$

Din (1) obținem:

$$\sum (z - y)x^5(z + y)^2 \geq 7xyz\sum xy\prod (x - y) \qquad (2)$$

Dar, din lema 3, deducem $\sum (z - y)x^2(z + y)^2 = -\prod (x - y)\sum xy$. Inegalitatea (2) devine:
$\sum (z - y)x^5(z + y)^2 \geq -7xyz\sum (z - y)x^2(z + y)^2$, sau echivalent

$$\sum (z - y)x^3(z + y)^2(x^2 + 7yz) \geq 0,\ \forall x, y, z \in [0, \infty).$$

2) Se consideră mulțimea $H = \left\{z \in C \middle| z^5 = 1\right\}$. Să se demonstreze că:

$$\sum z_1z_2\left(\sum z_1z_2\sum z_1 - 2z_1z_2z_3\right) = 1, \forall z_1, z_2, z_3 \in H.$$

Solutie. Rezultă din lema 1) , 8) și $z_1^5 = z_2^5 = z_3^5 = 1$.

În continuare, considerăm în planul triunghiului ABC cu $A(a), B(b), C(c)$ punctele

$$M(z), A_1\left(\frac{b+c}{2}\right), B_1\left(\frac{c+a}{2}\right), C_1\left(\frac{a+b}{2}\right), G\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Vom avea urmatoarele inegalități:

3) $4\sum a \cdot MA \cdot MA_1^2 \geq 3abc \cdot MG$;

Soluție. Rezultă din lema 2) considerând $z_1 = z - a, z_2 = z - b, z_3 = z - c$.

4) $4\sum a \cdot MA^3 \cdot MA_1^2 \geq abc \cdot MA \cdot MB \cdot MC$;

Soluție. Rezultă din lema 4) și inegalitatea modulului.

5) $4\sum a \cdot MB \cdot MC \cdot MA_1^2 \geq 9abc \cdot MG^2$.

Soluție. Rezultă din lema 5) și inegalitatea modulului.

Evident cu ajutorul identităților din lema prezentată mai sus pot fi generate multe alte aplicații pe care le lăsam în seama cititorilor.

Bibliografie: **1. Octogon Mathematical Magazine (1993-2013)**

Triunghiul lui Pascal versus triunghiul lui Sierpinski

de prof. Ciprian Cheşcă, Buzău

În căutarea unor idei noi în vederea elaborării unor probleme interesante pentru pregătirea elevilor de gimnaziu ce formează lotul național restrâns al României la informatică, am început să studiez elaborarea unui algoritm eficient de numărare a multiplilor de p (unde p reprezintă un număr prim dat) din triunghiul lui Pascal. În urma acestui studiu am propus spre rezolvare elevilor, în tabăra de pregătire desfăşurată la Baia Mare în perioada 7-14 mai 2013, următoarea problemă (enunț simplificat):

“ Fie **n** și **p** două numere naturale nenule cu proprietățile: **i)** **p** este număr prim; **ii)** **n+1** este o putere naturală a lui **p** **”**;

Notăm cu **M(p)** numărul de multipli de **p** din primele **n+1** rânduri ale triunghiului lui Pascal.

Să se scrie un program care citeşte numerele naturale **n** şi **p** și determină numărul **M(p)**.

Date de intrare : Fişierul de intrare **pascal.in** conține pe primul rând numerele naturale **n** și **p**.

Date de ieşire: Fişierul de ieşire **pascal.out** va conține pe prima linie numărul **M(p)**.

Restricții şi precizări: $2 \le n \le 10^9$ **;** $2 \le p < 10^3$.

Am constatat că problema are numeroase abordări pe care le voi prezenta în continuare :

Varianta 1 (naivă)

Se pot genera termenii triunghiului lui Pascal folosind o matrice sau 2 tablouri unidimensionale, utilizând binecunoscuta formulă de recurență C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1). Se verifică apoi câți dintre aceştia sunt multipli de p. Ordinul de complexitate al acestei variante este $O(n^2)$.

Varianta 2 (utilizand teorema lui Legendre)

Pentru fiecare termen al triunghiului lui Pascal se calculează exponentul la care apare p în n!, în k! şi respectiv în (n-k)! adică, cu alte cuvinte care este exponentul lui p în C(n,k). Dacă această valoare este nenulă înseamnă că termenul respectiv este multiplu de p. Această variantă are complexitate $O(n^2)$ însă obține punctaje mai mari decât prima variantă.

Varianta 3 . Se utilizează următorul rezultat matematic:

Numărul termenilor din șirul numerelor C(n,0),C(n,1), … ,C(n,n) care sunt multipli de p este egal cu:

$\mathbf{n+1-(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)}$ **[1],** unde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sunt cifrele scrierii lui n în baza p.

Spre exemplu dacă n = 7 și p = 2 atunci în șirurile:

C(2,0),C(2,1), C(2,2) sunt 2+1–(1+1)(0+1)=**1** multipli de 2, deoarece 2(în binar) = 10

C(3,0),C(3,1),...,C(3,3) sunt 3+1–(1+1)(1+1)=**0** multipli de 2, deoarece 3(în binar) = 11

C(4,0),C(4,1),...,C(4,4)sunt 4+1–(1+1)(0+1)(0+1)=**3** multipli de 2, deoarece 4(în binar) = 100

C(5,0),C(5,1),...,C(5,5)sunt 5+1–(1+1)(0+1)(1+1)=**2** multipli de 2, deoarece 5(în binar) = 101

C(6,0),C(6,1),...,C(6,6)sunt 6+1–(1+1)(1+1)(0+1)=**3** multipli de 2, deoarece 6(în binar) = 110

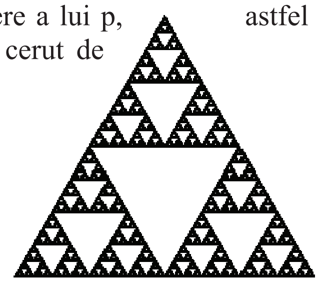
C(7,0),C(7,1),...,C(7,7)sunt 7+1–(1+1)(1+1)(1+1)=**0** multipli de 2, deoarece 8(în binar) = 111

În total vor fi 1+0+3+2+3+0 = 9 multipli de 2 în primele 8 rânduri ale triunghiului lui Pascal.

Acest rezultat matematic reduce ordinul de complexitate de la $O(n^2)$ în cazul variantelor anterioare, la $O(n \cdot \lg n)$.

Varianta 4. Se calculează termenii din triunghiul lui Pascal modulo p şi se observă apariția unor „modele” în formarea acestuia. Mai precis elementele nule din triunghi împreună cu elementele nenule formează un fractal cunoscut sub numele de triunghiul lui **Sierpinski**.

Acum se poate explica şi restricția impusă şi anume că n+1 trebuie să fie o putere a lui p, astfel încât fractalul să se încheie cu un triunghi complet. Determinarea numărului cerut de problemă se poate face acum recurent cu relația:



$$M(x) = \begin{cases} 0; \; daca \;\; x = 0 \\ \dfrac{p\cdot(p+1)}{2}\cdot M(x-1) + \dfrac{(p-1)\cdot p}{2}\cdot\dfrac{t\cdot(t-1)}{2}, daca x \rangle 0 \end{cases}$$

unde t este o putere a lui p, iar x este un nivel complet al fractalului.

Ordinul de complexitate al acestei soluții este O(lg n) și permite determinarea rezultatului cerut de problemă, pentru valori foarte mari ale lui n, într-un timp foarte scurt.

Rezultate bune la această problemă le-au obținut elevii: Oncescu Costin, Câmpulung Muscel (100p), Marian Darius, Bucureşti (100p), Chichirim George, Constanța (82p).

Bibliografie:

1. Gazeta Matematică nr. 4/1983, pag. 176, Probleme pregătitoare pentru O.I.M., autor Ioan Tomescu.

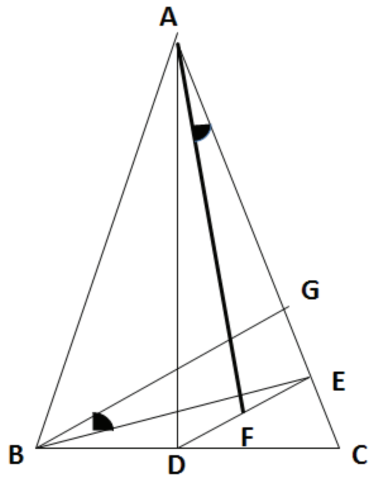
Soluții alternative şi generalizarea unei probleme date la olimpiadă

de prof. Mitea Mariana, Cugir

În triunghiul ABC cu AB = AC, fie D mijlocul laturii [BC], E piciorul perpendicularei din D pe AC şi F mijlocului segmentului [DE]. Să se demonstreze că $AF \perp BE$.
(Problema 84/ pag 113; E. Rusu. Problematizare şi probleme în matematica şcolară, EDP. 1978)

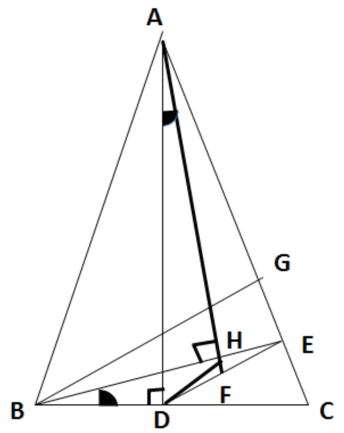
Prezentăm în continuare următoarele soluții:

Soluția 1.



Fie G piciorul perpendicularei duse din B pe [AC]. Cum BD=DC şi $BD \parallel DE$ ($BG \perp AC$, $DE \perp AC$) rezultă CE=EG. Se demonstrează că triunghiurile ADE, ACD şi BCG sunt asemenea, iar atunci $\frac{AE}{BG}=\frac{DE}{CG}=\frac{2EF}{2GE}=\frac{EF}{GE}$. Din $\frac{AE}{BG}=\frac{EF}{GE}$ şi $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle BGE = 90^0 \Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta BGE \Rightarrow$ $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle GBE \Rightarrow AE \perp BG \Rightarrow AF \perp BE$ (unghiuri cu laturile perpendiculare).

Soluția 2.



Fie $AF \cap BE = \{H\}$ şi de asemenea $BG \perp AC$. Avem $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BGC = 90^0$ şi $\sphericalangle EDA = 90^0 - \sphericalangle EDC = \sphericalangle GCB \Rightarrow$ $\Delta EDA \sim \Delta GCB.$ (1). Cum $DE \parallel BG$ şi D este mijlocul lui [BC] rezultă că E este mijlocul lui [CE]. Atunci, [BE] este mediană în ΔGCB (2). F este mijlocul lui [DE] prin urmare [AF] este mediană în ΔADE (3).
Din (1), (2), (3) rezultă
$\Delta FAD \sim \Delta EBC \Rightarrow \sphericalangle FAD \equiv \sphericalangle EBC \Rightarrow \sphericalangle HAD \equiv \sphericalangle HBD$, unde $AF \cap BE = \{H\}$ şi $D \in [BC]$. De aici rezultă că patrulaterul $HABD$ este inscriptibil.
Rezultă $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AGB = 90^0$ (ca unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse) $\Rightarrow AF \perp BE$.

Soluția 3. (vectorială)

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} - 2\overrightarrow{ED}$.

Cum $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{ED}$ şi $\overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{ED}$ rezultă $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EC} - 2\overrightarrow{ED}\right) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED}$

Dar $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}\right) \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED}$,

Atunci, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}\right) \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$, prin urmare

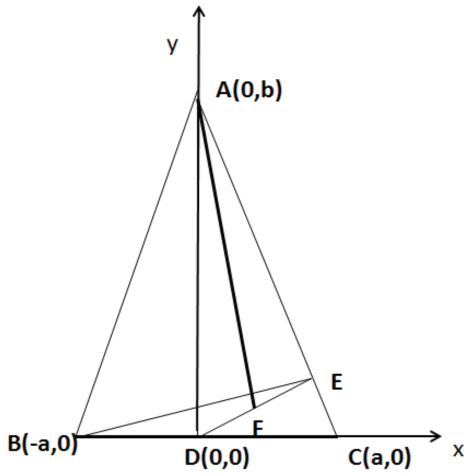
$\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BE} \Rightarrow AF \perp BE$.

Soluția 4. (analitică)

Considerăm sistemul ortogonal de axe, xdy, unde $D(0;0), B(-a;0), C(a;0), A(0;b)$ unde $a,b\rangle 0$.

Ecuația dreptei AC este $y = -\frac{b}{a}x + b$,deci $m_{AC} = -\frac{b}{a}$, de unde $m_{DE} = \frac{a}{b}$.

Ecuaţia dreptei DE este $y=\frac{a}{b}x.$ Din $AC\cap DE=\{E\}$ rezultă coordonatele punctului $E\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ şi coordonatele mijlocului $F\left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)},\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right).$



Ecuaţia dreptei AF este $y=-\frac{a^2+2b^2}{ab}x+b$ deci

$m_{AF}=-\frac{a^2+2b^2}{ab}.$

Ecuaţia dreptei BE este $y=\frac{ab}{2b^2+a^2}x+\frac{a^2b}{2b^2+a^2}$, deci $m_{BE}=-\frac{ab}{2b^2+a^2}.$

Cum $m_{AF}\cdot m_{BE}=-\frac{a^2+2b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{2b^2+a^2}=-1\Rightarrow AF\perp BE.$

Alte soluţii se pot găsi şi în [1].

Problema admite şi o generalizare: ***În triunghiul ascuţit unghic ABC, fie D piciorul perpendicularei din A pe BC, respectiv E la perpendicularei din D pe AC. Punctul F este situat pe DE astfel încît*** $\frac{DF}{FE}=\frac{ctgC}{ctgB}$***. Arătaţi că*** $AF\perp BE.$

Demonstraţie:

Fie $\{L\}=AF\cap BE$ şi $BK\perp AC,\ K\in[AC]$. Din $DE\perp AC$, conform Teoremei lui Thales rezultă $\frac{DC}{DB}=\frac{EC}{EK}$. Din ΔADC dreptunghic avem $ctgC=\frac{DC}{AD}$ iar din ΔADB dreptunghic avem $ctgB=\frac{DB}{AD}$, de unde $\frac{ctgC}{ctgB}=\frac{DC}{DB}$, ceea ce face să obţinem egalităţile:

$\frac{DF}{FE}=\frac{ctgC}{ctgB}=\frac{DC}{DB}=\frac{EC}{EK}$ (1). Din $m\left(\widehat{DAE}\right)=m\left(\widehat{CBK}\right)=90^0-m\left(\widehat{ACB}\right)$ şi cum

$\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle ADE\Rightarrow\Delta AED\sim\Delta CBK\Rightarrow\frac{DE}{CK}=\frac{AE}{BK}\Rightarrow\frac{DE}{AE}=\frac{CK}{BK}$ (2).

De asemenea, se obţine şi relaţia $\frac{FE}{ED}=\frac{FE}{FE+DF}\Rightarrow FE=ED\cdot\frac{EK}{CK}$. (3).

Din (2) şi (3) rezultă $tg\left(EAF\right)=\frac{EF}{AE}=\frac{EK}{BK}=tg\left(KBE\right)\Rightarrow\sphericalangle EAF\equiv\sphericalangle KBE$. De aici rezultă $\sphericalangle DAF\equiv\sphericalangle CBE\Rightarrow\sphericalangle DAL\equiv\sphericalangle DBL\Rightarrow$ punctele A,B,D,L sunt conciclice. Atunci, $m\left(\widehat{ALB}\right)=m\left(\widehat{ADB}\right)=90^0\Rightarrow AF\perp BE$.

Bibliografie:

1. Eugen Rusu. Problematizare şi probleme în matematica şcolară, EDP. 1978.

Jubileu – Filiala Rm. Sărat a SSMR
45 de ani de existență

- Profesorul Constantin Rusu –

Profesorul **Constatin Rusu** s-a născut la **10 aprilie 1942**, în comuna Finta, județul Dâmbovița – ca al patru-lea fiu al lui Gheorghe şi al Smaranda.

A urmat clasele elementare în comuna natală, iar studiile liceale la Ploieşti, la liceul ''Alexandru Toma'', astăzi Colegiul Național ''Mihai Viteazul''. În cei patru ani de liceu a întâlnit o atmosferă intensă de lucru la Gazeta Matematică, unde exista o întrecere adevărată. Această etapă a fost hotărâtoare în devenirea sa ca profesor de matematică şi ca slujitor al SSMR. A urmat Facultatea de Matematică şi Fizică (din 1963 Facultatea de Matematică Mecanică) în perioada 1960-1965, fiind repartizat la Liceul Teoretic ''Ştefan cel Mare'' din Râmnicu Sărat. Aici şi-a desfăşurat activitatea conform principiului ''Omul sfințeşte locul'' (însuşit de la tatăl său) perfecționându-şi continuu activitatea de predare şi pregătirea ştiințifică. A fost directorul liceului în perioada 1987-1990 militând pentru formarea unui climat sănătos de muncă şi profesor metodist al ISJ Buzău din anul 1980 şi până în 2008 (an în care s-a pensionat). A primit din partea Ministerului Educației titlul de ''Profesor Evidențiat'' în anul 1982 şi Diploma de Excelență pentru întreaga carieră didactică şi pentru activitatea remarcabilă desfăşurată la disciplina Matematică în 2007.

La 6 aprilie 1968 (dată la care s-a înființat subfiliala Râmnicu Sărat a SSMR) a devenit membru SSMR, iar în ziua de 2 aprilie 1972 a fost ales preşedinte al subfilialei. Începând de la această dată, a fost reales preşedinte al subfilialei din 4 în 4 ani. Prin strădania domnului profesor **Constatin Rusu** şi a colegilor săi s-a reuşit ca Filiala Râmnicu Sărat să fie prima filială a SSMR înscrisă în Registrul Asociațiilor şi Fundațiilor, primind personalitate juridică în conformitate cu OG 26/2000 la data de 27 iulie 2005.

A publicat la Gazeta Matematică mai multe articole şi probleme. A participat cu lucrări la diverse sesiuni ştiințifice şi simpozioane organizate în diverse locuri din țară. A organizat la Râmnicu Sărat sesiuni de comunicări ştiințifice şi simpozioane naționale (mai 1983, aprilie 1987, noiembrie 2001, noiembrie 2002, octombrie 2005, aprilie 2006, aprilie 2007, octombie 2009, octombrie 2011) iar toate lucrările prezentate au fost publicate în patru volume având titlul ''Articole şi note matematice''. A contribuit în mod hotărâtor la editarea lucrării ''Curbe algebrice plane şi invarianții lor topologici''a decanului de vârstă a SSMR Alexandru Popescu-Zorica. Atât cadrul legal cât şi activitatea intensă desfăşurată la Filiala din Râmnicu Sărat a SSMR a produs atragerea unui număr mare de colegi buzoieni care au devenit membri.Datorită acestui fenomen, domnul profesor **Constatin Rusu,** a ajutat la reorganizarea Filialei Buzău a SSMR care s-a produs la 24 ianuarie 2009.

A primit din partea SSMR şi a ministerului educației diverse diplome şi medalii:
Diploma Jubiliară cu prilejul împlinirii a 100 de ani de la înființarea Gazetei Matematice; Medalia jubiliară cu prilejul împlinirii a 100 de ani de la înființarea revistei Gazeta Matematică; Diploma 110 ani de apariție neîntreruptă a Gazetei Matematice 1895-2005; Medalia jubiliară ''Centenarul SSMR'' 1910-2010; Diploma de Excelență acordată pe anul 2008 pentru întreaga activitate desfăşurată în cadrul SSMR în vederea creşterii învățământului mathematic românesc; Diploma de Excelență acordată de Filiala Vălenii de Munte pentru contribuția deosebită la promovarea spiritului matematic în învățământul românesc, contribuind la afirmarea tinerilor talente precum şi pentru sprijinul generos acordat Filialei Vălenii de Munte.Am încercat în această scurtă prezentare a domnului **Constatin Rusu** să subliniem o parte din activitatea sa de ''activist'' SSMR – recunoscută pe deplin şi de Adunarea Generală a Filialei Râmnicu Sărat a SSMR – care la data de 28 ianuarie 2012 i-a propus funcția onorifică de Preşedinte de Onoare, funcție care a fost acceptată cu drag.

Din respectul pe care oamenii din comunitatea râmniceană îl dau domnului profesor **Constantin Rusu**, avem convingerea că el reprezintă un model pentru ei. Cu prilejul împlinirii celor - 45 de ani de existență a Filialei Rm. Sărat a SSMR - îi urăm domnului profesor viață lungă şi să iubească în continuare matematica, pentru că aşa cum chiar el o spune mereu – **''această iubire ne vindecă de foarte multe boli''**.

Costică Ambrinoc, Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a SSMR
Neculai Stanciu, PrimVicepreşedinte Filiala Râmnicu Sărat a SSMR

„ Acolo unde există o mare sete de învăţătură, firesc este să fie şi multe discuţii în contradictoriu, multe scrieri şi opinii, căci opinia, la oamenii de valoare, este cunoaştere în devenire”.
John Milton

3. Probleme rezolvate

▪ Învăţământ primar

P:258. Într-o şcoală, numărul elevilor corigenţi este o optime din numărul celor promovaţi. Diferenţa dintre numărul elevilor promovaţi şi al celor corigenţi este 245. Câţi elevi sunt corigenţi şi câţi sunt promovaţi? ***Prof.*** **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Dacă la un corigent avem 8 promovaţi, aceasta înseamnă că diferenţa este 8 -1 = 7. Cum diferenţa dintre numărul elevilor promovaţi şi al celor corigenţi este 245 rezultă 245: 7 =35 reprezentând faptul că diferenţa este de 35 de ori mai mare. Rezultă, numărul corigenţilor este 35 iar numărul promovaţilor este $8 \cdot 35 = 280$.

P:259. Determinaţi numerele m, n şi p, ştiind că $m+n=7$, $m+p=14$ **şi** $3m+n+p=24$.

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Adunând primele două egalităţi, obţinem $2m+n+p=21$.

A treia inegalitate o putem scrie astfel : $m+(2m+n+p)=24$, deci, $m+21=24$, de unde deducem că m = 3. Din prima egalitate rezultă că n = 4, iar din a doua inegalitate, că p = 11.

P:260. Determinaţi numerele naturale a căror sumă este 46 şi al căror produs este tot 46.

Prof. **Nicoleta Gabriela Lupşan,** Berca, Buzău

Rezolvare:

$46 = 2 \times 23 \times \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{\text{21 factori}}$, $46 = 2 + 23 + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{21 termeni}}$

P:261. Doi muncitori au primit pentru o lucrare 4176 lei. Primul muncitor a lucrat 60 de zile câte 3 ore pe zi şi al doilea 42 de zile câte 4 ore pe zi.
Ce sumă a primit fiecare muncitor? **Înv. Ion Lupşan,** Berca

Rezolvare:

60 x 3 = 180 (de ore a lucrat primul muncitor), 42 x 4 = 168 (de ore a lucrat al doilea muncitor)
180 + 168 = 348 (de ore au lucrat cei 2 muncitori), 4176 : 348 = 12 (lei pe oră)
180 x 12 = 2160 (de lei a primit primul muncitor), 168 x 12 = 2016 (lei a primit al doilea muncitor)

P:262. Să se afle un număr ştiind că dacă îl împărţim la 8, câtului obţinut îi adunăm 13, suma obţinută o înmulţim cu 4, iar din produsul obţinut scădem 25, obţinem 55.

Prof. **Nicoleta Loredana Clinciu** , Mihăileşti

Rezolvare: Notăm cu „a” numărul căutat. Din (a : 8 + 13) x 4 – 25 = 55 folosind metoda mersului invers se obţine a : 8 = 7 de unde a = 7 x 8 = 56 . Răspuns: 56.

P:263. Un camion transportă 100 saci cu porumb a câte 52 kg fiecare, 100 saci de ovăz a câte 62 kg şi 10 saci cu orez a câte 44 kg. Ce cantitate de cereale transportă camionul?

Prof. **Cornelia Mihaela Luca**, Mihăileşti

Rezolvare:

1.Care este cantitatea totală de porumb din cei 100 de saci? 100 x 52 =5200 (kg porumb)
2.Care este cantitatea totală de ovăz din cei 100 de saci? 100 x 62 =6200 (kg ovăz)
3.Care este cantitatea totală de orez din cei 10 saci? 10 x 44 =440 (kg orez)
4.Care este cantitatea totală de cereale? 5200 + 6200 + 440 =11840 (kg de cereale)
Răspuns: 11840 (kg de cereale)

P:264. Un număr este cu 40 mai mare decât alt număr. Dacă numărul cel mare îl înmulțim cu 5 obținem 700. Aflați numerele. *Prof.* **Cristian-Cosmin Lupşan**, Buzău

Rezolvare: Notăm numărul mai mic cu „a", şi atunci numărul mai mare este „a + 40".
5 x (a +40) = 700 ; 5 a + 200 = 700 ; 5 a = 500; a = 100 a + 40 = 140

P:265. Patru frați au mers în librărie să cumpere caiete. Cel din clasa a II-a a cerut cu 2 caiete mai mult decât fratele din clasa I, cel din clasa a III-a cu 3 caiete mai mult decât cel din clasa a II-a, iar cel din clasa a IV-a a cerut cu 4 caiete mai mult decât fratele din clasa a III-a. În total s-au cumpărat 84 de caiete. Câte caiete a cumparat fiecare copil?

Prof. **Gabriela Marinescu**, Vadu Paşii

Rezolvare:

1. Câte caiete s-ar fi vândut dacă toți ar fi cumpărat cât cel din clasa I? 84-2-5-9=68 (caiete)
2.Câte caiete a cumparat cel din clasa I? 68:4=17 (caiete)
3.Câte caiete a cumparat cel din clasa a II-a? 17+2=19 (caiete)
4.Câte caiete a cumparat cel din clasa a III-a? 19+3=22 (caiete)
5.Câte caiete a cumparat cel din clasa a IV-a? 22+4=26 (caiete)
Răspuns: 17; 19; 22; 26 de caiete

P:266. Câtul a două numere este 28, iar restul 4. Dacă adunăm deîmpărțitul, împărțitorul, câtul şi restul obținem 239. Aflați cele 2 numere.

Prof. **Daniela Ticea**, Buzău

Rezolvare:

Cum $a = b \cdot 28 + 4$ rezultă a + b + 28 + 4 = 239 înlocuim a = 28 b + 4
28 b + 4 + b + 28 + 4 = 239 de unde rezultă 29 b + 36 = 239 iar mai departe se obține
29 b = 203, b = 203 : 29 , b = 7 iar a = 28x7+4, a = 200 .

▪ Clasa a V-a

G:386. Determinați mulțimile A, B, C ştiind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:
1) $C \setminus A = \{a;b\}$**; 2)** $A \cup C = \{a;b;c;d;g;h\}$**; 3)** $A \cap B = \{c;g;h\}$**; 4)** $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{c;d;e;f\}$

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare:

Din egalitatea $(C \cup A) \setminus (C \setminus A) = A$ şi din condițiile 1), 2) rezultă $A = \{c;d;g;h\}$;
Din condițiile 1), 2), 4) rezultă $a \in C, b \in C, e \notin C, f \notin C$; Din condițiile 3), 4) rezultă
$c \notin C, g \in C, h \in C, d \in C$. Aşadar, $B = \{a;b;c;e;f;g;h\}$, $C = \{a;b;d;g;h\}$

G:387. Scrieți numărul 536^{2011} ca sumă de trei pătrate perfecte, distincte, nenule.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare:

$$536^{2011} = 536^{2010} \cdot 536 = \left(536^{1005}\right)^2 \cdot \left(6^2 + 10^2 + 20^2\right) = \left(536^{1005} \cdot 6\right)^2 + \left(536^{1005} \cdot 10\right)^2 + \left(536^{1005} \cdot 20\right)^2.$$

G:388. Să se arate că numărul 2^{96} are 28 de cifre.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Folosind inegalitatea $2^{10}=1024>1000=10^3$ obținem:

$$2^{96}=2^6\cdot\left(2^{10}\right)^9>64\cdot 10^{27}>10^{28}.\qquad \text{Avem succesiv:}$$

$$2^{10}=1024<1025=5^2\cdot 41\Rightarrow 2^{20}<5^4\cdot 1681<5^4\cdot 1700=5^6\cdot 2^2\cdot 17$$

$$\Rightarrow 2^{18}<5^6\cdot 17\Rightarrow 2^{36}<5^{12}\cdot 289<5^{12}\cdot 290=5^{13}\cdot 2\cdot 29$$

$$\Rightarrow 2^{35}<5^{13}\cdot 29\Rightarrow 2^{70}<5^{26}\cdot 841<5^{26}\cdot 850=5^{28}\cdot 34$$

$$\Rightarrow 2^{69}<5^{28}\cdot 17<5^{28}\cdot 20=5^{29}\cdot 2^2\Rightarrow 2^{67}<5^{29},$$

şi atunci $2^{67}\cdot 2^{29}<5^{29}\cdot 2^{29}\Rightarrow 2^{96}<10^{29}$.

Din $10^{28}<2^{96}<10^{29}$ deducem că 2^{96} are 28 de cifre.

Notă. Inegalitatea $2^{96}<10^{29}$ nu rezultă din $2^{80}<10^{25}$ (vezi problema E:14325 din GMB 4/2012)

G:389. Media aritmetică a vârstelor membrilor familiei Escu este 26, mama are 44 de ani, şi media aritmetică a vârstelor tatălui şi copiilor este 20. Câți copii are familia Escu?

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Notăm cu C numărul copiilor din familie şi cu F suma vârstelor tuturor membrilor familiei . Din ipoteză rezultă:

$$\begin{cases}26=\dfrac{F}{C+2}\\ 20=\dfrac{F-44}{C+1}\end{cases}\Rightarrow 26C+52=F \text{ şi } 20C+20=F-44.$$

Deci, $26C+52=20C+64\Leftrightarrow 6C=12$. Aşadar în familia Escu sunt 2 copii.

G:390. Fie $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}$ şi $A=2^{2013}\cdot a+3^{2013}\cdot b+3^{2014}\cdot c$. Dacă A este par, să se arate atunci şi că $2012\cdot a+2013\cdot b+2011\cdot c$ este par.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare: $A=3^{2013}\cdot\left(b+3c\right)+2^{2013}\cdot a$ par $\Rightarrow b+3c$ par $\Rightarrow b$ şi c au aceeaşi paritate

$\Rightarrow 2013\cdot b+2011\cdot c$ par $\Rightarrow 2012\cdot a+2013\cdot b+2011\cdot c$ par

G:391. Găsiți numerele $\overline{ab}$ ştiind că $\overline{ab}=(a+b)ab+b$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Avem $\overline{ab}=(a+b)ab+b\Leftrightarrow 10a+b=9a+b)ab+b\,10$ şi deoarece $a\neq 0$, rezultă $10=(a+b)\cdot b$, de unde $b\neq 0, a+b>b$, Scriind $10=5\times 2=10\times 1$ obținem:

- $a+b=5, b=2\Rightarrow\overline{ab}=32$; - $a+b=10, b=1\Rightarrow\overline{ab}=91$.

G:392. Arătați că orice număr de forma $\overline{xyxyxy}$ se divide cu 13.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$\overline{xyxyxy}=\overline{xy}\cdot 10000+\overline{xy}\cdot 100+\overline{xy}=\overline{xy}\cdot 10101$ Cum 10101 se împarte exact la 13 rezultă că $\overline{xyxyxy}\,\vdots\,13$

G:393. Să se simplifice fracția $E=\dfrac{3^n\cdot 7^{n+2}+3^{n+1}\cdot 7^{n+1}}{5^{n+1}+5^n}, n\in\mathbb{N}$. ***Prof.* Claudia Popa**, Berca

Rezolvare: $E=\dfrac{3^n\cdot 7^n\left(7^2+3\cdot 7\right)}{5^n\left(5+1\right)}=\dfrac{3^n\cdot 7^n\cdot 70}{5^n\cdot 6}=\dfrac{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}}{5^{n-1}}$.

G:394. Găsiți numere naturale $n_1\langle n_2\langle n_3\langle n_4\langle n_5\langle n_6$ **care verifică relația:** $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2+n_6^2=3224$ (Enunț corectat).

Prof. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: $3224=52\cdot 62=(4^2+6^2)(1^2+5^2+6^2)=4^2+20^2+24^2+6^2+30^2+36^2=$
$=4^2+6^2+20^2+24^2+30^2+36^2.$ Cum s-a cerut $n_1\langle n_2\langle n_3\langle n_4\langle n_5\langle n_6$, rezultă
$n_1=4,\ n_2=6,\ n_3=20,\ n_4=24,\ n_5=30,\ n_6=36$**.**

Comentariu (**Titu Zvonaru**): Așa cum era enunțul inițial ''Găsiți numerele naturale…'' înțelegem rezolvarea în numere naturale a ecuației date. Această cerință ar putea fi soluționată cu ajutorul calculatorului, pentru că sunt de analizat multe cazuri, dar în număr finit. Cu titlu de exemplu, numai pentru $n_1=1$ și $n_2=11$ (numărul revistei în care a apărut problema) se obțin 35 de soluții; iată câteva

$$3224=1+11^2+12^2+13^2+17^2+50^2=1+11^2+14^2+16^2+25^2+45^2=1+11^2+17^2+$$
$$+19^2+34^2+36^2=1+11^2+19^2+22^2+31^2+36^2=1+11^2+23^2+24^2+29^2+34^2.$$

▪ Clasa a VI-a

G:395. Aflați numerele naturale de două cifre pentru care diferența dintre număr şi răsturnatul său să fie egală cu triplul cifrei zecilor

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Din $\overline{ab}-\overline{ba}=3a\Rightarrow 2a=3b\Rightarrow \overline{ab}\in\{32,64,96\}$.

G:396. La un centru de excelență profesorul are 5n+17 probleme pe care le împarte în mod egal la cei 3n+3 elevi $(n\in\mathbb{N})$**. Aflați numărul elevilor de la centrul de excelență, ştiind că acesta e mai mare decât 15 şi mai mic decât 36.**

Prof. **Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare: dată de **Dl. Titu Zvonaru** :
Cu datele pe care le conține problema, nu există soluții:
$15<3n+3<36\Leftrightarrow 4<n<11$ și pentru nici un $n\in\{5,6,7,8,9,10\}$, $\dfrac{5n+17}{3n+3}\notin N$.
Se obține soluția $n=11$, dacă punem condiția $15<3n+3\le 36$.

G:397. Arătați că

$$\left[(-1)(-2)-(-3)(-1-2+3)+(-2)(-3)-(-1)(-2-3+1)+(-1)(-3)-(-2)(-3-1+2)\right](-1-2-3)=$$
$$=(-1)^3+(-2)^3+(-3)^3-3(-1-2-3).$$

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Membrul stâng este egal cu membrul drept şi anume cu – 18.

G:398. Arătați că numărul $a=2^n\cdot 5^{n+2}+4^n\cdot 25^{n-2}+31$ ($n\ge 2$) **este divizibil cu 9.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Berca, Buzău

Rezolvare: $a=2^n\cdot 5^{n+2}+4^n\cdot 25^{n-2}+31=10^n\cdot 25+100^{n-2}\cdot 16+31=$
$=25\underbrace{000...00}_{n}+16\underbrace{00...00}_{2n-4}+31=16\underbrace{00...00}_{n-6}25\underbrace{00...00}_{n-2}31.$ Cum suma cifrelor lui a este 18, rezultă că a este divizibil cu 9.

Rezolvare alternative, dată de **Dl. Titu Zvonaru**: Deoarece $(p+1)^n=M_p+1$, avem:
$a=25\cdot 10^n+16\cdot 100^{n-2}+31=25(9+1)^n+16(99+1)^{n-2}+31=M_9+25+16+31=M_9+72=M_9$,
pentru $n>2$. Pentru $n=2$ avem $a=2500+16+31=2547=M_9$.

G:399. **Să se determine numărul natural n astfel încât** $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,6\cdot 7^n \langle x \langle 49^n\right\}$ **să aibă 6 elemente.**

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Numărul elementelor mulțimii A este $49^n-6\cdot 7^n-1=6\Rightarrow \left(7^n\right)^2-6\cdot 7^n=7\Rightarrow$

$7^n(7^n-6)=7\Rightarrow n=1$. Aşadar, pentru n = 1, elementele mulțimii A sunt cuprinse între 42 şi 49 adică $A=\{43,44,45,46,47,48\}$.

G:400. **Determinați toate perechile** (x,y) **de numere naturale care satisfac relația:** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Avem $x>2011, y>2011$. Prin urmare luăm în ecuația dată $x=2011+a, y=2011+b$, unde a şi b sunt numere naturale nenule. Obținem:

$\frac{1}{2011+a}+\frac{1}{2011+b}=\frac{1}{2011}\Rightarrow ab=2011^2$. Deoarece 2011 este număr prim rezultă $(a,b)\in\{(1,2011^2),(2011,2011),(2011^2,1)\}$. Aşadar, obținem următoarele trei soluții pentru ecuația dată: $(x,y)\in\{(2012,2011\cdot 2012),(4022,4022),(2011\cdot 2012,2012)\}$

G:401. **Fie proporțiile** $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$ **şi** $\frac{y}{4}=\frac{z}{9}$. **Determinați x, y, z ştiind că** $x\cdot y\cdot z=10800$, **unde** $x,y,z\in\mathbb{Q}^*$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Din $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}\Rightarrow\frac{x}{12}=\frac{y}{20}$ şi $\frac{y}{4}=\frac{z}{9}\Rightarrow\frac{y}{20}=\frac{z}{45}$ rezultă $\frac{x}{12}=\frac{y}{20}=\frac{z}{45}=k$, deci, x = 12k, y = 20k, z = 45k; rezultă: xyz = $10800k^3$, adică, 10800 = $10800k^3$, de unde, deducem că numărul k este egal cu1. Aşadar, x = 12, y = 20, z = 45.

G:402. **Să se rezolve în** $\mathbb{N}$ **ecuația** $\left(3^x+4^x+5^x\right)^{671}=6^{2013}$.

***Prof.* Ionel Tudor, Călugăreni**, Giurgiu

Rezolvare:

Cum $6^{2013}=6^{3\cdot 671}=(6^3)^{671}$, ecuația dată este echivalentă cu $\left(3^x+4^x+5^x\right)^{671}=\left(6^3\right)^{671}\Rightarrow$

$3^x+4^x+5^x=6^3$. Singura soluție bună este x =3, deoarece, dacă $x\in\{0;1;2\}\Rightarrow 3^x+4^x+5^x\langle 6^3$ iar dacă $x\rangle 3\Rightarrow 3^x+4^x+5^x\rangle 6^3$.

G:403. **Rezolvați în** $\mathbb{Z}$ **ecuația:** $2013^{n^2+n}=(1+2+3+...+62+63-3)^{72}$.

***Prof.* Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$$1+2+3+...+62+63-3=\frac{63\cdot 64}{2}-3=2013;\ \text{deci,}\ 2013^{n^2+n}=2013^{72}\Rightarrow n(n+1)=8\cdot 9\Rightarrow n=8$$

sau $n(n+1)=-9\cdot(-8)$, deci, $n=-9$, căci, $72=-9\cdot(-8)$. Aşadar, S = {8; -9}

G:404. **Determinati numerele naturale** x,p **pentru care avem:** $3\cdot 2^x+1=7^p$.

***Prof.* Florin Stănescu,** Găeşti,Dâmbovița

Rezolvare: Pentru $x=0\Rightarrow 3+1=7^p\Rightarrow 7^p=4$, *fals.*

Pentru $x=1\Rightarrow 6+1=7^p\Rightarrow p=1$.

Fie $x\geq 2\Rightarrow 3\cdot 2^x+1=M_4+1$, iar cum $7^p=\left(M_4+3\right)^p\Rightarrow p=2k$. Astfel, ecuația devine

$3\cdot 2^x+1=7^{2k}\Rightarrow 3\cdot 2^x=\left(7^k-1\right)\left(7^k+1\right)$. Daca d este c.m.m.d.c. al numerelor 7^k-1 si 7^k+1, rezultă, prin scădere, $d\,|\,2$ si cum d este par, rezultă $d=2$. Acum, din $3\cdot 2^x=\left(7^k-1\right)\left(7^k+1\right)$, obținem urmatoarele cazuri:

1) $7^k-1=2$ si $7^k+1=3\cdot 2^{x-1}\Rightarrow 7^k=3$, *fals*.

2) $7^k-1=2\cdot 3$ si $7^k+1=2^{x-1}\Rightarrow k=1\Rightarrow 8=2^{x-1}\Rightarrow x=4$.

În final, $(x,p)\in\{(1,1),(4,1)\}$.

▪ Clasa a VII-a

G:405. Se consideră numerele $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=20$ şi $abc\geq 11$. Să se determine maximul expresiei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=\frac{8^2-20}{2}=22$$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}\leq\frac{22}{11}=2.$ Aşadar, maximul expresiei date este mai mic sau egal cu 2.

Comentariu: Folosind cunoştințe ce depăşesc nivelul clasei a VII-a, dl. **T. Zvonaru** arată că maximul nu poate fi egal cu 2.

G:406. a) Determinați numerele naturale nenule a_1,a_2,a_3,a_4 astfel încât $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}=1$;

b) Determinați numerele naturale nenule $a_1,a_2,....,a_8$ astfel încât $\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+...+\frac{1}{a_8^3}=1$.

Prof. Lucian Tuțescu, Craiova, Prof. Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Rezolvare:

a) Evident $a_i\neq 1,\forall i=\overline{1,4}$. Fie $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4\geq 2\Rightarrow \frac{1}{a_1^2}\leq\frac{1}{a_2^2}\leq\frac{1}{a_3^2}\leq\frac{1}{a_4^2}\leq\frac{1}{4}\Rightarrow$

$$1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1\Rightarrow\frac{1}{a_1^2}=\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{a_3^2}=\frac{1}{a_4^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=2;$$

b) Procedând analog, rezultă $1=\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+...+\frac{1}{a_8^3}\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{8}=1\Rightarrow a_1=a_2=...=a_8=2$.

G:407. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\cdot b=1$. Arătați că $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}\geq\frac{2}{3}$. În ce caz avem egalitate?

***Prof.* Ileana Didu, Dana Camelia**, Craiova

Rezolvare: Din $b=\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{a^2}{a^2+a+1}=\frac{a^2+1}{a^2+a+1}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$. Egalitate pentru a=b=1.

G:408. Determinați $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{8}{5}$ să fie soluție a ecuației $\frac{4x-m}{3}=m+\frac{x}{2}$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

Rezolvare: Înlocuindu-l pe x cu $\frac{8}{5}$ se obține $m=1$.

G:409. **Să se descompună în factori expresia** $3^{2012}+4\cdot 5^{2012}$. *Prof.* **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare:

$$3^{2012}+4\cdot 5^{2012}=\left(3^{1006}\right)^2+\left(2\cdot 5^{1006}\right)^2=\left(3^{1006}\right)^2+2\cdot 3^{1006}\cdot 2\cdot 5^{1006}+\left(2\cdot 5^{1006}\right)^2-4\cdot 3^{1006}\cdot 5^{1006}=$$

$$=\left(3^{1006}+2\cdot 5^{1006}\right)^2-\left(2\cdot 3^{503}\cdot 5^{503}\right)^2=\left(3^{1006}+2\cdot 5^{1006}+2\cdot 3^{503}\cdot 5^{503}\right)\cdot\left(3^{1006}+2\cdot 5^{1006}-2\cdot 3^{503}\cdot 5^{503}\right).$$

G:410. **Fie „ a” un număr natural nenul care are 2013 divizori şi numărul b = 111...14444...4 în care cifra 1 se repetă de 1006 ori iar cifra 4 se repetă de 2012 ori. Să se arate că** $\sqrt{a\cdot b}$ **este număr irațional.**

Prof. **Valerica Pometescu**, Craiova

Rezolvare: Fie $d_1\langle d_2\langle d_3\langle ...\langle d_{2013}$, divizorii lui **a**. Atunci, $a=d_1\cdot d_{2013}=d_2\cdot d_{2012}=...=d_{1006}\cdot d_{1008}$.

Dar, $d_{1007}\,|a\Rightarrow \dfrac{a}{d_{1007}}|a$, şi cum d_{1007} a rămas singur, $\Rightarrow d_{1007}=\dfrac{a}{d_{1007}}\Rightarrow a=d_{1007}{}^2$, rezultă că a este pătrat perfect. (1). (De altfel, a este pătrat perfect, căci numărul a are un număr impar de divizori)

Cum $b=\underbrace{111....111}_{1006 de 1}\cdot 10^{2012}+4\cdot\underbrace{111..111}_{2012 de 1}=\underbrace{111....111}_{1006 de 1}\cdot 10^{2012}+4\cdot\underbrace{111..111}_{1006 de 1}\cdot 10^{1006}+4\cdot\underbrace{111..111}_{1006 de 1}=$

$=\underbrace{111..111}_{1006 de 1}\cdot(10^{1006}+2)^2$ iar $\underbrace{111..111}_{1006 de 1}=\underbrace{111..100}_{1004 de 1}+11=M4+11=M4+3$, rezultă de aici că b nu poate fi pătrat perfect. (2) . Din (1) şi (2) rezultă că $a\cdot b$ nu este pătrat perfect, aşadar, $\sqrt{a\cdot b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

G:411. **Să se arate că dacă A şi B sunt două numere formate din 2n respectiv n cifre identice egale cu „ a” , atunci , numărul N =** $\dfrac{a(A+16B)+9a^2}{9}$ **este pătrat perfect.**

Prof. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Numerele A şi B se scriu: A = $\underbrace{aaa...a}_{2n-cifre}$, B = $\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}$, de unde

A = $\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}\cdot 10^n+\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}=10^n\cdot B+B$. Numărul N se scrie:

N = $\dfrac{a}{9}(A+16B)+a^2=\dfrac{a}{9}(10^n B+17B)+a^2=\dfrac{a}{9}\left[\left(10^n-1\right)B+18B\right]+a^2=\dfrac{a}{9}\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}B+2aB+a^2=$

$a\cdot\underbrace{111...1}_{n-cifre}\cdot B+2aB+a^2=B\cdot B+2aB+a^2=\left(B+a\right)^2=$

$$\left(\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}+a\right)^2=a^2\left(\underbrace{111...1}_{n-cifre}+1\right)^2=a^2\cdot\underbrace{111...12}_{n-cifre}{}^2=\left(a\cdot\underbrace{111...12}_{n-cifre}\right)^2.$$

G:412. **Gigel, desenează pe o coală de hârtie punctele** A,B,C,D,E **astfel încât:** $AD=BE=6$ **cm,** $DE=2$ **cm,** $AB=10$ **cm,** $EC=8$ **cm şi** $AC=16$ **cm.**

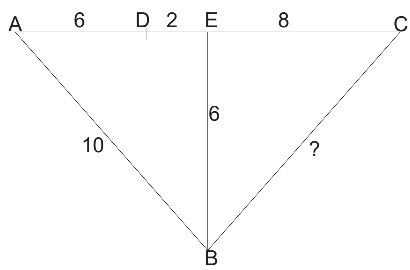
a) Determinați lungimea segmentului BC **fără să vedeți punctele desenate de Gigel;**

b) Executați desenul făcut de Gigel.

Prof. **D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: a) Din $AD+DE+EC=6+2+8=16=AC$, rezultă că punctele A,D,E şi C sunt coliniare. Deoarece $AB^2=10^2=6^2+8^2=BE^2+AE^2$, rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora că $BE\perp AE\Leftrightarrow BE\perp EC$. Din teorema lui Pitagora în triunghiul BEC rezultă $BC=10$ cm.

a) Gigel a făcut fie desenul din figură - în care punctul B este situat în jos față de dreapta AC, fie aceiaşi configurație a punctelor dar cu punctul B situat în sus față de dreapta AC .



▪ Clasa a VIII-a

G:413. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $|2a+2b+c|\le 1,\ |6a+3b+2c|\le 1,\ |15a+10b+6a|\le 1$. **Să se arate că** $|a+b+c|\le 15$. **Când avem egalitate ?**

***Prof.* Marcel Chiriță,** București

Rezolvare: Să determinăm trei numere reale x, y, z astfel încât
$x(2a+2b+c)+y(6a+3b+2c)+z(15a+10b+6a)=a+b+c$ de unde se obține sistemul

$$\begin{cases}2x+6y+15z=1\\ 2x+3y+10z=1\\ x+2y+\ 6z=1\end{cases}$$

. Rezolvând sistemul, se obține x = -7, y = -5; z = 3.

Aşadar, $a+b+c=-7(2a+2b+c)-5(6a+3b+2c)+3(15a+10b+6c)\Rightarrow$
$|a+b+c|\le 7|2a+2b+c|+5|6a+3b+2c|+3|15a+10b+6c|\le 15$. Dacă a = -5, b= -11, c = 31 avem egalitate.

G:414. Arătați că numărul $2011^{2013}+1$**, este compus.**

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Numărul $2011^{2013}+1=\left(2011^{671}\right)^3+1^3$, este divizibil cu $2011^{671}+1$.
Deci, $2011^{2013}+1$ este un număr compus.
Rezolvare alternativă: orice număr par mai mare decât 2 este compus.

G:415. Fie x, y **numere reale cu proprietatea** $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-6x+9}=\sqrt{10}$.
Aflați mulțimea valorilor pe care o ia expresia x^2+y^2.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Relația din enunț se mai scrie: $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{10}$. Această formă sugerează considerarea unui reper ortogonal (Oxy) şi punctele:
$O(0,0), A(0,1), B(3,1), C(3,0)$ care sunt vârfurile unui dreptunghi. Fie $P(x,y)$ un punct oarecare în plan.
Observăm că: $AP=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, $PC=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$, şi
$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Rezultă că $AP+PC=AC$, deci $P\in[AC]$.
Dar, $\sqrt{x^2+y^2}=OP$, şi prin urmare OP este minim dacă $P=P'$ = piciorul perpendicularei duse din O pe AC şi maxim dacă $P=C$. În concluzie:
$\frac{3}{\sqrt{10}}\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3$, şi deci $x^2+y^2\in\left[\frac{9}{10},9\right]$.
Nota Redacției: Am mai primit de la autor alte două soluții care folosesc cunoştințe de liceu.

G:416. Determinați reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\max(2008x-1,2010x+7),\ x\in\mathbb{R}.$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare:

$$\max(2008x-1,2010x+7)=\begin{cases}2010x+7,\ \ 2010x+7\ge 2008x-1\\ 2008x-1,\ \ 2008x-1\rangle 2010x+7\end{cases}=\begin{cases}2008x-1, x\in(-\infty;-4)\\ 2010x+7, x\in[-4;\infty)\end{cases}.$$

Se calculează $f(-4)=-8033,\ \ f(-5)=-10041,\ \ f(0)=7$. Graficul funcției f este reuniunea semidreptelor $(AB\cup[AC$, unde $A(-4;-8033), B(-5;-10041), C(0;7)$.

G:417. **Două întreprinderi economice au acelaşi număr de salariaţi . Prima îşi măreşte efectivul cu zece membri , urmare a sporirii capacităţii de producţie, a 2- a, cu 15 membri, urmare a extinderii pieței de desfacere. Media geometrică a efectivelor ulterioare este $5\sqrt{506}$. Aflați numărul inițial de salariați.**

Prof. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $(x+10)(x+15)=\left(5\sqrt{506}\right)^2 \Rightarrow x^2+25x-12500=0 \Rightarrow x\in\{100\}$.

▪ Clasa a IX - a

L:268. **Dacă $x^2+y^2=8xy,\ \ x,y\in\mathbb{R}_+^*$ atunci, să se calculeze $\left[\frac{x}{y}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.**

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Metoda I: Din $x^2+y^2=8xy\,\big|:y^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}\right)+1=0$. Notăm pe $\frac{x}{y}$ cu $t\rangle 0$ şi obținem $t^2-8t+1=0 \Rightarrow t=4+\sqrt{15} \Rightarrow t\approx 7{,}87 \Rightarrow \left[\frac{x}{y}\right]=7$.

Metoda a II-a: Cum $(x+y)^2=10xy,\ \ (x-y)^2=6xy \Rightarrow$

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sqrt{10xy}}{\sqrt{6xy}}=\sqrt{\frac{10}{6}}=\frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow 3x+3y=\sqrt{15}x-\sqrt{15}y \Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{3+\sqrt{15}}{3-\sqrt{15}}=\frac{24+6\sqrt{15}}{6}=4+\sqrt{15}$$

Atunci, $\left[\frac{x}{y}\right]=7$.

L:269. **Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\left[\frac{2x-1}{100}\right]=1961$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.**

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $\left[\frac{2x-1}{100}\right]=1961 \Rightarrow 1961\le\frac{2x-1}{100}\langle 1962 \Rightarrow x\in\left[\frac{196101}{2};\frac{196201}{2}\right)$.

$\Rightarrow x\in\{98051;98052;...,98100\}$.

L:270. **Suma a $2n$ numere întregi consecutive este înmulțită cu suma următoarelor $2n$ numere. Arătați că produsul obținut dă mereu acelaşi rest la împărțirea cu $4n^2$. (O extindere a unei probleme de concurs, Ungaria, 2010).**

Prof. **Nela Ciceu,** Roşiori, Bacău

Rezolvare: Fie a primul dintre cele $4n$ numere consecutive. Avem:

$$(a+a+1+...+a+2n-1)(a+2n+a+2n+1+...+a+4n-1)=$$
$$=(2na+1+2+...+2n-1)(2na+2n+2n-1+...+4n-1)=$$
$$=\left[2na+\frac{(2n-1)\cdot 2n}{2}\right]\cdot\left[2na+\frac{(2n+4n-1)\cdot 2n}{2}\right]=n^2(2a+2n-1)(2a+6n-1)=$$
$$=n^2\left[4a^2+2a(2n-1+6n-1)+(2n-1)(6n-1)\right]==4n^2\cdot a^2+4n^2\cdot a(4n-1)+4n^2(3n^2-2n)+n^2$$

Rezultă că pentru orice a restul este n^2.

L:271. Se dau cinci numere reale strict pozitive şi distincte. Calculând toate produsele formate din câte două dintre numerele date, obţinem şapte produse distincte. Să se arate că, luate într-o anumită ordine, cele cinci numere formează o progresie geometrică.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Fie $a < b < c < d < e$ cele cinci numere date. Calculând cele 10 produse formate din câte două numere, obţinem: (*) $ab < ac < ad < ae < be < ce < de$, adică avem deja şapte produse distincte. Dintre celelalte trei produse (bc, bd, cd), fiecare trebuie să fie egal cu un produs din inegalităţile (*). Observăm că nu putem avea decât $bd = ae$ şi apoi deducem că $bc = ad$, $cd = be$. Avem sistemul: $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}, \frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \frac{cd}{e} = b$, cu necunoscutele c, d, e. Rezultă $d = c\cdot\frac{b}{a}, e = d\cdot\frac{b}{a} = c\frac{b^2}{a^2}$, şi deci $c\cdot c\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{b^2c} = b \Rightarrow c = \frac{b^2}{a}$. Numerele date sunt: $a,\ a\cdot\frac{b}{a},\ a\cdot\frac{b^2}{a^2},\ a\cdot\frac{b^3}{a^3},\ a\cdot\frac{b^4}{a^4}$, adică o progresie geometrică cu raţia $\frac{b}{a}$.

L:272. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^3$ sistemul de ecuaţii: $[x]-y=[y]-x=2[z]-x=\frac{2010}{2011}$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.

***Prof.* D.M. Bătineţu – Giurgiu,** Bucureşti, **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Notăm $k=\frac{2010}{2011}$ şi sistemul devine: $\begin{cases} x = 2[z]-k \\ y=[x]-k \\ z=[y]-k \end{cases} \overset{0<k<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [x]=2[z]-1 \\ [y]=[x]-1 \\ [z]=[y]-1 \end{cases}$.

Avem din ultimele două ecuaţii: $[z]=([x]-1)-1=[x]-2$. Din ultima relaţie şi prima ecuaţie a sistemului echivalent rezultă: $[x]=2[x]-5 \Rightarrow [x]=5 \Rightarrow [y]=4 \Rightarrow [z]=3$. Din prima scriere a sistemului rezultă soluţia unică:

$$(x,y,z)=\left(6-\frac{2010}{2011};5-\frac{2010}{2011};4-\frac{2010}{2011}\right).$$

L:273. Se consideră numerele reale x, y şi z care verifică sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+xz=2 \end{cases}.\quad \textbf{Calculaţi } \max(x)+\min(x).$$

***Prof.* Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Din prima ecuaţie a sistemului deducem $y+z=3-x$, iar din a doua ecuaţie avem $yz=2-x(3-x)$. Dacă notăm $S=y+z$ respectiv $P=yz$ rezultă că y şi z sunt soluţiile ecuaţiei: $Y^2-SY+P=0$. Din faptul că ultima ecuaţie trebuie să aibă soluţiile reale rezultă condiţia:

$$S^2-4P\ge 0 \Leftrightarrow (3-x)^2 \ge 4(2-3x+x^2) \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} \le x-1 \le \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{3}} \le x \le 1+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$ Rezultă $\min(x)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}$ şi $\max(x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Deci: $\max(x)+\min(x)=2$.

L:274. Să se rezolve în $\mathbb{R}^n$ sistemul: $\begin{cases} 2x_1^2+2^2x_2^2+\ldots+2^nx_n^2=\frac{2^{n+2}}{2^n-1} \\ |x_1+x_2+\ldots+x_n|=2 \end{cases}$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Prima ecuație se scrie: $\dfrac{x_1^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\cdot\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x_2^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\cdot\dfrac{1}{2^2}}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\cdot\dfrac{1}{2^n}}=1$.

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^i}\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i}=\frac{2^2}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\dfrac{1}{2}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}}=1$$

, deci $1\geq 1$, adică egalitate.

Urmează că: $\dfrac{x_i}{\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i}=k$, $i=\overline{1,n}$, de unde scoatem pe x_i şi înlocuind în euația a doua deducem:

$$\left|k\cdot\frac{2^{n+2}}{2^n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right|=2\Leftrightarrow|k|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{2}.$$

Aşadar, soluția sistemului este: $\left\{\pm\dfrac{2^n}{2^n-1},\pm\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1},\pm\dfrac{2^{n-2}}{2^n-1},\pm\dfrac{2}{2^n-1}\right\}$.

L:275. Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0;\infty),n\geq 2$ **şi** $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=S$**. Arătați că** $\dfrac{x_1^3}{S-x_1^2}+\dfrac{x_2^3}{S-x_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^3}{S-x_n^2}\geq\dfrac{\sqrt{nS}}{n-1}$. **În caz avem egalitate?**

***Prof.* Lucian Tuțescu,Craiova, *Prof.* Ion Nedelcu**, Ploieşti

Rezolvare: Fie $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$.Atunci, $x_1^3\geq x_2^3\geq\ldots\geq x_n^3$ şi $\dfrac{1}{S-x_1^2}\geq\dfrac{1}{S-x_2^2}\geq\ldots\geq\dfrac{1}{S-x_n^2}$.

Din inegalitatea lui Cebâşev rezultă

$$\frac{x_1^3}{S-x_1^2}+\frac{x_2^3}{S-x_2^2}+\ldots+\frac{x_n^3}{S-x_n^2}\geq\frac{1}{n}(x_1^3+\ldots+x_n^3)\left(\frac{1}{S-x_1^2}+\ldots+\frac{1}{S-x_n^2}\right),\quad (*).$$

Avem, $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=\dfrac{x_1^4}{x_1}+\ldots+\dfrac{x_n^4}{x_n}\geq\dfrac{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2}{x_1+\ldots+x_n}=\dfrac{S^2}{x_1+\ldots+x_n}$.

Cum $n(x_1^2+\ldots+x_n^2)\geq(x_1+\ldots+x_n)^2\Rightarrow x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\geq\dfrac{S^2}{\sqrt{nS}}$, (1).

Folosind inegalitatea Cauchy- Buniakovski rezultă

$$(S-x_1^2+S-x_2^2+\ldots+S-x_n^2)\cdot\left(\frac{1}{S-x_1^2}+\ldots+\frac{1}{S-x_n^2}\right)\geq n^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{S-x_1^2}+\ldots+\frac{1}{S-x_n^2}\geq\frac{n^2}{S(n-1)},\quad (2).$$

Înmulțind (1) cu (2) se obține $\left(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right)\cdot\left(\dfrac{1}{S-x_1^2}+\ldots+\dfrac{1}{S-x_n^2}\right)\geq\dfrac{n^2\sqrt{S}}{(n-1)\sqrt{n}}$. Folosind (*)

rezultă $\dfrac{x_1^3}{S-x_1^2}+\dfrac{x_2^3}{S-x_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^3}{S-x_n^2}\geq\dfrac{\sqrt{nS}}{n-1}$. Egalitate avem pentru $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{\dfrac{S}{n}}$.

L:276. **Să se reprezinte într-un sistem de axe** xOy **mulțimea** $A=\{P(x,y)\,\|x+y|+|x-y|=1\}$.

***Prof.* Costică Ambrinoc**,Rm. Sărat

Rezolvare: Dacă (x,y) este o solutie a ecuatiei $|x+y|+|x-y|=1$ atunci şi $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ deci este suficient sa rezolvăm ecuația pentru $x\geq 0$ şi $y\geq 0$.

Pentru $x\geq y$ obținem $2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ deci perechile $\left(\frac{1}{2},y\right)$ cu $0\leq y\leq\frac{1}{2}$ sunt soluții.

Pentru $y\geq x$ obținem $2y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ deci perechile $\left(x,\frac{1}{2}\right)$ cu $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ sunt soluții.

Mulțimea A este frontiera unui pătrat cu centrul în origine şi cu vârfurile în punctele $M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $Q(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

L:277. **Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci:**

a) $\left(\sum a^2\right)^3=4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$; **b)** $\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^3\right) > 4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$.

***Prof.* Marcel Chiriță**, Bucureşti

Rezolvare: a) $\left(\sum a^2\right)^3=\sum a^6+6a^2b^2c^2+3\sum a^2b^4+3\sum a^4b^2=$

$=4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2+3(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)=4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$.

b) Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem $\left(\sum a\right)\left(\sum a^3\right)\geq\left(\sum a^2\right)^2\Big|\cdot\left(\sum a^2\right)\Rightarrow$

$\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^3\right)\geq\left(\sum a^2\right)^3=4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$. Inegalitatea este strictă deoarece triunghiul nu poate fi echilateral.

L:278. **Să se rezolve ecuația:** $\frac{a_1}{x-a_5}+\frac{a_2}{x-a_4}+\frac{a_3}{x-a_3}+\frac{a_4}{x-a_2}=4$, **ştiind că numerele** a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 **sunt în progresie aritmetică.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Ecuația se mai scrie:

$$\frac{a_1}{x-a_5}-1+\frac{a_2}{x-a_4}-1+\frac{a_3}{x-a_3}-1+\frac{a_4}{x-a_2}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1+a_5-x}{x-a_5}+\frac{a_2+a_4-x}{x-a_4}+\frac{2a_3-x}{x-a_3}+\frac{a_2+a_4-x}{x-a_2}=0\Leftrightarrow(2a_1+4r-x)\left(\frac{1}{x-a_5}+\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_4}+\frac{1}{x-a_3}\right)=0,$$

unde r este rația progresiei şi $a_1+a_5-x=a_2+a_4-x=2a_3-x=a\ \ +a_4-x=2a_1+4r-x$ .Obținem o primă soluție $x_1=2a_1+4r$. Pe de altă parte:

$$\frac{1}{x-a_5}+\frac{1}{x-a_4}+\frac{1}{x-a_3}+\frac{1}{x-a_2}=0\Leftrightarrow\frac{2x-a_2-a_5}{(x-a_5)(x-a_2)}+\frac{2x-a_3-a_4}{(x-a_3)(x-a_4)}=0\Leftrightarrow$$

$$(2x-2a_1-5r)\left(\frac{1}{(x-a_5)(x-a_2)}+\frac{1}{(x-a_3)(x-a_4)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$(2x-2a_1-5r)\cdot\frac{2x^2-2(2a_1+5r)x+2a_1^2+10a_1r+10r^2}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}=0,$$

de unde rezultă: $x_2=\frac{2a_1+5r}{2}$ şi $x_{3,4}=\frac{2a_1+5r\pm r\sqrt{5}}{2}$.

In concluzie, mulțimea soluțiilor $S=\left\{2a_1+4r,\frac{2a_1+5r}{2},\frac{2a_1+5r\pm r\sqrt{5}}{2}\right\}$.

L:279. **Să se arate că pentru orice trei numere reale pozitive a,b,c cu** $abc=1$ **are loc inegalitatea:**

$$\frac{a^{1005}b^{1005}}{a^{2013}+a^{1005}b^{1005}+b^{2013}}+\frac{b^{1005}c^{1005}}{b^{2013}+b^{1005}c^{1005}+c^{2013}}+\frac{c^{1005}a^{1005}}{c^{2013}+c^{1005}a^{1005}+a^{2013}}\le 1.$$ **Generalizare.**

***Prof.* Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Din $\left(a^{1007}-b^{1007}\right)\left(a^{1006}-b^{1006}\right)\ge 0,\forall a,b>0\Rightarrow a^{2013}+b^{2013}\ge a^{1006}b^{1006}\left(a+b\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{a^{1005}b^{1005}}{a^{2013}+a^{1005}b^{1005}+b^{2013}}\le\frac{a^{1005}b^{1005}}{a^{1005}b^{1005}+a^{1006}b^{1006}\left(a+b\right)}=\frac{a^{1005}b^{1005}}{a^{1005}b^{1005}\left(1+ab(a+b)\right)}=\frac{1}{1+ab(a+b)}=$$

$=\dfrac{c}{c+abc\left(a+b\right)}=\dfrac{c}{c+a+b}$. Din încă două inegalităţi similare, prin însumare, rezultă inegalitatea din enunţ. Generalizarea este următoarea:

Să se arate că pentru orice trei numere reale pozitive a,b,c cu $abc=1$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^{n-1}b^{n-1}}{a^{2n+1}+a^{n-1}b^{n-1}+b^{2n+1}}+\frac{b^{n-1}c^{n-1}}{b^{2n+1}+b^{n-1}c^{n-1}+c^{2n+1}}+\frac{c^{n-1}a^{n-1}}{c^{2n+1}+c^{n-1}a^{n-1}+a^{2n+1}}\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

L:280. **Se dă triunghiul ABC în care AC=2AB şi fie** $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ **astfel încât** $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$ **şi** $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$. **Să se determine raportul în care dreapta DE împarte bisectoarea unghiului A.**

***Prof.* Liviu Smarandache, *Prof.* Ionuț Ivănescu**, Craiova

Rezolvare:

Fie $(AA'$ bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ şi fie $\{P\}=DE\cap AA'$, $\{F\}=DE\cap BC$. Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ABC tăiat de transversala D-E-F, $\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DB}{DA}\cdot\frac{EA}{EC}=1\Rightarrow$

$\frac{FC}{FB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}=1\Rightarrow\frac{FC}{FB}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{FC}{FB-FC}=\frac{1}{6-1}\Rightarrow FC=\frac{BC}{5}$; (1)

Din teorema bisectoarei, avem $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BA'+A'C}{A'C}=\frac{1+2}{2}\Rightarrow A'C=\frac{2BC}{3}$; (2)

Din (1) şi (2) se obţine că $FA'=FC+CA'=\frac{13}{15}BC$. După aplicarea teoremei lui Menelaus în triunghiul ACA' tăiat de transversala P-E-F , $\frac{FA'}{FC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{PA}{PA'}=1$ rezultă $\frac{PA}{PA'}=\frac{9}{13}$.

L:281. **În exteriorul triunghiului echilateral** ABC **se construieşte triunghiul** BDC **astfel încât** $m(\widehat{BCD})=10^0$ **şi** $m(\widehat{CBD})=20^0$. **Să se demonstreze că triunghiul** ABD **este isoscel.**

***Prof.* Nela Ciceu,** Roşiori, Bacău

Rezolvare: Notăm $m(\widehat{DAC})=x$. Aplicând teorema sinusurilor obţinem:

$$\frac{BD}{\sin 10^0}=\frac{CD}{\sin 20^0}\Rightarrow CD=BD\cdot\frac{\sin 20^0}{\sin 10^0}=BD\cdot\frac{2\sin 10^0\cos 10^0}{\sin 10^0}$$, adică

(1) $CD=2\cdot BD\cdot\cos 10^0$. Mai avem: $\frac{CD}{\sin x}=\frac{AD}{\sin 70^0}\Rightarrow CD=\frac{AD\cdot\sin x}{\cos 20^0}$;

$\frac{BD}{\sin(60^0-x)}=\frac{AD}{\sin 80^0}\Rightarrow BD=\frac{AD\cdot\sin(60^0-x)}{\cos 10^0}$, şi atunci relaţia (1) se scrie succesiv:

$$\frac{\sin x}{\cos 20^0}=\frac{2\sin(60^0-x)}{\cos 10^0}\cdot\cos 10^0 \Leftrightarrow \sin x = 2\cos 20^0\sin(60^0-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 20^0\sin x = 2\sin 20^0\cos 20^0\sin(60^0-x)\Leftrightarrow \sin 20^0\sin x=\sin 40^0\sin(60^0-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-20^0)-\cos(x+20^0)=\cos(x-20^0)-\cos(100^0-x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(100^0-x)-\cos(x+20^0)=0\Leftrightarrow 2\sin 60^0\sin(40^0-x)=0.$$

Rezultă că $x=40^0$ şi $m(\widehat{ADC})=180^0-40^0-70^0=70^0$, deci ΔADC este isoscel cu $AD=AC$.

▪ Clasa a X - a

L:282. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia: $x^4+12x^2-36=7x^2\sqrt{x^2-3}$.

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare:

Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x^4}{x^2-3}-\frac{7x^2}{\sqrt{x^2-3}}+12=0$. Luăm $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}$ şi obţinem:

$(y-4)(y-3)=0$. Deci avem:

(i) $y=4$ sau $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=4$ sau $x^4-16x^2+48=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm 2$;

(ii) $y=3$ sau $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=3$ sau $x^4-9x^2+27=0\Rightarrow x_{5,6}=\pm\sqrt{\frac{9+3i\sqrt{3}}{2}}$, $x_{7,8}=\pm\sqrt{\frac{9-3i\sqrt{3}}{2}}$.

L:283. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ ecuaţia: $x^2-2x-3\sin y-4\cos y+6=0$.

Prof. D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{3}{5}\cdot\sin y+\frac{4}{5}\cdot\cos y=\frac{(x^2-2x+1)}{5}+1$.

Fie $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, unic astfel încât $\cos\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Deci, ecuaţia devine: $\sin(y+\alpha)=\frac{(x-1)^2}{5}+1$. Din, $-1\le\sin(y+\alpha)\le 1$, rezultă:

$$\begin{cases}\sin(y+\alpha)=1\Rightarrow y+\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=1\end{cases}.$$

Aşadar, soluţiile sunt: $(x,y)=(1,\frac{(4k+1)\pi}{2}-\arccos(\frac{3}{5}))$, unde $k\in\mathbb{Z}$.

L:284. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $2^{x^2-2x}+x^4-4x^3+4x^2+x-2=2^{x-2}$.

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare:

Funcţia $f(x)=2^x+x+x^2$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci injectivă.

Ecuaţia este echivalentă cu $f(x^2-2x)=f(x-2)$, aşadar $x^2-2x=x-2$ sau $x^2-3x+2=0$, de unde obţinem $x_1=1, x_2=2$. Prin urmare soluţia este $x\in\{1,2\}$.

L:285. **Fie x un număr strict pozitiv mai mare decât 1. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă are loc egalitatea** $x^{2\sin^2\frac{A}{2}}+x^{2\sin^2\frac{B}{2}}+x^{2\sin^2\frac{C}{2}}=3\sqrt{x}$ **. (Enunț corectat)**

Prof. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

Rezolvare: Dacă triunghiul este echilateral, egalitatea este evidentă. Reciproc.

$$3\sqrt{x}=\sum x^{2\sin^2\frac{A}{2}}\geq 3\sqrt[3]{x^{2\sum\sin^2\frac{A}{2}}}=3\sqrt[3]{x^{\sum(1-\cos A)}}=3\sqrt[3]{x^{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}}$$. Dar

$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}\Rightarrow 3\sqrt{x}\leq 3\sqrt[3]{x^{3-\frac{3}{2}}}=3\cdot x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}\Rightarrow$ că avem egalitate:

$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}\Rightarrow A=B=C$, adică triunghiul este echilateral.

L:286. **Rezolvați în** $\mathbb{R}_+^*$ **sistemul de ecuații :** $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y+x}=1\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{xyz}=36\end{cases}$

Prof. **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $x+y+z=1$.Din inegalitatea medie aritmetică-medie armonică rezultă: (1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=9$; iar din inegalitatea medie geometrică-medie armonică rezultă: (2) $\frac{1}{xyz}\geq\left(\frac{3}{x+y+z}\right)^3=27$. Din (1) şi (2) rezultă: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9=36-27\geq 36-\frac{1}{xyz}$, dar conform ecuației a doua a sistemului dat avem egalitate. Rezultă că egalitatea are loc pentru $x=y=z=\frac{1}{3}$ care este soluția sistemului.

L:287. **Se consideră numerele** $a,b,c\in R_+^*$ **astfel încât** $a+b+c=4$**,** $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=4$ **şi** $a\cdot b\cdot c\geq 2$**. Să se arate că** $(a^3+a^2+1)(b^3+b^2+1)(c^3+c^2+1)\leq 11^3$. **(Enunț corectat).**

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

Conform inegalității mediilor rezultă $\sqrt[3]{(a^3+a^2+1)(b^3+b^2+1)(c^3+c^2+1)}\leq\frac{\sum a^3+\sum a^2+3}{3}$. (*)

$\sum a^2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=4^2-2\cdot 4=8$.

$\sum a^3=a^3+b^3+c^3=3abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 3\cdot 2+4(8-4)=22$.

Rezultă, $\frac{\sum a^3+\sum a^2+3}{3}\geq\frac{22+8+3}{3}=11$. Din (*), rezultă

$$(a^3+a^2+1)(b^3+b^2+1)(c^3+c^2+1)\leq\left(\frac{\sum a^3+\sum a^2+3}{3}\right)^3=11^3.$$

L:288. **Să se demonstreze inegalitatea:**

$$C_n^1+2\sqrt{2}C_n^2+...+n\sqrt{n}C_n^n<n\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{n-1},\forall n\in N,n>1.$$

Prof. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Folosim identitatea: $1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}, \forall n \in N, n > 1$ şi aplicăm inegalitatea C-B-S pentru numerele $a_k = \sqrt{kC_n^k}, b_k = k\sqrt{C_n^k}, k = \overline{1,n}$. Obţinem:

$$(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n)(1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + ... + n^2 \cdot C_n^n) > (1\sqrt{1}C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 + ... + n\sqrt{n}C_n^n)^2$$

$$\Leftrightarrow (1\sqrt{1}C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 + ... + n\sqrt{n}C_n^n)^2 < (n \cdot 2^{n-1}) \cdot \left(n(n+1)2^{n-2}\right) = n^2(n+1)2^{2n-3}.$$

$$\Leftrightarrow C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 + ... + n\sqrt{n}C_n^n < n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}} \cdot 2^{n-1}$$, ceea ce încheie demonstraţia.

L:289. **Fie $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ numere strict pozitive astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq 1$ şi $a\rangle 1$ un număr real fixat. Să se arate că $x_1a^{x_1} + x_2a^{x_2} + x_3a^{x_3} + ... + x_na^{x_n} \geq \sqrt[n]{a}$.**

Prof. **Marcel Chiriţă**, Bucureşti

Rezolvare: Putem presupune datorită simetriei relaţiei că $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n$ de unde $a^{x_1} \geq a^{x_2} \geq a^{x_3} \geq ... \geq a^{x_n}, \ \forall a\rangle 1$. Din inegalitatea lui Cebâşev, aplicată celor două şiruri crescătoare obţinem $n(x_1a^{x_1} + x_2a^{x_2} + x_3a^{x_3} + ... + x_na^{x_n}) \geq \left(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n\right) \cdot \left(a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + ... + a^{x_n}\right) \geq$

$\geq a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + ... + a^{x_n}$, deoarece $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq 1$. (1)

Din inegalitatea mediilor obţinem:

$a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + ... + a^{x_n} \geq n\sqrt[n]{a^{x_1+x_2+...+x_n}} \geq n\sqrt[n]{a}$, deoarece $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq 1$. (2)

Din (1) şi (2) se obţine $x_1a^{x_1} + x_2a^{x_2} + x_3a^{x_3} + ... + x_na^{x_n} \geq \sqrt[n]{a}$ cu egalitate când $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}$

▪ Clasa a XI - a

L:290. **Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & -10 & * \\ -5 & * & 3 \end{pmatrix}$. Înlocuind asteriscurile cu numere întregi astfel încât după completare, suma tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil ?**

Prof. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Se notează cu x elementul de pe linia 3 coloana 2 şi se obţine $A = \begin{pmatrix} x+5 & 8 & x+13 \\ * & -10 & * \\ -5 & x & 3 \end{pmatrix}$

Cum $-5 + x + 3 = x + 5 + 8 + x + 13 \Rightarrow x = -28$, atunci, $A = \begin{pmatrix} -23 & 8 & -15 \\ -2 & -10 & -18 \\ -5 & -28 & 3 \end{pmatrix}$.

L:291. **Fie mulţimea $G = \left\{X \in M_2(\mathbb{C}) \middle| X^8 = O_2\right\}$. Arătaţi că dacă $X \in G$ atunci $X^2 = O_2$.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Berca, Buzău

Rezolvare:

Fie $X \in G \Rightarrow 0 = \det O_2 = \det X^8 = \det^8 X = 0 \Rightarrow \det X = 0$. Din Teorema Hamilton- Cayley,

$X^2 - TrX \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow X^2 - TrX \cdot X = O_2$.

$X^2 = TrX \cdot X \big| \cdot X^6 \Rightarrow X^8 = TrX \cdot X^6 \cdot X \Rightarrow X^8 = TrX \cdot Tr^3X \cdot X^3 \cdot X \Rightarrow$

$X^8 = Tr^4X \cdot Tr^2X \cdot X^2 \Rightarrow X^8 = Tr^7X \cdot X \Rightarrow$

$Tr^7X \cdot X = O_2 \Rightarrow Tr(Tr^7X \cdot X) = TrO_2 \Rightarrow Tr^8X = 0 \Rightarrow TrX = 0 \Rightarrow X^2 = O_2$.

L:292. **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 9}\left(x^{\sqrt{\log_x 5}}-5^{\sqrt{\log_5 x}}\right)$.

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $\lim\limits_{x\to 9}\left(x^{\sqrt{\log_x 5}}-5^{\sqrt{\log_5 x}}\right)=9^{\sqrt{\log_x 5}}-5^{\sqrt{\log_5 9}}=\left(9^{\log_9 5}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\log_9 5}}}-5^{\sqrt{\log_5 9}}=5^{\sqrt{\log_5 9}}-5^{\sqrt{\log_5 9}}=0$

L:293. **Fie şirul** $(a_k)_{k\geq 1}$**, definit prin** $a_{n+m}=a_n+a_m+mn$ **şi** $a_1=1$**. Calculaţi:**

a) a_{2013} **; b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{2n^3+3n^2+n}$.

Prof. **D.M. Bătineţu – Giurgiu,** Bucureşti, **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Pentru $m=1\Rightarrow a_{n+1}=a_n+a_1+n$.

Deci, $a_{2013}=a_{2012}+2013;\ a_{2012}=a_{2011}+2012;\ \dots;\ a_2=a_1+2$.

Sumând aceste egalităţi obţinem : a) $a_{2013}=a_1+2+3+\dots+2013=\dfrac{2013\cdot 2014}{2}$.

Procedăm ca la punctul a) şi obţinem : $a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

Se observă că : $2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$. Obţinem : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{2n^3+3n^2+n}=\dfrac{1}{12}$.

L:294. **Să se arate că şirul** $(a_n)_{n\geq 1}$ **definit prin**

$$a_n=\lim_{x\to-\infty}\frac{n\left(\sqrt[2n+1]{\frac{x^2}{3}+\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}+\sqrt[2n+1]{\frac{x^2}{3}-\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}\right)}{\sqrt[2n+1]{x^2}}$$ **este convergent.**

Prof. **Ionel Tudor,Călugăreni,** Giurgiu

Rezolvare: Arătăm că există $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ şi atunci şirul este convergent.

Avem succesiv: $a_n=n\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{x^2}}\left(\sqrt[2n+1]{\dfrac{x^2}{3}+\sqrt{\dfrac{x^3}{27}+\dfrac{x^4}{4}}}+\sqrt[2n+1]{\dfrac{x^2}{3}-\sqrt{\dfrac{x^3}{27}+\dfrac{x^4}{4}}}\right)=$

$$=n\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[2n+1]{\frac{1}{3}+\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}+\sqrt[2n+1]{\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}\right)$$

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x^3}{27}+\dfrac{x^4}{4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^4}\left(\dfrac{x^3}{27}+\dfrac{x^4}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{27x}}=\dfrac{1}{2}$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2n+1}} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2n+1}}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2n+1}}-1\right]-\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2n+1}}-1\right]}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2}\ln 5 \in \mathbb{R}$$

Rezultă că şirul este convergent.

▪ Clasa a XII - a

L:295. Fie $A=\{leu\ ;tigru\ ;urs\}$**. Pe A definim o lege de compoziție asociativă notată " $\circ$ " definită prin tabelul alăturat:**

a) Câte legi de compoziție comutative se pot defini pe A?

b) Care este elementul neutru al legii ?

c) Calculați $leu^{2013}=leu\circ\ leu\circ....\circ leu;\ (2013\ \ de\ \ leu)$**;**

d) Rezolvați ecuația $tigru\circ x\circ leu=urs$ **.**

0	leu	tigru	urs
leu	tigru	urs	leu
tigru	urs	leu	tigru
urs	leu	tigru	urs

Prof. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare:

a) Se pot defini 3^6 legi de compoziție pe A.

b) Elementul neutru este urs; c) $leu^{2013}=leu$ deoarece $leu^2=urs$ care este element neutru;

d) $leu\circ\left|tigru\circ x\circ leu=urs\right|\circ tigru \Rightarrow x=urs$;

L:296. Determinați numerele prime p astfel încât numărul $5^{p^2}+6^{p^2}$ **să se dividă cu p.**

Elevi Spătaru Andrei, Nicolaescu Andrei, Craiova

Rezolvare: Cum $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\ p)\Rightarrow 5^{p^2}=(5^p)^p\equiv 5^p\equiv 5(\mathrm{mod}\ p)$. Analog, $6^{p^2}\equiv 6^p\equiv 6(\mathrm{mod}\ p)$.

Rezultă, $5^{p^2}+6^{p^2}\equiv 11(\mathrm{mod}\ p)$ de unde rezultă p=11.

L:297. Fie $(A,+,\cdot)$ **un inel în care** $1\neq 0$ **şi din** $xy=1$ **rezultă** $yx=1$**. Dacă** $a,b\in A$**, şi există** $u\in A$**,** u **inversabil cu** $ua=au, ub=bu$ **astfel încât** $uab+a+b=0$ **atunci:** $ab=ba$ **.**

Prof. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Conform enunțului avem $(1)\,uab+a+b=0$. Din (1) deducem că:

$u^2ab+ua+ub=0 \Leftrightarrow u^2ab+ua+ub+1=1 \Leftrightarrow uaub+ua+ub=1=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ua(ub+1)+(ub+1)=1 \Leftrightarrow (ua+1)(ub+1)=1$, de unde conform enunțului rezultă că

$(ub+1)(ua+1)=1 \Leftrightarrow ubua+ub+ua+1=1 \Leftrightarrow ubua+ub+ua=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^2ba+ub+ua=0 \Leftrightarrow u(uba+a+b)=0$, şi deoarece u este inversabil obținem că

$(2)\,uba+a+b=0$. Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $uba=uab$, de unde prin simplificare la stânga cu elementul inversabil u obținem că $ab=ba$.

L:298. Fie x_1,x_2,x_3 **rădăcinile ecuaţiei** $x^3-10x^2+28x-18=0$. **Să se arate că** $\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[4]{x_3}>3$.

Prof. **Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

Arătăm mai întâi că rădăcinile ecuaţiei sunt toate reale şi pozitive. Pentru aceasta considerăm funcţia continuă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-10x^2+28x-18$.

Cum $f(0)=-18<0, f(1)=1>0, f(3)=3>0, f(4)=-2<0, f(5)=-3<0, f(6)=6>0,$ deducem că rădăcinile ecuației sunt toate reale, pozitive, diferite şi situate în intervalele $(0,1),(3,4),(5,6)$. Din inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[4]{x_3}=\frac{1}{2}\sqrt{x_1}+\frac{1}{2}\sqrt{x_1}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x_2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x_2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x_2}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{x_4}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{x_4}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{x_4}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{x_4}>$$

$$>8\sqrt[8]{\frac{x_1x_2x_3}{2^2 3^3 4^4}}=\sqrt[8]{\frac{8^8\cdot 18}{2^2 3^3 2^8}}=\sqrt[8]{\frac{2^{24}\cdot 2\cdot 3^2}{2^{10}\cdot 3^3}}=\sqrt[8]{\frac{2^{15}}{3}}=\sqrt[8]{\frac{\left(2^5\right)^3}{3}}>\sqrt[8]{\frac{\left(3^3\right)^3}{3}}=\sqrt[8]{3^8}=3$$

deoarece $x_1x_2x_3=18$.

$\boxed{\text{L:299}}$. **Să se calculeze:** $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x+\cos x}{(1+\sin x+\cos x)^n}dx\,,n\in N$.

Prof. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Pentru $n=0$, obținem $I=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Pentru $n=1$ se foloseşte substituția $x=\frac{\pi}{2}-t$ şi obținem $I=\frac{\pi}{12}$. Pentru $n=2$, obținem: $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1+\sin x+\cos x)^1}dx$, iar cu substituția $tg\frac{x}{2}=u$, avem $I=\int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1+u}du=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}$. Pentru $n>2$, obținem:

$$I=\int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(1+u)^{n-1}}du=\frac{1}{2(2-n)}\cdot\frac{3^{n-2}(3-\sqrt{3})^{n-2}-(3+\sqrt{3})^{n-2}}{6^{n-2}}$$. În concluzie:

$$I=\begin{cases}\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{pt. } n=0\\ \frac{\pi}{12}, \text{pt. } n=1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \text{pt. } n=2\\ \frac{1}{2(2-n)}\cdot\frac{3^{n-2}(3-\sqrt{3})^{n-2}-(3+\sqrt{3})^{n-2}}{6^{n-2}}, \text{pt. } n>2\end{cases}.$$

$\boxed{\text{L:300}}$. **Să se arate că funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2 & ,x\langle 1\\ \sqrt{x^2-6x+9}, & x\geq 1\end{cases}$ **admite primitive. Să se scrie o primitivă a lui f pe** $\mathbb{R}$.

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Cum $f(x)=\begin{cases}2 & ,x\langle 1\\ -x+3 & ,1\leq x\langle 3\\ x-3 & ,3\leq x\end{cases}$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ ceea ce înseamnă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

O primitivă F a lui f are forma $F(x)=\begin{cases} 2x & ,x\langle 1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x+c_1 & ,1\le x\langle 3 \\ \dfrac{x^2}{2}-3x+c_2 & ,x\ge 3 \end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui F rezultă $2=-\frac{1}{2}+3+c_1$ şi $-\frac{9}{2}+9+c_1=\frac{9}{2}-9+c_2$ de unde $c_1=-\frac{1}{2}$ şi $c_2=\frac{17}{2}$.

Să râdem cu ….. EINSTEIN

Celebrul fizician german Einstein, refugiat în SUA în 1933 din cauza antisemitismului german, a fost întrebat de către unul din admiratorii săi:
- Cum se nasc oare marile descoperiri care revoluționează ştiința ?
- Cît se poate de simplu, răspunse Einstein. Toată lumea ştie că este imposibil să explici un anume fenomen. Ei bine, câteodată se găseşte câte un ignorant care încă n-a aflat acest lucru.

- Cum nu ții minte viteza sunetului ? se miră Max Plack de ignoranța lui Einstein.
- Nu are rost să şin minte ceea ce se poate găsi în orice manual, iar cea ce țin eu minte încă nu se găseşte în nici un manual, răspunse savantul.

- În ce zi suntem astăzi ? întrebă Einstein.
- Uită-te în ziar, îi răspunse soția.
- Inutil, e de ieri.

Când sosi în America, soția îl sfătui pe Einstein să-şi cumpere un palton nou.
- Nu are rost, aici nu mă cunoaşte nimeni, îi răspunse savantul.
După un an, soția stăruieşte pe lângă el să-şi cumpere totuşi un palton nou.
- Acum chiar că nu are niciun rost, deoarece mă cunoaşte toată lumea aici.

„ Înțelepciunea este punctul de plecare dintre îndoială şi certitudine".
Leonid Sukhorukov

4. Probleme propuse

▪ Învățământ primar

P:267. Un elev a citit într-o zi două patrimi din numărul paginilor unei cărți, a doua zi trei cincimi din rest, iar a treia zi trei pătrimi din noul rest. Pentru a patra zi, i-au mai rămas 5 pagini de citit.
Câte pagini avea cartea? ***Prof.*** **Maria Anton** , Berca

P:268. Din 24 kg de cireşe se pot obține 6 kg de dulceață. Câte kg de cireşe sunt necesare pentru a obține 10 kg de dulceață?

Prof. **Nicoleta Loredana Clinciu,** Mihăileşti

P:269. 7 lăzi cu mere şi 5 lăzi cu pere cântăresc 600 kg, iar 7 lăzi cu mere şi 12 lăzi cu pere cântăresc 901 kg. Aflați cât cântăreşte o ladă cu mere şi cât cântăreşte o ladă cu pere .

Prof. **Cornelia Mihaela Luca,** Mihăileşti

P:270. Trei frați au economisit împreună suma de 1992 de lei. Să se afle suma economisită de fiecare ştiind că primul a economisit cu 20 de lei mai mult decât al doilea, iar al treilea a economisit jumătate din suma economisită de primii doi.

Prof. **Cristian-Cosmin Lupşan,**Buzău

P:271. Produsul a patru numere naturale este 18, iar suma lor este mai mică decât 10. Care sunt numerele?

Înv. **Ion Lupşan,**Berca

P:272. Bunica are 84 de ani. Cei trei nepoți au 24, 16, respectiv 12 ani. După cât timp bunica va avea vârsta egală cu suma vârstelor nepoților?

Prof. **Nicoleta-Gabriela Lupşan,**Berca

P:273. Într-o campanie de colectare a deşeurilor, elevii claselor I-IV ai unei şcoli au colectat 8500 de peturi. Elevii clasei a II-a au colectat cu 200 de peturi mai mult decât elevii clasei I, elevii clasei a III-a de 3 ori mai mult decât elevii clasei a II-a, iar elevii clasei a IV-a de 2 ori mai mult decât elevii clasei I. Câte peturi a colectat fiecare clasă?

Prof. **Gabriela Marinescu,**Vadu Paşii

P:274. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, pentru un Centru de Plasament se pregătesc pachete. Dacă s-ar pune câte 5 banane în fiecare pachet, rămâne 1 banană. Dacă s-ar pune câte 4 banane în fiecare pachet, ar rămâne 41 de banane. Câte banane sunt şi câte pachete se fac?

Prof. **Daniela Ticea,** Buzău

P:275. Ina îi spune Anei:
- Dacă îmi dai 5 jucării, voi avea de trei ori mai puține decât tine. Făcând calculul, Ana îi răspunde:
- Ai calculat corect!
Câte jucării are fiecare, dacă împreună au 36 de jucării?

Prof. **Marioara Vrabie,** Berca

P:276. Suma a 63 de numere naturale diferite de zero este 2011. Arătați că cel puțin două numere sunt egale. ***Prof.*** **Doina şi Mircea Mario Stoica,** Arad

P:277 Într-o livadă sunt 160 de meri, peri şi pruni. Numărul prunilor este cu 20 mai mare decât al merilor, iar al perilor cu 6 mai mic decât al prunilor. Câți pomi sunt de fiecare fel ?

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

P:278. Veverițele Chip şi Dale au strâns 88 de alune. Câte alune a strâns fiecare, dacă jumătate din numărul alunelor (lui) strânse de Chip fac cât trei cincimi din numărul alunelor (lui) strânse de Dale ?

Prof. **Adrian Stan,** Buzau

P:279. Diferența dintre dublul unui număr şi triplul sfertului său este 5555 . Care este numărul ?

Prof. **Marin Marcela,** Rm. Sărat

P:280. Într-o lună, trei duminici sunt în zile pare. În ce zi a săptămânii, pică ziua de 19 a lunii.

Prof. **Claudia Popa, Berca,** Buzău

P:281. La o florarie s-au adus 19 garoafe, zambile cu 21 mai multe decat diferenta dintre 20 si vecinul mai mic al lui 11, iar lalele cu 15 mai puține decat suma garoafelor si zambilelor mărită cu 7. Câte flori s-au adus la florarie?

Prof. Mirela Axente, Buzău

▪ Clasa a V-a

G:386. Determinați toate numerele naturale a pentru care există exact 2014 numere naturale b care verifică relația: $2 \le \frac{a}{b} \le 5$.

Prof. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:387. Fie $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ...... \cdot 49$ şi $C = 24 \cdot 14641$. Arătați că C divide B.

Prof. **Petre Păunescu,** Roşiorii de Vede

G:388. Calculați :

$$\left\{\left\{\left\{\left[(1+2+3+...+200):201\right]^{888} \cdot 10^{231} : 100000^{401}\right\} - 19\right\} : 3^4 - 1\right\} \cdot (101 \cdot 102 \cdot 103)^{104} + (2007-1997)^0 \cdot 100.$$

Prof. **Simion Marin ,** Rm. Sărat

G:389. Arătați că numărul $A = 100^{2013}$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

Prof. **Gheorghe Struțu ,** Buzău

G:390. Aflați restul împărțirii numărului $287^{289} + 4017$ la 2009.

Prof. **Mircea Mario Stoica,** Arad

G:391. Arătați că dacă S este suma divizorilor naturali ai numărului 2010 atunci 34S este pătrat perfect și 1734S este cub perfect.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:392. 60 de muncitori, lucrând câte 8 ore pe zi, au pavat un drum de lungime 900 m în 12 zile. Câți muncitori pot pava în 10 zile, lucrând câte 6 ore pe zi, un drum lung de 1200 metri?

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

G:393. Aflați numărul natural $\overline{xy}$, astfel încât $\left(\frac{\overline{xy}+\overline{yx}}{x+y}\right)^2 . \overline{xy} = 1573$.

Prof. **Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

G:394. a) Găsiți trei numere naturale nenule şi diferite care să verifice egalitatea $5a - 11b + 6c = 0$;
b) Arătați că oricare ar fi numerele naturale nenule şi diferite a, b, c, astfel încât, să aibă loc egalitatea $5a - 11b + 6c = 0$, numărul $A = (a-c)(b-c)$ se divide cu 55 .

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:395. Determinați numerele naturale x şi y dacă $7x^5 + 39y^3 = 2013$.

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

G:396. Aflați toate numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc}$=(a+b+c-9)(a+b+c-8)(a+b+c-7)

Prof. **George-Florin Şerban**, Brăila

G:397. Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175. Aflați numărul. (În legătură cu problema S:E13.90 din SE al G.M.-B.– martie 2013).

Titu Zvonaru, Comăneşti

▪ Clasa a VI-a

G:398. Rezolvați în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuația $x+48+|25-y|=2009-10^{y-1}$.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:399. Aflați restul împărțirii numărului $x=2074^{2013}-94^{2013}+2046^{2013}$ la 2013.

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

G:400. Raportul a două numere este egal cu $\frac{1}{4}$, iar suma lor este tot $\frac{1}{4}$.

a) Aflați cele două numere ;

b) Împărțiți numărul $\frac{1}{4}$ în părți invers proporționale cu numerele determinate la punctul a) c) Împărțiți numărul $\frac{1}{4}$ în părți direct proporționale cu numerele determinate la punctul a)

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:401. Arătați că printre orice 305 numere naturale, două câte două coprime cuprinse între 2 și $2010\cdot 2011$ există cel puțin un număr prim.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

G:402. Fie numerele *a, b, c, d, e, f* astfel încât $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+f}+\frac{f}{f+a}=\frac{15}{13}$, aflați numărul $m=\frac{a}{a+f}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{e}{d+e}+\frac{f}{e+f}$

Prof. **Iuliana Trașcă**, Scornicești, Olt

G:403. Fie triunghiul ABC cu $BC=1,\ AB=a,\ AC=b$ unde $a,b\in\mathbb{N}^*$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Prof. **Mariana Mărculescu**, Craiova

G:404. În triunghiul ABC avem : D$\in$(BC) astfel încât m($\measuredangle BAD$) $=30^0$ și m($\measuredangle ADB$) $=50^0$, E$\in(AC)$ astfel încât m($\measuredangle ABE$) $=50^0$. Știind că $\{F\}=AD\cap BE$ și m($\measuredangle ACB$) $=20^0$, arătați că m($\measuredangle$ FCB) $=10^0$.

Prof. **Simion Marin**, Rm. Sărat

Clasa a VII-a

G:405. Să se scrie numărul $6033\cdot 2012$ ca diferență de două produse de câte trei factori, numere naturale consecutive.

Prof. **Nicolae Ivășchescu**, Craiova

G:406. Arătați că $\left(\frac{2010}{1001}\right)^4+\left(\frac{2010}{1009}\right)^4 > 32$.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:407. Determinați $x\in\mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{4x^2+9x+7}\in\mathbb{N}$.

Prof. **Iuliana Trașcă,** Scornicești, Olt

G:408. În primul an, din lotul de n semințe al unei stațiuni de cercetare agricolă, nu a încolțit o sămânță. În anul următor, din n – 1 semințe de același fel, nu a încolțit o sămânță. Situația se repetă x ani, după care experimentul înregistrează încolțirea 100 %.

Aflați x, dacă suma semințelor încolțite în intervalul respectiv este $3\left(n-\frac{x+1}{2}\right)$

Prof. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:409. Aflați numerele naturale $x,\ y$ şi numărul prim p care verifică relația: $x^2 - p^y = 1$.

Neculai Stanciu, Buzău **şi Titu Zvonaru,** Comăneşti

G:410. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu aria 3 (u.a.) şi punctele M, respectiv N cu $M \in (AB), N \in (BC)$ astfel încât aria triunghiului MND este 1 (u.a). Determinați minimul sumei $AM + CN$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:411. Într-un triunghi ABC, $M \in (BC)$ şi $m(\widehat{BAM}) = 25^0$, iar $m(\widehat{CAM}) = 30^0$, $N \in (AC)$ şi $m(\widehat{ABN}) = 45^0$, iar $m(\widehat{CBN}) = 55^0$. Arătați că latura (AB) este media geometrică a segmentelor (AM) şi (BN).

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

• Clasa a VIII-a

G:412. Scrieți numărul numărul $2011^{2012} + 4^{2013}$ ca produs de doi factori.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:413. Determinați $x \in N^*$ pentru care este adevărată egalitatea:

$$\left(3^{2^n} + 2^{2^n}\right)\cdot\left(3^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(3^{2^2} + 2^{2^2}\right)\cdot\left(3^2 + 2^2\right)\cdot(3+2) = 6561^{256} - 256^{256}.$$

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

G:414. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(f(x)) = 2009x - 2008$. Arătați că $f(1) = 1$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica,** Arad

G:415. Cercetați dacă max $\max(-x^2 + 5x + 7)$ aparține intervalului $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$.

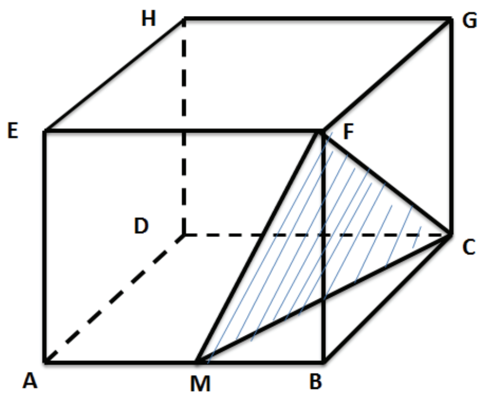
***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni,Buzău

G:416. Să se arate că pentru nici o valoare întreagă a lui n, raportul $\frac{n^3 + n^2 + n + 2}{n^3 - n + 3}$, nu este număr întreg.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:417. În cubul ABCDEFGH de muchie **a** se consideră M mijlocul lui $[AB]$. Să se determine distanța de la H la planul (FMC).

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău



G:418. Fie cubul ABCDA'B'C'D' şi $M \in (BB')$. Precizați poziția lui M pe muchia (BB') dacă

$$\cos\left(m\left[\widehat{(ADM),(ABC)}\right]\right) = \frac{4}{5}.$$

***Prof.* Gheorghe Dârstaru,** Buzău

G:419. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC având cateta AB = 12 cm şi ipotenuza BC = $6\sqrt{13}$ cm , se ridică perpendiculara BM = 10 cm . Calculați :

a) Distanța de la M la AC ;

b) Distanța de la M la centrul de greutate al triunghiului .

***Prof.* Simion Marin** , Rm. Sărat

• Clasa a IX-a

L:268. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile $(4a-10)x^2+(a-8)x+3=0$ şi $(b+8)x^2-(2b+19)x+9=0$ să aibă aceleaşi soluții. ***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:269. Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|\frac{x}{x^2+3x+3}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$. ***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:270. Fie x,y,z numere reale, $z<0, x\neq 0$, astfel încât $|y|<2\sqrt{xz}$. Să se demonstreze inegalitatea: $x(x^2+y^2+z^2)+y(x+y+z)+3z<0$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:271. Fie $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $\frac{\sin^3 x}{5}+\frac{\cos^3 x}{12}\geq\frac{1}{13}$.

***Prof.* Ana Cismaru,** Malu Mare, Dolj

L:272. Arătați că $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+.........+\frac{1}{2n^2+2n+1}\langle\frac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Prof. Nicoleta Bran, Craiova

L:273. Ştiind că $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ și $x<y$, să se compare numerele : $a=\frac{y^3}{x}$ și $b=2x^2+xy+y^2$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

L:274. Să se arate că dacă x, y, u, v $\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2=9$ şi $u^2+v^2=36$, atunci $xu+yv\in[-18;18]$. ***Prof.* Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

L:275. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră numerele în progresie aritmetică: $1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}}$, $2+2\sqrt{\sqrt{n+1}}$, $1+\sqrt{n+1}$. Să se determine rația progresiei.

***Prof.* Ionel Tudor,**Călugăreni,Giurgiu

L:276. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $m\cdot f(x-1)+n\cdot f(-x)=3x+7$. Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(2)=-5,\ f(-3)=4$. ***Prof.* Claudia Popa**, Berca, Buzău

L:277. Dacă $x_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \forall k=\overline{1,n}$, atunci arătați că $\left(\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k+2tgx_k)\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}>3n^2$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:278. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare :

a) $GI^2=\frac{2}{9(a+b+c)}$[(a–b)(a–c)(p–a)+(b–a)(b–c)(p–b)+(c–a)(c–b)(p–c)].

b) $GI^2=\frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr)$. ***Prof.* Marcel Chiriţă**, Bucuresti

L:279. Fie a,b,c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea: $48(a+b+c)\leq(a^2+b^2+c^2+9)^2$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

• Clasa a X-a

L:280. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+14x+42$. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $f(f(f(f(f(x)))))=0$.

Prof. **Dana Camelia, Didu Ileana,** Craiova

L:281. Fie $x,y,z\rangle 0$. Arătați că $\dfrac{(x+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(yz)^2}+1}+\dfrac{(y+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(xz)^2}+1}+\dfrac{(z+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(xy)^2}+1}\geq 3$.

În ce caz avem egalitate ?

Prof. **Gabriel Tica,** Băileşti, *Prof.* **Lucian Tuțescu,** Craiova

L:282. Să se rezolve ecuația $\log_x{}^2 7-\log_{\sqrt{7}}\dfrac{1}{x}-\log_{\frac{1}{7}}\sqrt[3]{x}+\dfrac{4}{3}=0$.

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

L:283. Folosind eventual identitățile $x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$, rezolvați ecuațiile:

a) $3^{3x}-13\cdot 3^x+12=0$;

b) $\lg x+\lg(x^2+25x)=\lg(x+1)+\lg(25x-12)$.

Prof. **Constantin Dinu,** Buzău

L:284. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}2^x+2^{x+y}+2^y=5\\ 2^y+2^{y+z}+2^z=7\\ 2^z+2^{x+z}+2^x=11\end{cases}$.

Prof. **Struțu Gheorghe,** Buzău

L:285. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: $7^x=3^y+100$.

Prof. **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

L:286. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ şi numerele reale $a>b>0$ pentru care $(a-b)^n=a+b$.

Să se arate că: a) $\sqrt[n+1]{a^2-b^2}=\sqrt[n]{a+b}$; b) $\dfrac{(a-b)^{2n+1}}{\sqrt[n+1]{a^2-b^2}}$ este pătratul unui binom.

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:287. Rezolvați ecuația $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{\ln x(x-1)}}-2=\dfrac{\sqrt{\ln x(x-1)}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Prof. **Petre Păunescu**, Roşiorii –de -Vede

L:288. Se consideră mulțimile $A_1=(-\infty,\alpha]$ şi $A_2=[\beta,+\infty)$, unde $\alpha=x^2y^2+9x^2+4y^2+36$, $\beta=(xy+6)^2$, iar x,y numere reale. Să se arate că:

1) a) $A_1\cap A_2\neq$ mulțime vidă, $\forall x,y\in R$; b)Precizați relația dintre x şi y pentru care $\alpha=\beta$;

2) Aflați valorile lui x şi y pentru care $A_1\cap A_2=[49,50]$.

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:289. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}=15\\ 3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}=3^{30}\end{cases}$$

Prof. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

• Clasa a XI-a

L:290. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, suma primilor n termeni este $S_n = \frac{4n^2+8n}{3}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n\cdot a_n}$. *Prof.* **Adrian Stan,** Buzău

L:291. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1=3, x_2=2$, $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}+x_n}$, $n\geq 1$.

a) Arătați că $x_n \leq 2+\frac{1}{n}, \forall n\geq 1$;

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti, *Prof.* **Lucian Tuțescu,** Craiova

L:292. Se consideră dezvoltarea $(X-3)^{10} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{10}X^{10}$. Să se calculeze $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 10a_{10}$. *Prof.* **Florentina Popescu,** Buzău

L:293. Se consideră funcția $f: D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{3+|x-3|}{3-|x-3|}}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție a funcției şi să se studieze continuitatea lui f pe această mulțime.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-3|}}$. Prof. **Constantin Dinu,** Buzău

L:294. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ inversabilă. Arătați că a) Dacă $AB^{-1}=I_n+BA^{-1}$ atunci $A-B$ este inversabilă.

b) Dacă $BA^{-1}=I_n+AB^{-1}$ atunci $A+B$ este inversabilă.

Prof. **Otilia Drăgan,** *Prof.* **Ovidiu Ciuponea,** Craiova

L:295. Fie $x,y,z\rangle 0$ cu $x+y+z=1$. Arătați că:

a) $(x+y)^z\cdot(y+z)^x\cdot(z+x)^y \leq \frac{2}{3}$;

b) $x^{y+z}\cdot y^{z+x}\cdot z^{x+y}\leq\frac{1}{9}$; **Prof. Ion Nedelcu,** Ploieşti, **Prof. Lucian Tuțescu,** Craiova

L:296. Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, $0\langle a\langle b$ de două ori derivabilă şi $\sqrt{a}f(b)+\sqrt{b}f(a)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)f(\sqrt{ab})$.

Arătați că există $c\in(a;b)$ astfel încât $f''(c)=0$.

Prof. **Liviu Smarandache, Ramona Puchiu**, Craiova

L:297. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 2^x+x=3^y \\ 2^y+y=3^x \end{cases}$. *Prof.* **Aurel Chiriță,** Slatina

L:298. Fie curba de ecuație $\alpha x^2 y = 2x-2$, $\alpha\rangle 0$. Prin punctul de inflexiune se duce o perpendiculară pe o dreaptă variabilă ce trece prin origine. Să se afle locul geometric al intersecției.

Prof. **Claudia Popa**, Berca, Buzău

• Clasa a XI-a

L:299. Fie $f: M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, $f(x) = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ -1 & a+4 \end{pmatrix} \cdot X$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât f să fie automorfism al grupului $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:300. Se consideră funcţiile $f, F: (1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+1} - \ln(1-\frac{1}{x})\right)$, iar $F(x) = \frac{1}{x}\ln(1-\frac{1}{x})$.

a) Demonstraţi că F(x) este o primitivă a lui f(x);

b) Calculaţi $\int_2^e f(x) \cdot F(x) dx$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:301. Să se calculeze: $I(a) = \int \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 + a} dx$, $a \in R$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:302. Să se calculeze: $\int_{-1}^{1} \frac{a + \arccos x}{1 + x^2} dx$, unde $a > 0$.

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:303. Aflaţi primitivele funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2010)^{2011}}$.

***Prof.* Liviu Smarandache, Ivănescu Ionuţ,** Craiova

L:304. Să se calculeze integrala $\int_0^2 \frac{4x^3 + 6x^2 + 8x + 3}{(x^2 + x + 1)^3} dx$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:305. Fie $a \in \mathbb{R}_+$. Să se arate că $\int_{-a}^{a} \lg(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x) dx = 0$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:306. Să se rezolve în R ecuaţia: $8x^6 - 3x\sqrt{x} - 1 = 0$.

***Prof.* Ionel Tudor,**Călugăreni,Giurgiu

DIN CUGETĂRILE LUI MOISIL

„Eu cred că omul trebuie să caute să găsească plăcerea în însăşi munca lui. Consider că munca e o pedeapsă, numai dacă omul nu se află la locul potrivit, dacă face altceva decât îi place."

„Se ştie că o idee începe prin a fi un paradox, continuă prin a fi o banalitate şi sfârşeşte prin a fi o prejudecată."

„Întrebările la care trebuie să răspunzi cel mai sincer sunt cele pe care ţi le pui singur."

„Scaunele prezidenţiale sunt periculoase: au un microb care se urcă la cap."

''Mathematicians are born, not made''
Henri Poincare

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before December 31, 2013.

PROPOSALS - QUICKIES

Q5. Proposed by: D.M. Bătinețu-Giurgiu, and Neculai Stanciu, Romania.
Show that: if $m \in [0,\infty)$, $x,y,z,t \in (0,\infty)$, then in any triangle ABC, with usual notations holds the inequality $\sum_{cyclic} \frac{(xa^2 + ym_b^2)^{m+1}}{(zh_c^2 + th_a^2)^m} \geq \frac{(4x+3y)^{m+1}}{3^{m-\frac{1}{2}}(z+t)^m} S$.

Q6. Proposed by: Titu Zvonaru, Comăneşti, and Neculai Stanciu, Romania.
How many digits has the number 2^{96}?

Q7. Proposed by: Mihály Bencze, Braşov, Romania.
Solve in positive real numbers the equation

$$\log_2^2\left(x+\frac{4}{x}\right)+x+\frac{4}{x}=(-x^2+4x-2)^2+2^{-x^2+4x-2}.$$

Q8. Proposed by: Babis Stergiou, Greece
Find two even and continuous functions $f,g: R \to R$ with $f(1)=g(1)$ and in addition with the properties: $3\int_0^x f(t)dt = xg(x)$ and $3\int_0^x g(t)dt = xf(x)$ for all $x \in R$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q1. Proposed by: Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.
Let $v_1 = 1, v_2 = 1, v_{n+1} = 8v_n - v_{n-1}$, for $n \in \{2,3,4,...\}$. Prove that v_n is divisible by 7 if and only if n is divisible by 3.

Solution to Q1 by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.
$v_{(n+1)} + v_{(n-1)} = 8v_n \Rightarrow v_{(n+1)} + v_{(n-1)} \equiv v_n (\bmod 7)$. Therefore $v_3 + v_1 \equiv v_2 (\bmod 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow v_3 + 1 \equiv 1 (\bmod 7) \Rightarrow v_3 \equiv 0 (\bmod 7)$. One has $v_4 + v_2 \equiv v_3 (\bmod 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow v_4 + 1 \equiv 0 (\bmod 7) \Rightarrow v_4 \equiv 6 (\bmod 7)$. One obtain $v_5 + v_3 \equiv v_4 (\bmod 7) \Rightarrow v_5 \equiv 6 (\bmod 7)$.
One prove, by induction, that $v_1 \equiv v_7 \equiv v_{(1+6k)} \equiv 1, v_2 \equiv v_{(2+6k)} \equiv 1$, $v_4 \equiv v_{(4+6k)} \equiv 6$ and $v_5 \equiv v_{(5+6k)} \equiv 6$ for any $k \in \mathbf{N}$. Consequently, one has $v_{(3k)} \equiv 0 (\bmod 7)$, as desired. ■

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, and by author.

Q2. Proposed by: Mihály Bencze, Braşov, Romania.
Solve in positive real numbers the equation:

$$\log_2\left(\frac{\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{3x^2-2x^3}\right)=2^{3x^2-2x^3}-x-\frac{1}{x}.$$

Solution to Q2 Marius Drăgan, Bucharest, Romania.
The function $f(x)=\log_2 x+2^x$ is strictly increasing, for any $x>0$, so is injective, so the given equality is equivalent to: $f\left(\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)=f(3x^2-2x^3)$. Therefore, $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3x^2-2x^3$, and by AM-GM inequality follows that: $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq\log_2 2=1$. Yields that:

$$3x^2-2x^3\geq 1\Leftrightarrow(2x+1)(x-1)^2\leq 0\Rightarrow(x-1)^2\leq 0\Rightarrow x=1.$$

Hence the solution is $x=1$.■
Also solved by author.

Q3. Proposed by: D.M. Bătinețu-Giurgiu, ''Matei Basarab'' National College, Bucharest, Romania and Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' General School, Buzău, Romania.
Let $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, d_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n\in N^*$. Calculate : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_n-e}{e_n-e}$.
Solution to Q3 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. We have that:

$$x_n=\frac{d_n-e}{e_n-e}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)e_n-e}{e_n-e}=\frac{e_n-e+\frac{e_n}{n}}{e_n-e}=1+\frac{e_n}{n(e_n-e)},\ \forall n\in N^*.$$

By well-known: $\frac{e}{2n+2}<e-e_n<\frac{e}{2n+1},\ \forall n\in N^*$ (Polya – Szegö's inequality),
we deduce that : $\frac{ne}{2n+2}<n(e-e_n)<\frac{ne}{2n+1},\ \forall n\in N^*$, where we take $n\to\infty$, so we get: $\lim\limits_{n\to\infty}(n(e_n-e))=-\frac{e}{2}$. Hence: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+e\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(n(e_n-e))}=1-2=-1$,
and we are done. ■
Also solved by authors.

Q4. Proposed by: Adrian Stan, ''Costin Nenițescu'' National College, Buzău, Romania.
Determine the area of a right angled triangle in the function of its semiperimeter and the length of hypotenuse.
Solution 1 to Q4 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. Denoting: A the area, b and c the lengths of cathetes, a the length of hypotenuse and s the semiperimeter of the given right angled triangle we have that:

$$A=\frac{bc}{2}=\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)=s(s-a).■$$

Solution 2 to Q4 by Daniel Văcaru, Pitești, Romania.
One has $a^2=b^2+c^2$ and $b+c+\sqrt{b^2+c^2}=2s$. That implies $b+c=2s-\sqrt{b^2+c^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2+c^2+2bc=4s^2-4sa+a^2\Rightarrow 2bc=4(s^2-sa)\Rightarrow bc=2(s^2-sa)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{bc}{2}=s^2-sa\Rightarrow A=s^2-sa.■$$

Also solved by author.

"Universitatea dezvoltă toate aptitudinile, inclusiv prostia."
A. P. Cehov

6. Caleidoscop matematic

Curiozităţi matematice

$$
\begin{aligned}
999{,}999 \cdot 1 &= 0{,}999{,}999\\
999{,}999 \cdot 2 &= 1{,}999{,}998\\
999{,}999 \cdot 3 &= 2{,}999{,}997\\
999{,}999 \cdot 4 &= 3{,}999{,}996\\
999{,}999 \cdot 5 &= 4{,}999{,}995\\
999{,}999 \cdot 6 &= 5{,}999{,}994\\
999{,}999 \cdot 7 &= 6{,}999{,}993\\
999{,}999 \cdot 8 &= 7{,}999{,}992\\
999{,}999 \cdot 9 &= 8{,}999{,}991\\
999{,}999 \cdot 10 &= 9{,}999{,}990
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 8 &= 8\\
11 \cdot 88 &= 968\\
111 \cdot 888 &= 98568\\
1111 \cdot 8888 &= 9874568\\
11111 \cdot 88888 &= 987634568\\
111111 \cdot 888888 &= 98765234568\\
1111111 \cdot 8888888 &= 9876541234568\\
11111111 \cdot 88888888 &= 987654301234568\\
111111111 \cdot 888888888 &= 98765431901234568\\
1111111111 \cdot 8888888888 &= 9876543211791234568
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9\ 7 &= 2 \times 7^2 - 1\\
27\ 37 &= 2 \times 37^2 - 1\\
1755\ 937 &= 2 \times 937^2 - 1\\
7049\ 5937 &= 2 \times 5937^2 - 1\\
25829\ 35937 &= 2 \times 35937^2 - 1\\
225707\ 335937 &= 2 \times 335937^2 - 1\\
17431943\ 9335937 &= 2 \times 9335937^2 - 1\\
7477569\ 19335937 &= 2 \times 19335937^2 - 1\\
203950881\ 319335937 &= 2 \times 319335937^2 - 1\\
10714535711\ 7319335937 &= 2 \times 7319335937^2 - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 9 + 1 &= 1\\
1 \cdot 9 + 2 &= 11\\
12 \cdot 9 + 3 &= 111\\
123 \cdot 9 + 4 &= 1{,}111\\
1{,}234 \cdot 9 + 5 &= 11{,}111\\
12{,}345 \cdot 9 + 6 &= 111{,}111\\
123{,}456 \cdot 9 + 7 &= 1{,}111{,}111\\
1{,}234{,}567 \cdot 9 + 8 &= 11{,}111{,}111\\
12{,}345{,}678 \cdot 9 + 9 &= 111{,}111{,}111
\end{aligned}
$$

Anecdote cu Moisil

☻

- Domnule profesor Moisil , credeţi în vise?
- Sigur, dragă! Să vezi: acu' câtăva vreme am visat că devenisem academician, că eram în aulă şi prezidam o şedinţă. Şi când m-am trezit, într-adevăr eram academician, eram în aulă şi prezidam o şedinţă.

☻

La şedinţa de Consiliu profesoral în vederea titularizării, profesorul Ştefan Procopiu a votat contra numirii lui Moisil, argumentând ,"candidatul fiind prea tânăr" pentru a ocupa postul de profesor.
- E un defect de care mă corectez în fiecare zi, a replicat Moisil.

☻

Un prieten îi spune într-o zi lui Moisil:
- Matematica asta pe care o predici tu, m-am săturat de ea până-n gât.
- Dar matematica se face de la gât în sus!, replică matematicianul.

☻

O reporteră spune la un moment dat, în cursul unui interviu:
- Ştiţi că adevărul supără!

Moisil:
- Pe mine o teoremă de matematică nu m-a supărat niciodată.

☻

- Domnule Moisil, multe cărţi trebuie să fi devorat dumneavoastră, ca să ştiţi atâtea, îi spuse un admirator marelui matematician la ieşirea de la o conferinţă a sa.
- Nu cei care ***devorează*** multe trebuie lăudaţi, ci cei care ***digeră*** bine, replică gânditorul.

„ Părintele gloriei şi al fericirii este munca ”.
Euripide

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 12** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 13** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2014**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII, Smârdan, Brădeanu
Clasa V-a: 10p. Anghel Mihaela; 9p. Neagu Alina, Furtună Aurelian, Grigore Denisa, Zoican Bogdan;
Clasa a VI-a: 9p. Şerban Larisa, Drugea Elena, Florea Mădălina, Andrei Florentina, Oprea Elisa.
Clasa a VII-a: 10p. Furtună Elena, Neagu Andra, Stanciu Catrinel, Ilie Adina. **Prof. Stanescu Ion.**
Scoala cu clasele I-VIII, “Tristan Tzara” Moineşti, Bacău
Clasa a V-a : 10p. Paduraru Catalin, Dobrovat Alina, Munteanu Diana, Ailincai iulian, Ciubotariu Costin.
Clasa a VI-a: 35p.Maziliu Alexandra, Gherman Andrada, Faraoneanu Madalina.
Clasa a VII-a : 45p. Munteanu Gheorghe, Lila Ionut. **Prof. Cornelia Gurău;**
Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba
Clasa a V-a: 15p. Bel Luana;
Clasa a VII-a: 55p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeţ Dragoş, Sideriaş Alexandru;
Prof. Mariana Mitea.
Şcoala cu clasele I-VIII “Gh. Popescu “ Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VII-a: 43p. Traşcă Ionuţ- Vlăduţ, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**
Liceul Tehnologic „Costin Neniţescu”, Buzău
Clasa a X-a :2 8p. Stroe Ionuţ, Blăjanu Ioana, Dogaru Ana Maria, Croitoru Andrei.
Clasa a XI-a: 49p. Tureac Andrei, Dragomir Ionuţ, Sandu Cristina, Pirnog Georgiana, Ciopec Corina, Dobrin Iulian, Picu Elena Daniela, Stoian Cristina, Sterpu Denisa; **Prof. Stan Adrian.**
Şcoala cu clasele I-VIII “George Emil Palade “ Buzău
Clasa a VII-a: 48p.Ciocan Cristian, Vasile Rucsandra, Zota Mădălina, Bordei Valentina, Neagu Bianca, Dumitrache Radu. **Clasa a VIII-a**: 53p. Burada Andrei, Stan Eduard, Marin Cristian, Văceanu Ramona, Duca Miruna, Mutuligă Teodor, Sandu Alexandra, Şerban Ionuţ, Ştefănescu Raluca.
Prof. Neculai Stanciu.

EUROPA - ROMÂNIA - IAŞI

FACULTATEA DE ARTE VIZUALE ŞI DESIGN
DE LA UNIVERSITATEA DE ARTE "GEORGE ENESCU" DIN IAŞI ŞI
ASOCIAŢIA CULTURAL – ŞTIINŢIFICĂ "VASILE POGOR" IAŞI,
ACORDĂ LA:

UNIVERSITATEA DE ARTE „G. ENESCU" din Iaşi, Facultatea de Arte Vizuale si Design

EXPOZIŢIA NAŢIONALĂ "ANELISSE"
- CONCURS DE REVISTE, PUBLICAŢII,
MATERIALE PUBLICITARE,
WEB-URI ŞI BLOGURI ŞCOLARE
Ediţia a VI-a
din 29 august 2013 de la Iaşi - România

PREMIUL I

Revistei "SCLIPIREA MINŢII"
– Nr. 11 din 2013
de la Liceul Tehnologic
"Costin Neniţescu" din Buzău,
având pe d-l prof. STAN ADRIAN
în calitate de coordonator.

UNIVERSITATEA DE ARTE "GEORGE ENESCU" IAŞI
FACULTATEA DE ARTE VIZUALE ŞI DESIGN
Decan,
Prof. Univ. Dr. MARIA URMĂ

ASOCIAŢIA CULTURAL-ŞTIINŢIFICĂ
"VASILE POGOR" IAŞI
Preşedinte,
Prof. TEODOR BIVOL

REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 12 ANUL VI - 2013

Cuprins

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

editgraph

LEI 11 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601