# SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN XIV, NR XXVIII, 2021

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII ȘI SERVICII ", BUZĂU

# Sclipirea Minţii 28

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XIV, Nr. XXVIII, DECEMBRIE 2021, BUZĂU



## CUPRINS



GÂNDEŞTE CORECT



**REDACŢIA**
**Liceul Tehnologic „Meserii şi Servicii”,**
**Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis,**
**Cod. 120167, Tel. 0238719223**
**E-mail: ady_stan2005@yahoo.com**
**Coordonator proiect: Adrian Stan**

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

# În aura şcolii.
## Profesorul de matematică Şerban Vasile.

## Vie amintire colegială.

de prof. Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

**Vocaţia şcolară îşi alege coordonatele devenirii în ritmul marii angajări puse la îndemâna vârstelor de tabla valorilor familiale şi sociale.**

**Ceea ce asimilăm şi organizăm justifică nevoia noastră de a fi parte activă şi constructivă într-o ierarhie necesară şi binefăcătoare.**

**Avem obişnuinţa unei continue relaţionări cu profesorul Şerban Vasile, cuprins în marea familie şcolară a judeţului Buzău, pe care a onorat-o în parametrii implicării, dezvoltării şi creaţiei, cu toate că se schimbă statutul fizic în şirul banalei ordini cosmice.**

**Coordonatele sale originare ialomiţene (s-a născut la 20-10-1954, în comuna Sudiţi) conturează un profil receptiv şi devotat ce combină climatul familial cu proeminenţa băiatului energic şi iscusit.**

**La nivelul studiului preuniversitar poartă emblema Liceului Mihai Eminescu din Buzău, cu care îşi legitimează preferinţele culturale în plină ascensiune, motivat de fina receptare a imboldului familial şi a relaţionării de generaţie.**

**În şirul elanului adolescentin a figurat Facultatea de Matematică a Universităţii Ovidius din Constanţa, în cadrul căreia a onorat exigenţele didactice cu marea deschidere pentru pregătire, performanţă şi măiestrie metodică.**

**Echipa noastră didactică îşi sporeşte misiunea instruirii şi educării cu resursele sale profesionale şi metodice ajustate de trăirea sinceră şi apropiată în comunicarea cu orice elev.**

**Cu o identitate ştiinţifică aleasă, profesorul Şerban Vasile reprezenta o atitudine calificată şi autorizată în susţinerea temelor şcolare, având la bază aplicarea măiestriei**

**învățării ca un cadru didactic întregit de grade didactice, experiență încărcată și pasiunea cunoașterii științifice.**

**Multe generații gimnaziale din Udați (Smeeni, Buzău) (1978-1997), Gălbinași (Buzău)(1997-2001) au beneficiat de îndrumarea sa ca diriginte, profesor, director, fiind un reper didactic devotat și ancorat în pregătirea tuturor elevilor, indiferent de condițiile familiale și locale ale acestora.**

**Cu simțul înaintat al datoriei, al competenței profesionale, și-a înscris numele în misiunea școlii de promovare a cauzei didactice în perioade de intensă conștientizare a copiilor, pionierilor, elevilor la propria formare prin muncă, studiu și integrare socială.**

**Simultan cu preocupările profesionale, didactice, ne-a oferit o trăire frumoasă și bogată prin familia cinstită și harnică, mereu receptivă la afirmare și valoare, atât din partea soției, Șerban Paula, profesoara de fizică, dar și a copiilor bine integrați în circuitul muncii și competenței.**

**La pagina colegială, profesorul Șerban Vasile a unit marea deschidere pentru prietenie în rândul cadrelor didactice și a insuflat optimismul tuturor secvențelor, știind că se situa de partea bunului simț, a hărniciei și a dragostei de viață.**

**Cu veselie și încredere își făcea simțită prezența devotată interesului profesional și social, acoperind stimulator sarcinile oficiale de îndrumare și control.**

**Pe neobservate, urmare a concentrării în evoluția optimă a misiunii didactice, plămânul său recunoaște limita rezervelor sale în fața ritmului așteptat, și, la rând, inevitabilele consecințe asupra altor organe pun în alertă intervențiile medicale prompte și autorizate.**

**Ne rămân cei 67 ani pe care colegul nostru i-a pus în slujba școlii, luminând inițiativele pentru bine și frumos în rândul copiilor, părinților și cadrelor didactice.**

**Instituțiile școlare din Smeeni, Gălbinași, Inspectoratul Școlar Județean Buzău situează numele profesorului Șerban Vasile în etapele profund generoase și active de pregătire a elevilor gimnaziali, ca efort demn în evoluția societății, în unitatea generațiilor menite conlucrării și creației.**

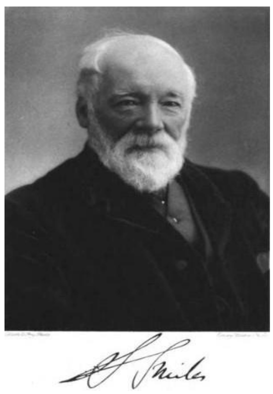
**Port refrenul de conștiință în memoria colegului nostru, profesorul de matematică Șerban Vasile, expert didactic în rezervă, la fiecare pagină de muncă, la fiecare pagină despre elevi, părinți, profesori.**

**Revii plăcut în șirul numerelor.**

**Profesor Stănescu Ion, Buzău**

**“ O bună educație cere ca educatorul să inspire elevului stimă și respect, si nu se poate ajunge la aceasta prin nimicirea individualității elevilor și prin asuprirea stimei de sine”.**

**Samuel Smiles**
**(1812-1904)**



**„Apără-ți dreptul de a gândi, căci și a gândi greșit este mai bine decât a nu gândi deloc”.**
**Hypatia**

# 1. Istoria matematicii

## Hypatia
## - prima femeie matematician și filozof din lume

**de prof. Adrian Stan, Buzău**

În anul 415 era ucisă la Alexandria în Egipt, **Hypatia(c. 370, - 415),** prima femeie filozof și matematician grec, care începând cu anii 400 devenea conducătoarea școlii platoniene din Alexandria propovăduind din scrierile și înțelepciunea lui Platon și Aristotel. Ea a fost fiica unui matematician strălucit, **Theon Alexandricus**, din Alexandria cel care a rescris manuscrisele „**Elementelor**” lui **Euclid,** și pe care se bazează toate celelalte ediții scrise după lucrărilor lui Euclid. Fiind profesor al Mouseion-lui, un fel de școală sau academie care strîngea în jurul ei mai toți oamenii de știință, scriitori și filozofi, **Theon** ar fi răspuns de educația Hypatiei în timpul copilăriei și după. Membru de vază al Bibliotecii din Alexandria și chiar director al acesteia, acesta și-a trimis fiica să studieze la Atena.

Dintre preocupările ei, prima era studiul matematicii pe care-l folosea în astronomie și astrologie. A scris o serie de comentarii la operele unor matematicieni cum ar fi, **Aritmetica** lui Diofante din Alexandria, **Teoria secțiunilor conice** a lui Apollonius din Perga, sau la **tabelele astronomice** ale lui Ptolemeu, comentarii care însemnau de fapt rescrierea operelor acelor învățați la care adăuga o serie de explicații. Ea a construit de asemenea un astrolab și un hidroscop.

Istoricul creștin din Constantinopole, Socrates Scholasticus contemporan cu Hypatia povestește în scrierile sale despre existența „ unei femei în Alexandria pe nume Hypatia care a avut numeroase realizări în literatură și științe ce i-a depășit pe înaintașii săi. Urmașă a școlii lui Platon, ea explică principiile filozofiei către auditoriul ei care vin dine cele mai îndepărtate colțuri pentru a primi instruirea ei “.

Unul dintre cei mai cunoscuți discipoli ai ei a fost , **Synesius** care ajunge episcop de Cyrene iar acesta îi va purta o dragoste până la moarte. Pentru el, **Hypatia** era “mamă, soră, profesor, binefăcătoarea sa” iar absența “spiritului ei divin” ca urmare a răcirii relaților dintre ei, îl duce în pragul disperării, pierderea fiind chiar mai mare decât pierderea copiilor sau a prietenilor lui.
Scrisorile rămase de la **Synesius** ne descriu cum acesta a învățat filozofia de la **Hypatia** și cum era apreciată de ceilalți.

Moartea **Hypatiei** a fost cea care a atras atenția posterității asupra sa transformând-o în martiră și în subiectul multor cărți și filme.

A fost ucisă de creștini în urma conflictului apărut între creștini și păgâni când patriarhul **Cyril** al Alexandriei a ordonat distrugerea templelor păgâne. Conform istoricului neoplatonist **Damascius** (458 – 538, î.e.n), **Cyril**(412- 444) se face vinovat moral de moartea ei. Deși iubită și respectată de mulți creștini ea a picat în mijlocul acestui conflict dintre creștinii egipteni și iudei, dintre

**patriarhul Cyril** și **prefectul orașului Orestes** – un bun prieten de-al ei și acuzat că-i favorizează pe evrei, conflict care s-a soldat cu numeroase atrocități ce a dus oprobriul asupra întregii biserici din Alexandria.

**Socrate** povește moartea acesteia: ***„ Mânați de un zel sălbatic și bigot,...au dus-o la biserica numită Caesareum, unde au dezbrăcat-o complet și au omorît-o, lovind-o cu cărămizi.. După ce i-au sfâșiat trupul în bucăți, i-au dus mădularele ciopârțite într-un loc numit Cinarom și le-au dat foc. “***

Viața ei și mai ales ultima perioadă a fost subiectul multor cărți și filme ale unor autori din întreaga lume: “**Hypatia: Scientist of Alexandria**” de Adriano Petta, “**Hypatia and Eternity**” de Ramon Gali, “**Remembering Hypatia: A Novel of Ancient Egypt**” de Brian Trent.

O ecranizare excelentă care o are în prim plan pe **Hypatia** este cea din 2009, “ **Agora** “ în regia lui Alejandro Amenabar.

Filmul transpune printre altele, experiența **Hypatiei** de a se vedea luând măsuri împotriva unui discipol care se îndrăgostise de ea și se comporta nepotrivit, fapt povestit de istoricul Damascius precum și de lexiconul Suidas.

**Bibliografie:** https://en.wikipedia.org/wiki/Hypatia.

# ŞTIAŢI CĂ .... ?

**Antioh Cantemir** ( 1709- 1744) este primul învățat de origine română care a scris un tratat de algebră dar în limba rusă și rămas în manuscris.

**Antioh** era fiul domnitorului moldovean Dimitrie Cantemir ( 1673- 1723), un mare erudit al vremii, cunoscător a numeroase a limbi străine și care ne-a lăsat în 1715, celebra descriere geografică a Moldovei, **„Descriptio Moldavie** “ scrisă în latină, la cererea Academiei din Berlin, cât și alte lucrări cum ar fi importanta „**Istorie a otomanilor**”.

**Antioh** s-a născut la Constantinopol în timpul celor 20 de ani pe care tatăl său i-a petrecut aici ca ostatic și a trăit cel mai mult în Imperiul Țarist dar și în Anglia și Franța unde a fost ambassador rus.

Un mare umanist al vremii, care l-a moștenit pe tatăl său în cunoașterea a cât mai multor limbi străine, **Antioh** este considerat primul scriitor rus de satire.

La Petersburg, a studiat matematica de la Daniel Bernoulli care i-a deschis orizontul cunoașterii către științele exacte dar și calea către marii savanți ai vremii printre care și Euler sau Maupertuis. Acesta din urmă devenidu-i prieten l-a îndrumat să scrie acel tratat de algebră care nu a mai cunoscut lumina tiparului, fiind cumpărat cu întreaga bibliotecă la moartea sa de către împărăteasa Elisabeta a Rusiei.

**Bibliografie**: George Șt. Andonie. Istoria matematicii în România. Ed. Științifică. București. 1965. Vol. 1 , pag. 48.

de **Gheorghe Ghiță** și **Adrian Stan**, Buzău

**„ Mintea este pentru a genera idei,**
**nu pentru a le păstra.”**
**David Allen**
**( 1945 - --)**

# 2. Articole și note matematice

## Noi inegalități în triunghi

**de Mihàly Bencze, Brașov**

În acest articol vom demonstra următoarea:

**Teoremă.** ***În orice triunghi ascuțitunghic sunt adevărate inegalitățile:***

$$\frac{3\sqrt{3}+5}{4}+\frac{p+r}{2R}\le\sum\sqrt{1+\sin A}\le 3\sqrt{1+\frac{p}{3R}}\le\frac{3(1+\sqrt{3})}{2},\ (1);$$

$$\frac{p^2+r^2}{8R^2}+\frac{5r+3p\sqrt{3}}{8R}+\frac{1}{8}\le\sum\cos\frac{A-B}{2}\le 3,\ (2).$$

***Demonstrație***. Deoarece funcția $f(x)=\sin x$ este concavă pe $(0,\pi)$, folosind inegalitățile lui *Jensen* și *Popoviciu* obținem:

**I.** $\sum f(A)\le 3f\left(\frac{1}{3}\sum A\right)\Rightarrow\sum\sin A\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ și

$$\sum f(A)+3f\left(\frac{1}{3}\sum A\right)\le 2\sum f\left(\frac{A+B}{2}\right)\Rightarrow\sum\sin A+\frac{3\sqrt{3}}{2}\le 2\sum\cos\frac{A}{2}\Rightarrow\ \sum\cos\frac{A}{2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{p}{2R}.$$

Deoarece funcția $g(x)=\cos x$ este concavă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, folosind inegalitățile lui Jensen și Popoviciu obținem:

**II.** $\sum g(A)\le 3g\left(\frac{1}{3}\sum A\right)\Rightarrow\sum\cos A\le\frac{3}{2},\ \sum\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ și

$$\sum g(A)+3g\left(\frac{1}{3}\sum A\right)\le 2\sum g\left(\frac{A+B}{2}\right)\Rightarrow\sum\cos A+\frac{3\sqrt{3}}{2}\le 2\sum\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\ \sum\sin\frac{A}{2}\ge\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}.$$

Din **I.** și **II**. deducem $\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}\le\sum\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2}$ și $\frac{p}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\le\sum\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, de unde obținem

$$\left(\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{p}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}+5}{4}+\frac{p+r}{2R}\le\sum\sin\frac{A}{2}+\sum\cos\frac{A}{2}=$$

$$=\sum\sqrt{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}=\sum\sqrt{1+\sin A}\le 3\sqrt{\frac{1}{3}\sum(1+\sin A)}=3\sqrt{1+\frac{p}{3R}}\le 3\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{3}\sum A\right)}=$$

$$=3\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3(1+\sqrt{3})}{2},\ \text{i.e. (1), q.e.d.}$$

Tot din I. și II. obținem și $\left(\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{p}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2\le\left(\sum\sin\frac{A}{2}\right)^2+\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2=$

$$=3+2\sum\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=3+2\sum\cos\frac{A-B}{2}\le\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{p^2+r^2}{8R^2}+\frac{5r+3p\sqrt{3}}{8R}+\frac{1}{8}\le\sum\cos\frac{A-B}{2}\le 3,$$ i.e. (2), q.e.d.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $A=B=C$.

**Bibliografie:**
1. Octogon Mathematical Magazine (1992-2021).
2. Sclipirea Minții (2006-2021).

## În legătură cu inegalitatea lui Hayashi

**de D.M. Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu**

Dacă $M$ este un punct interior triunghiului $ABC$ vom nota $x=MA, y=MB, z=MC$ și $a=BC, b=CA, c=AB$.

**Inegalitatea lui Hayashi** (vezi [1], pp. 297 – 311). În orice triunghi $ABC$ are loc inegalitatea

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{ab}\ge 1, \text{ (H)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $M$ este ortocentrul triunghiului ascuțitunghic $ABC$ sau este unul din vârfurile triunghiului $ABC$.

**Teorema 1.** Dacă $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $M$ este un punct interior triunghiului $ABC$, atunci

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ge\sin 2t+\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}\sin t-\frac{y}{b}\cos t\right)^2, \text{ (*)}.$$

*Demonstrație.* $$\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}\sin t-\frac{y}{b}\cos t\right)^2=\sum_{cyc}\frac{x^2}{a^2}\sin^2 t+\sum_{cyc}\frac{y^2}{b^2}\cos^2 t-2\sum_{cyc}\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\sin t\cos t=$$

$$=\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\sin 2t\sum_{cyc}\frac{xy}{ab}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\sin 2t\sum_{cyc}\frac{xy}{ab}+\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}\sin t+\frac{y}{b}\cos t\right)^2\overset{(H)}{\ge}\sin 2t+\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}\sin t+\frac{y}{b}\cos t\right)^2,$$ q.e.d.

**Aplicații.**

Dacă $t=\frac{\pi}{4}$, atunci din (*) avem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ge 1+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$, (1).

Dacă $t=\frac{\pi}{6}$, atunci din (*) avem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\frac{x\sqrt{3}}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$, (2).

**Teorema 2.** Dacă $u,v,w>0$ cu $u^2+v^2=w^2$ și $M$ este un punct interior triunghiului $ABC$, atunci $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ge 2\cdot\frac{uv}{w^2}+\frac{1}{w^2}\sum_{cyc}\left(\frac{ux}{a}-\frac{vy}{b}\right)^2$, (**).

*Demonstrație.* $\sum_{cyc}\left(\frac{ux}{a}-\frac{vy}{b}\right)^2=\sum_{cyc}\frac{u^2x^2}{a^2}+\sum_{cyc}\frac{v^2y^2}{b^2}-2\sum_{cyc}\frac{uvxy}{ab}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (u^2+v^2)\sum_{cyc}\frac{x^2}{a^2}=2uv\sum_{cyc}\frac{xy}{ab}+\sum_{cyc}\left(\frac{ux}{a}-\frac{vy}{b}\right)^2$

$\Leftrightarrow w^2\sum_{cyc}\frac{x^2}{a^2}=2uv\sum_{cyc}\frac{xy}{ab}+\sum_{cyc}\left(\frac{ux}{a}-\frac{vy}{b}\right)^2\overset{(H)}{\geq}2uv+\sum_{cyc}\left(\frac{ux}{a}-\frac{vy}{b}\right)^2$, q.e.d.

**Bibliografie**
**1. D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and V. Volenec**, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1989.

## O generalizare a unor inegalități în triunghi

**de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru și Neculai Stanciu**

În orice triunghi $ABC$ vom nota cu $F$ aria, cu $s$ semiperimetrul iar celelalte notații sunt cele obișnuite.

Teoremă. Dacă $u,v,w\in R_+^*$ iar $x,y,z\in R_+$, atunci în orice triunghi $ABC$ are loc inegalitatea

$$\frac{u+v}{w}a^x(a+b)^y(b+c)^z+\frac{v+w}{u}b^x(b+c)^y(c+a)^z+\frac{w+u}{v}c^x(c+a)^y(a+b)^z\geq$$

$$\geq 2^{1+x+2y+2z}(\sqrt[4]{3})^{4-(x+y+z)}F^{\frac{x+y+z}{2}},\ (*).$$

*Demonstrație.* $\sum_{cyc}\frac{u+v}{w}a^x(a+b)^y(b+c)^z\overset{AM-GM}{\geq}2\sum_{cyc}\frac{\sqrt{uv}}{w}a^x(a+b)^y(b+c)^z\overset{AM-GM}{\geq}$

$\overset{AM-GM}{\geq}2^{1+y+z}\sum_{cyc}\frac{\sqrt{uv}}{w}a^x(\sqrt{ab})^y(\sqrt{bc})^z\overset{AM-GM}{\geq}2^{1+y+z}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod_{cyc}a^x(\sqrt{ab})^y(\sqrt{bc})^z}=$

$=2^{1+y+z}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^x(abc)^y(abc)^z}=2^{1+y+z}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^{x+y+z}}=2^{1+y+z}\cdot 3\cdot\left(\sqrt[3]{(abc)^2}\right)^{\frac{x+y+z}{2}}=$

$=2^{1+y+z}\cdot 3\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^{\frac{x+y+z}{2}}\cdot 3^{-\frac{x+y+z}{2}}=2^{1+y+z}\cdot 3^{\frac{2-(x+y+z)}{2}}\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^{\frac{x+y+z}{2}}\overset{Carliz}{\geq}$

$\overset{Carliz}{\geq}2^{1+y+z}\cdot 3^{\frac{2-(x+y+z)}{2}}\cdot(4\sqrt{3}F)^{\frac{x+y+z}{2}}=2^{1+x+2y+2z}\cdot 3^{\frac{2-(x+y+z)}{2}+\frac{x+y+z}{4}}\cdot F^{\frac{x+y+z}{2}}=$

$=2^{1+x+2y+2z}\cdot 3^{\frac{4-(x+y+z)}{4}}\cdot F^{\frac{x+y+z}{2}}=2^{1+x+2y+2z}\cdot(\sqrt[4]{3})^{4-(x+y+z)}\cdot(\sqrt{F})^{x+y+z}$, q.e.d.

**Aplicații.**

Dacă $x=y=z=0$, atunci (*) devine $\frac{u+v}{w}+\frac{v+w}{u}+\frac{w+u}{v}\geq 6$, $\forall u,v,w>0$, (1).

Dacă $x=2$, $y=z=0$, atunci (*) devine $\frac{u+v}{w}a^2+\frac{v+w}{u}b^2+\frac{w+u}{v}c^2\geq 8\sqrt{3}F$, (B-G, 1), i.e. prima inegalitate Bătinețu-Giurgiu.

Dacă $u=v=w$, atunci (B-G, 1) devine $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}F$, (I-W), i.e. inegalitatea Ionescu-Weitzenböck.

Dacă $x=4$, $y=z=0$, atunci (*) devine

$$\frac{u+v}{w}a^4+\frac{v+w}{u}b^4+\frac{w+u}{v}c^4\geq 32F^2$$, (B-G, 2), i.e. a doua inegalitate Bătinețu-Giurgiu.

Dacă $u=v=w$, atunci (B-G, 2) devine $a^4+b^4+c^4\geq 16F^2$, (F.G), i.e. inegalitatea lui F. Goldner.
Dacă $u=v=w$, atunci (*) devine

$$a^x(a+b)^y(b+c)^z+b^x(b+c)^y(c+a)^z+c^x(c+a)^y(a+b)^z\geq$$

$$\geq 2^{1+x+2y+2z}(\sqrt[4]{3})^{4-(x+y+z)}(\sqrt{F})^{x+y+z}$$, i.e. inegalitatea lui R.Z. Djordjevic, problema 4.17 din [1], p. 47.

**Bibliografie**

1. O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoof Publishing, Groningen, 1969, The Netherlands.

## Câteva rezolvări pentru relația lui Van-Aubel

**de Nina Hanciuc si Marius Drăgan, București**

**Relația lui Van-Aubel.** Dacă $ABC$ este un triunghi și $M\in BC, N\in AC, P\in AB$ iar $AM\cap PN\cap CP=T$, atunci $\frac{AT}{TM}=\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}$.

**I.** Cazul $N\in(AC), P\in(AB)$.

**Rezolvarea 1 (sintetică).** Ducem $MR\| AB$, $MQ\| NC$, $Q\in BN, R\in PC$. Folosim relația lui *Ceva* $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{PB}=1$ și avem

$$\frac{2AT}{TM}=\frac{AN}{QM}+\frac{AP}{MR}=\frac{AN}{NC}\cdot\frac{BC}{BM}+\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BC}{MC}=\frac{AN}{NC}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{NC}{BM}+\frac{AP}{BP}+\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BM}{MC}=\quad 2\cdot\frac{AN}{NC}+2\cdot\frac{AP}{PB},$$

de unde rezultă cerința.

**Rezolvarea 2 (trigonometrică).** Notăm $\alpha_1=\angle ABN$, $\alpha_2=\angle BCP$, $\beta_1=\angle NBC$, $\beta_2=\angle PCA$ și avem $\frac{AN}{NC}=\frac{c\sin\alpha_1}{a\sin\beta_1}$, $\frac{AT}{TM}=\frac{c\sin\alpha_1}{BM\sin\beta_1}$, deci $\frac{AN}{NC}=\frac{AT}{TM}\cdot\frac{BM}{a}$. Analog $\frac{AP}{PB}=\frac{AT}{TM}\cdot\frac{MC}{a}$ și prin adunare rezultă relația lui Van-Aubel.

**Rezolvarea 3 (cu arii).** Notăm $[APT]=S_1$, $[PTB]=S_2$, $[BTM]=S_3$, $[TMC]=S_4$, $[NTC]=S_5$, $[ATN]=S_6$. Avem

$$\frac{S_1+S_2+S_6}{S_3+S_4+S_5}=\frac{S_6}{S_5}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}=\frac{S_6}{S_5}\overset{Ceva}{=}\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_3}{S_4}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_1+S_2}{S_3}\cdot\frac{S_4}{S_3+S_4}.$$

Analog $\frac{S_6}{S_5}=\frac{S_6+S_5}{S_4}\cdot\frac{S_3}{S_3+S_4}$. Prin adunare, ținând cont de $\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{S_6+S_5}{S_4}=\frac{AT}{TM}$, deducem $\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_6}{S_5}=\frac{AT}{TM}\cdot\frac{S_4}{S_3+S_4}+\frac{AT}{TM}\cdot\frac{S_3}{S_3+S_4}=\frac{AT}{TM}\Rightarrow\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}=\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_6}{S_5}=\frac{AT}{TM}$.

**Rezolvarea 4 (sintetică).** Din teorema lui *Menelaus* avem

$$\frac{CM}{CB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AT}{TM}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TM}=1\Rightarrow\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AT}{TM}\cdot\frac{CM+BM}{BC}=\frac{AT}{TM}.$$

**Rezolvarea 5 (sintetică).** Prin $A$ ducem $d\parallel BC$, $d\cap CT=U$, $d\cap BT=V$. Avem

$$\frac{AP}{BP}+\frac{AN}{NC}=\frac{AU}{BC}+\frac{AV}{BC}=\frac{UV}{BC}=\frac{AT}{TM}.$$

**Rezolvarea 6 (vectorială – coordonate baricentrice).** Folosim următoarea propoziție: Dacă $\overrightarrow{r_{M_i}}=\alpha_i\overrightarrow{r_A}+\beta_i\overrightarrow{r_B}+\gamma_i\overrightarrow{r_C}$, $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i=1$, $i=\overline{1,3}$, atunci $M_1,M_2,M_3$ sunt coliniare dacă

$$\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\beta_3-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}=\frac{\gamma_3-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}.$$

Notăm $k=\frac{AT}{TM},k_1=\frac{AP}{BP},k_2=\frac{NC}{AN},k_3=\frac{BM}{MC}\overset{Ceva}{\Rightarrow}k_3=\frac{1}{k_1k_2}$. Avem: $\overrightarrow{r_P}=\frac{1}{k_1+1}\overrightarrow{r_A}+\frac{k_1}{1+k_1}\overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{r_N}=\frac{1}{k_2+1}\overrightarrow{r_C}+\frac{k_2}{1+k_{21}}\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{k_3+1}\overrightarrow{r_B}+\frac{k_3}{1+k_3}\overrightarrow{r_C}=\frac{k_1k_2}{1+k_1k_2}\overrightarrow{r_B}+\frac{1}{1+k_1k_2}\overrightarrow{r_C}$,

$$\overrightarrow{r_T}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{r_A}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{r_A}+\frac{k}{(1+k)(1+k_3)}\overrightarrow{r_B}+\frac{kk_3}{(k+1)(k_3+1)}\overrightarrow{r_C}.$$

Deci, $B(0,1,0)$, $T\left(\frac{1}{k+1},\frac{k}{(k+1)(k_3+1)},\frac{kk_3}{(k+1)(k_3+1)}\right)$, $N\left(\frac{k_2}{k_2+1},0,\frac{1}{k_2+1}\right)$.

Din propoziție $\frac{\alpha_T-\alpha_B}{\alpha_N-\alpha_B}=\frac{\gamma_T-\gamma_B}{\gamma_N-\gamma_B}\Rightarrow k=\frac{k_3+1}{k_2k_3}=\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_2k_3}=k_1+\frac{1}{k_2}$, de unde rezultă relația lui *Van-Aubel*.

**II.** Cazul $B\in(AP),C\in(AN)$.

**Rezolvarea 1 (sintetică).** Notăm $\frac{AB}{BP}=x,\frac{AC}{CN}=y,\frac{AN}{MT}=z,\frac{BM}{MC}=t$. Trebuie să demonstrăm că $x+y+1=z$. Aplicând teorema lui *Menelaus* obținem $\frac{AC}{AN}\cdot\frac{TN}{TB}\cdot\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AP}\cdot\frac{PT}{TC}\cdot\frac{CM}{MB}=1$, de unde $y+1=\frac{NT}{BT}\cdot t$ și $1+\frac{1}{x}=\frac{PT}{CT}\cdot\frac{1}{t}$. De asemenea $\frac{TC}{CP}\cdot\frac{BP}{BA}\cdot\frac{AM}{MT}=\frac{TB}{BN}\cdot\frac{NC}{AC}\cdot\frac{AM}{MT}=1$, de unde rezultă $z=\left(1+\frac{PT}{TC}\right)x+\left(1+\frac{TN}{BT}\right)y$. Deducem că

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{PT}{TC}\cdot\frac{NT}{BT}\text{ și }\left(\frac{z}{y}-1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)=\frac{PT}{TC}\cdot\frac{NT}{BT}\text{, de unde obținem}$$

$$(1+x)(1+y)=(z-y)(z+y)\Leftrightarrow(z+1)(z-1-x-y)=0\Leftrightarrow z=x+y+1.$$

**Rezolvarea 2 (sintetică).** Prin $A$ ducem $AV\parallel PC$, $AU\parallel BN$,

$U, V \in BC$. Notăm $BM = x$, $MC = y$, $CU = z$, $BV = t$. Avem
$\frac{AM}{MT} = \frac{MU}{BM} = \frac{MV}{MC} \Rightarrow \frac{AM}{MT} = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+t}{y}\right)$ și deoarece $\frac{MU}{BM} = \frac{MV}{MC}$ deducem
$(y+z)y = (x+t)x$. De asemenea avem $\frac{AB}{BP} = \frac{BV}{BC} = \frac{t}{x+y}$ și $\frac{AC}{CN} = \frac{CU}{BC} = \frac{z}{x+y}$. Arătăm
$1 + \frac{AB}{BP} + \frac{AC}{CN} = \frac{AM}{MT}$ sau $1 + \frac{z}{x+y} + \frac{t}{x+y} = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+t}{y}\right)$, de unde rezultă
$(x-y)(x^2 - y^2 + xt - yz) = 0$, adevărată.

**Rezolvarea 3 (coordonate baricentrice).** Notăm $\frac{AB}{BP} = k_1$, $\frac{AC}{CN} = k_2$, $\frac{AM}{MT} = k_3$, $1 + k_1 + k_2 = t$.
Avem $A(1,0,0)$, $P(0,1,0)$, $N(0,0,1)$, $B\left(\frac{1}{1+k_1}, \frac{k_1}{1+k_1}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{1+k_2}, 0, \frac{k_2}{1+k_2}\right)$.

$B, T, N$ coliniare rezultă $\frac{\alpha_B - \alpha_T}{\alpha_B - \alpha_N} = \frac{\beta_B - \beta_T}{\beta_B - \beta_N} = \frac{\gamma_B - \gamma_T}{\gamma_B - \gamma_N} \Rightarrow \beta_T = k_1\alpha_T$, $1 - (1+k_1)\alpha_T = \gamma_T$.

$P, T, C$ coliniare rezultă $\frac{\alpha_C - \alpha_T}{\alpha_C - \alpha_P} = \frac{\beta_C - \beta_T}{\beta_C - \beta_P} = \frac{\gamma_C - \gamma_T}{\gamma_C - \gamma_P} \Rightarrow \gamma_T = k_2\alpha_T$, $1 - (1+k_1)\alpha_T = k_2\alpha_T$,

$\alpha_T = \frac{1}{t} \Rightarrow T\left(\frac{1}{t}, \frac{k_1}{t}, \frac{k_2}{t}\right)$. De asemenea

$$(\alpha_M, \beta_M, \gamma_M) = \frac{1}{1+k_3}(\alpha_A, \beta_A, \gamma_A) + \frac{k_3}{1+k_3}(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T) = M\left(\frac{1+t+k_3}{(1+k_3)t}, \frac{k_1k_3}{t(1+k_3)}, \frac{k_2k_3}{t(1+k_3)}\right).$$

Deoarece $B, M, C$ coliniare rezultă $\frac{\beta_B - \beta_M}{\beta_B - \beta_C} = \frac{\gamma_B - \gamma_M}{\gamma_B - \gamma_C} \Rightarrow t + tk_3 - k_3 - k_1k_3 = k_3(1+k_2)$, deci

$1 + k_1 + k_2 = k_3$.

**Rezolvarea 4 (trigonometrică).** Notăm $\alpha_1 = \angle ABC$, $\alpha_2 = \angle TBC$, $\beta_1 = \angle ACB$, $\beta_2 = \angle BCT$, $u_1 = \angle BAT$, $u_2 = \angle TAC$, $AT \cap PN = R$. Avem $\frac{2AT}{TM} = \frac{AB\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{BM\sin\alpha_2} + \frac{AC\sin(\beta_1+\beta_2)}{CM\sin\beta_2}$,
$\frac{AN}{NC} = \frac{AB\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{BC\sin\alpha_2}$ și $\frac{AP}{PB} = \frac{AC\sin(\beta_1+\beta_2)}{BC\sin\beta_2}$.

Deci, $\frac{2AT}{TM} = \frac{AN \cdot BC}{BM \cdot NC} + \frac{AP \cdot BC}{CM \cdot PB}$. De asemenea $\frac{BM}{CM} = \frac{AB\sin u_1}{AC\sin u_2}$, $\frac{PR}{RN} = \frac{AP\sin u_1}{AN\sin u_2}$,
$\frac{BM}{CM}\cdot\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PN}\cdot\frac{AN}{AP}$, $\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RN}\cdot\frac{CN}{CA} = 1$, $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{1}{CM} = \frac{AN}{CN}\cdot\frac{1}{CM}$. Rezultă

$$\frac{2AT}{TM} = \frac{AN(BM+MC)}{BM \cdot NC} + \frac{AP(BM+MC)}{CM \cdot PB} = \frac{AN}{NC} + \frac{AN \cdot MC}{NC \cdot BM} + \frac{AP \cdot BM}{PB \cdot CM} + \frac{AP}{PB} =$$

$$= \frac{AN}{NC} + \frac{AN \cdot CN \cdot AP}{NC \cdot AN \cdot BP} + \frac{AP \cdot AN \cdot BP}{PB \cdot CN \cdot AP} + \frac{AP}{PB}$$, deci $\frac{AT}{TM} = \frac{AP}{PB} + \frac{AN}{NC}$, Q.E.D.

## Asupra Problemei 84 din Crux Mathematicorum Bonus Problems June 2021

**de Marin Chirciu, Piteşti**

Articolul porneşte de la Problema 84 din Crux Mathematicorum, Bonus Problems June 2021, propusă de George Apostolopoulos.
Este demonstrată inegalitatea propusă, este întărită şi apoi se fac dezvoltări cu inegalităţi din aceeaşi clasă de probleme cu înălţimi şi raze ale cercurilor exînscrise unui triunghi.

**84.** Let $h_a, h_b, h_c$ be the altitudes, $r_a, r_b, r_c$ the exradii, $r$ the inradius,and $R$ the circumradiusof a triangle $ABC$. Prove that $\frac{r_a+r_b}{\sqrt{h_a^2+h_b^2}}+\frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_c^2}}+\frac{r_c+r_a}{\sqrt{h_c^2+h_a^2}} \le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$. George Apostolopoulos

**Solutie**.Demonstrăm **Lema** 2) In , $\Delta ABC$ , $\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ şi $h_a=\frac{2S}{a}$ obţinem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\sum \frac{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}=\frac{1}{2}\sum \frac{abc}{(b+c)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{2}\frac{\sum(a+b)(a+c)(p-a)}{\prod(b+c)\prod(p-a)}=$$

$$=\frac{4Rrp}{2}\frac{p^2\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)\cdot pr^2}=\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunţ.

Folosind **Lema** obţinem: $Ms=\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}} \le \sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{\frac{(h_b+h_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c} \overset{(1)}{\le} 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2=Md$ ,

unde $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c} \le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow \sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c} \le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \overset{Lema}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{Lema}{\Leftrightarrow} \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \le \frac{3R^2}{4r^2} \Leftrightarrow \frac{\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \le \frac{3R}{4r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4r\left(p^2+5r^2+8Rr\right) \le 3R\left(p^2+r^2+2Rr\right) \Leftrightarrow p^2(3R-4r)+r\left(6R^2-29Rr-20r^2\right) \ge 0,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că: $\left(16Rr-5r^2\right)(3R-4r)+r\left(6R^2-29Rr-20r^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (16R-5r)(3R-4r)+\left(6R^2-29Rr-20r^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow 54R^2-108Rr \ge 0 \Leftrightarrow R \ge 2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca**

Inegalitatea poate fi întărită. 3) In $\Delta ABC$ , $\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}} \le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)$. Marin Chirciu

Folosind **Lema** obţinem: $Ms=\sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}} \le \sum \frac{r_b+r_c}{\sqrt{\frac{(h_b+h_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum \frac{r_b+r_c}{h_b+h_c} \overset{(1)}{\le} 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)=Md$ , unde (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right) \Leftrightarrow \sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}\le 3\left(\frac{R}{2r}\right) \overset{Lema}{\Leftrightarrow}$

$\overset{Lema}{\Leftrightarrow} \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\le 3\left(\frac{R}{2r}\right) \Leftrightarrow \frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\le\frac{3R}{2r} \Leftrightarrow \frac{\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(p^2+5r^2+8Rr\right)\le 3\left(p^2+r^2+2Rr\right) \Leftrightarrow p^2\ge 10Rr+7r^2$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$. Rămâne să arătăm că: $16Rr-5r^2\ge 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\ge 2r$ ,(Euler). . Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca** Se pot scrie inegalitățile: 4) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

**Solutie.:** Vezi inegalitatea $\sum\frac{r_b+r_c}{\sqrt{h_b^2+h_b^2}}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)$ și $\left(\frac{R}{2r}\right)\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow R\ge 2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca:** Să schimbăm între ele $r_a$ cu $h_a$.

5) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$. Marin Chirciu

**Solutie**.Demonstrăm **Lema**

**6**) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\frac{2(R+r)}{R}$.

Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ și $h_a=\frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\sum\frac{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}=\frac{2}{abc}\sum(b+c)(p-b)(p-c)=\frac{2}{4Rrp}\cdot 4pr(R+r)=\frac{2(R+r)}{R}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.
Folosind **Lema** obținem :

$$Ms=\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\overset{(1)}{\le}3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow \sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \overset{Lema}{\Leftrightarrow}$

$\overset{Lema}{\Leftrightarrow} \frac{2(R+r)}{R}\le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2(R+r)}{R}\le\frac{3R^2}{4r^2} \Leftrightarrow 3R^3\ge 8r^2(R+r) \Leftrightarrow 3R^3-8Rr^2-8r^3\ge 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(3R^2+6Rr+4r^2\right)\ge 0$, evident din $R\ge 2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca** Inegalitatea poate fi întărită.

**7**) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le 3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)$.

**Solutie**.Folosind **Lema** obținem :

$$Ms=\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\overset{(1)}{\le}3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)=Md\text{, unde}$$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)\Leftrightarrow\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le3\left(\frac{R}{2r}\right)\overset{Lema}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{Lema}{\Leftrightarrow}\frac{2(R+r)}{R}\le3\left(\frac{R}{2r}\right)\Leftrightarrow\frac{2(R+r)}{R}\le\frac{3R}{2r}\Leftrightarrow3R^2\ge4r(R+r)\Leftrightarrow3R^2-4Rr-4r^2\ge0$$

$\Leftrightarrow(R-2r)(3R+2r)\ge0$, evident din $R\ge2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca**: Și inegalitatea de mai sus poate fi întărită.

**8**) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le3\sqrt{2}$.

**Solutie**.

Folosind **Lema** obținem : $Ms=\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{\frac{(r_b+r_c)^2}{2}}}=\sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\overset{(1)}{\le}3\sqrt{2}=Md$,

unde $(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le3\overset{Lema}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{Lema}{\Leftrightarrow}\frac{2(R+r)}{R}\le3\Leftrightarrow2(R+r)\le3R\Leftrightarrow R\ge2r\text{ ,(Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca** Se pot scrie inegalitățile:

**9**) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le3\sqrt{2}\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

**Solutie**.

Vezi inegalitatea $\sum\frac{h_b+h_c}{\sqrt{r_b^2+r_b^2}}\le3\sqrt{2}\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$ și $3\sqrt{2}\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)\le3\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$, care rezultă din $R\ge2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Remarca**: Între sumele $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}$ și $\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\frac{R(p^2+5r^2+8Rr)}{r(p^2+r^2+2Rr)}$ există relația:

**10**) In $\Delta ABC$, $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}\le\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}$.

Marin Chirciu

**Solutie**. Folosind **Lemele** de mai sus avem sumele:

$\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\frac{2(R+r)}{R}$ și $\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\frac{R(p^2+5r^2+8Rr)}{r(p^2+r^2+2Rr)}$. Inegalitatea se se scrie:

$$\frac{2(R+r)}{R}\le\frac{R(p^2+5r^2+8Rr)}{r(p^2+r^2+2Rr)}\Leftrightarrow2r(R+r)(p^2+r^2+2Rr)\le R^2(p^2+5r^2+8Rr)\Leftrightarrow$$

$$p^2(R^2-2Rr-2r^2)+r(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3)\ge0.$$

Distingem cazurile:
Cazul 1). Dacă $\left(R^2-2Rr-2r^2\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(R^2-2Rr-2r^2\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r\left(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3\right)\geq p^2\left(2r^2+2Rr-R^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r\left(8R^3+R^2r-6Rr^2-2r^3\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(2r^2+2Rr-R^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^4+R^3r-3R^2r^2-5Rr^3-2r^4\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)\left(R^3+3R^2r+3Rr^2+r^3\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(R+r)^3\geq 0$, care rezultă din $R\geq 2r$ ,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**Bibliografie:**

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. George Apostolopoulos, Crux Mathematicorum, 84.Bonus Problems, Vol47,No.6, June 2021,
3. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

## Probleme de numărare

**de Anton Flavia,** Vaslui

Multe probleme din viața cotidiană cer numărarea elementelor unei mulțimi finite, ale părților unei mulțimi, aflarea numărului de moduri de realizare a unei configurații sau a unui fenomen și de aici importanța studierii unei categorii matematice intitulată simplu ”Probleme de numărare”. Domeniul matematic ce studiază aprofundat astfel de probleme se numește ”Combinatorică” și face parte din programa clasei a X-a, dar are rădăcini și în matematica de gimnaziu prin diferite noțiuni primare ce se introduc în clasele V-VIII și mai cu seamă prin probleme cu grade de dificultate de la cele mai simple până la cele foarte complicate.

***Câteva noțiuni de bază necesare la rezolvarea unor astfel de probleme.***

1) Suma lui Gauss $S=1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) Partea întreagă a unui număr real x care se definește astfel: $[x]=k,\ k\in\mathbb{Z},$ cu proprietatea $k\leq x<k+1$.

3) Forma canonică a unui număr natural $n=p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{x_k}$ și numărul divizorilor lui n, adică $(x_1+1)(x_2+1)....(x_k+1)$.

4) Dacă $p\in\mathbb{N}$ și $n\in\mathbb{N},1\leq p\leq n$, atunci numărul multiplilor lui p până la n este egal cu $\left\lfloor\dfrac{n}{p}\right\rfloor$.

5) Dacă mulțimea A are cardinalul n, atunci numărul submulțimilor lui A este egal cu $2^n$

6) Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri iar un obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea lui ”A sau B” se poate realiza în m+n moduri $(A\neq B)$.

Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și pentru fiecare alegere a lui A obiectul B se poate alege în n moduri atunci perechea ordonată (A, B) se poate realiza în $m\cdot n$ moduri.

De fapt este vorba de formulele $card(A\cup B)=card\ A+card\ B-card(A\cap B)$ și $card(A\times B)=card\ A\cdot card\ B$.

1) Dacă A și B sunt două mulțimi finite cu cardinalul m respectiv n, atunci numărul funcțiilor definite pe A cu valori în B este egal cu $n^m$.

În clasa a X-a sunt introduse noțiunile de permutări, aranjamente, combinări.

În continuare vom prezenta câteva probleme de numărare, unele foarte simple dar necesare la orele de clasă, altele mai complicate, întâlnite în special la concursurile de matematică.

**Problema 1.** Câte numere se află în fiecare dintre șirurile:
**a) 15, 16, 17, ... , 75;** **b) 2, 4, 6, ... , 100 ;** **c) 24, 26, 28, .... , 150**
**d) 1, 3, 5, .... , 99;** **e) 17, 19, 21, ... , 171**

**Problema 2.** Considerăm șirul de numere naturale 11, 14, 17, 20, ....
a) Scrieți încă doi termeni din șir;
b) Aflați al 100-lea termen al șirului;
c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

**Problema 3.** (clasică pentru elevii de clasa a V-a) De câte ori apare cifra 0 în scrierea tuturor numerelor de 2 cifre? Dar cifra 1? Dar cifra 4?

**Problema 4.** (problemă dificilă de concurs) Calculați suma tuturor cifrelor numerelor naturale de la 1 la 1000.

**Soluție:** Dacă vom considera și pe 0, acesta nu influențează suma. Grupăm numerele astfel: (0, 999), (1, 998), (2, 997), ... , (499, 500). Observăm că sunt 500 de grupe și în fiecare grupă suma cifrelor este 27, deci suma cerută este $27\cdot 500+1+0+0+0=13501$.

**Problema 5.** a) Câte numere de cinci cifre încep cu 25?
b) Câte numere de cinci cifre se termină cu 25?
c) Câte numere de șapte cifre încep cu 25 și se termină cu 25?

**Problema 6.** Câte fracții subunitare cu numitorul mai mic sau egal cu 100 există?

**Soluție:**

Scriem fracțiile astfel:

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{100}$ sunt 99 de fracții

$\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},...,\frac{2}{100}$ sunt 98 de fracții

..........................................................

$\frac{99}{100}$ este o fracție. În total $1+2+3+...+99=\frac{99\cdot 100}{2}=4950$

**Observație:** Problemele 5 și 6 pot fi propuse la concursuri și olimpiade.

Sunt foarte răspândite în bibliografia matematică școlară probleme elementare de numărare de genul următor:

Se consideră un grup în care se află n persoane.
a) Câte strângeri de mână se fac dacă fiecare dă mâna cu fiecare o singură dată?
b) Câte partide de șah se pot juca în cadrul grupului dacă se joacă fiecare cu fiecare, sau sistem eliminatoriu, sau sistem tur retur etc.?
c) Câte fotografii se schimbă dacă fiecare face cadou câte o poză proprie celorlalte persoane din grup?

**Problema 7.** Într-un plan considerăm 5 puncte distincteastfel încât oricare 3 dintre ele să fie necoliniare.
a) Câte drepte determină cele 5 puncte?
b) Care este numărul de triunghiuri determinate de aceste puncte?
c) Generalizare pentru n puncte.

Soluție: Vom da soluția pentru cazul general.

Fie $A_1, A_2, ...., A_n$ cele n puncte distincte și oricare 3 necoliniare. Ele determină următoarele drepte:

$A_1A_2, A_1A_3, ...., A_1A_n$ avem n-1 drepte

$A_2A_3, A_2A_4, ...., A_2A_n$ avem n-2 drepte

............................................................

$A_{n-1}A_n$ o dreaptă

Total $1+2+3+...+(n-1)=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ drepte.

Triunghiurile determinate vor fi:

$A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, ...., A_1A_2A_n$ avem n-2 triunghiuri

$A_1A_3A_4, A_1A_3A_5, ...., A_1A_3A_n$ avem n-3 triunghiuri

............................................................................

$A_1A_{n-1}A_n$ un triunghi

Procedăm la fel cu punctul $A_2$, apoi cu $A_3$, etc., ultimul triunghi fiind $A_{n-2}A_{n-1}A_n$. Numărul total de triunghiuri va fi:

$$(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+...+(n-2)\cdot 1=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

**Problema 8.** În vârfurile unui pătrat ABCD plasăm câte un număr întreg astfel ca produsul numerelor de pe fiecare latură să fie 5 sau – 5. În câte moduri se poate realiza plasarea, vârfurile A, B, C, D fiind fixate.

**Soluție:**

Pentru început fixăm în A numărul 5. Pentru B avem două posibilități: 1 sau – 1. Pentru C două posibilități: 5 sau – 5. Pentru D avem 1 sau – 1. În total $2^3=8$ variante.

Apoi fixăm în A pe rând – 5, 1 și – 1, pentru fiecare caz rezultă 8 variante. Deducem că plasarea în cele 4 vârfuri a numerelor 1, – 1, 5 și – 5 se poate face în $8\cdot 4=32$ moduri.

**Problema 9.** Care este numărul minim necesar de monede de 1, 3 și 5 euro pentru a putea plăti orice sumă mai mică de 101 euro.

**Soluție**: Dacă dorim să avem cât mai puține monede, trebuie să folosim monede cu valoare mare, adică de 5 euro. Orice număr natural mai mic sau egal cu 100, are una din formele 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5, $0\le k\le 20$.

Pentru sumele de forma 5k+1 avem nevoie de maximum 19 monede de 5 euro și 1 monedă de 1 euro.

Pentru sumele de forma 5k+2 avem nevoie de maximum 19 monede de 5 euro și 2 monede de 1 euro.

Pentru sumele de forma 5k+3 avem nevoie de maximum 19 monede de 5 euro și 1 monedă de 3 euro.

Pentru sumele de forma 5k+4 avem nevoie de maximum 19 monede de 5 euro, 1 monedă de 1 euro și 1 monedă de 3 euro.

Pentru sumele de forma 5k+5 avem nevoie de maximum 20 monede de 5 euro.

Așadar numărul minim de monede cu care putem plăti orice sumă mai mică de 101 euro este format din 20 monede de 5 euro, 2 monede de 1 euro și o monedă de 3 euro, în total 32 de monede.

**Problema 10.** Dacă $m, n, p\in\mathbb{N}^*$, câte numere naturale există printre fracțiile:

$\dfrac{1m}{n}; \dfrac{2m}{n}; \dfrac{3m}{n}; ... ; \dfrac{pm}{n}$.

**Soluție**: Fie d - c.m.m.d.c al numerelor m și n. Rezultă m=xd, n=yd, (x, y)=1. Numerele din enunț devin $\dfrac{1x}{y}; \dfrac{2x}{y}; \dfrac{3x}{y}; ... ; \dfrac{px}{y}$. Cum x și y sunt prime între ele, rezultă că printre aceste fracții există exact $\left[\dfrac{p}{y}\right]$ numere naturale. Dar $y=\dfrac{n}{d}$ și înlocuind obținem $\left[\dfrac{pd}{n}\right]$ numere naturale.

# Inegalități geometrice

**de Gogan Gabriela, Mălini, Suceava**

*1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, să se arate că:*

$$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}\geq 1.$$

*Demonstrație:* Din $\frac{a+b+c}{2}=p \Longrightarrow a+b+c=2p$. Înlocuind în inegalitatea de demonstrat, aceasta devine echivalentă cu $\frac{(2p-2b)(2p-2c)}{2p(2p-2a)}+\frac{(2p-2c)(2p-2a)}{2p(2p-2b)}+\frac{(2p-2a)(2p-2b)}{2p(2p-2c)}\geq 1 \Leftrightarrow$ $\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}+\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}+\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)^2}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-b)^2}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-c)^2}\geq 1 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p^2}{S^2}$, unde S este aria triunghiului ABC. Ultima inegalitate este adevărată, deoarece $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)} \Leftrightarrow \frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p-c+p-a+p-b}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow \frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p^2}{S^2}$.

Prin urmare, $\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}\geq 1$ ■

Obs. Egalitatea are loc dacă triunghiul ABC este echilateral.

*2. Să se demonstreze inegalitatea:*

$\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, *unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.*

*Demonstrație:* $\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{b+c-a}{b+c}\cdot\frac{c+a-b}{c+a}\cdot\frac{a+b-c}{a+b}\leq\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$\Leftrightarrow \frac{2(p-a)}{b+c}\cdot\frac{2(p-b)}{a+c}\cdot\frac{2(p-c)}{a+b}\leq\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}} \Leftrightarrow \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\leq\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \Leftrightarrow \frac{8}{(b+c)(c+a)(a+b)}\leq$ $\frac{1}{abc} \Leftrightarrow (b+c)(c+a)(a+b)\geq 8abc$, care este adevărată, deoarece $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ac}$.

Așadar, $\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ■

*3. Fiind dat triunghiul ABC, să se arate că:* $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geq 1$.

*Demonstrație:*

Înlocuind $tg^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$, $tg^2\frac{B}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}$, $tg^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}$ în inegalitatea din enunț, aceasta devine $\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}+\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}+\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)^2}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-b)^2}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-c)^2}\geq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p^2}{S^2}$, unde S este aria triunghiului ABC. Ultima inegalitate este adevărată,

deoarece $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p-c+p-a+p-b}{(p-a)(p-b)(p-c)}\Leftrightarrow\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{S^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}\geq 1.$$

Obs. Egalitatea are loc dacă triunghiul ABC este echilateral.

***4. Fiind dat triunghiul ABC, să se arate că*** $8\cos A\cos B\cos C\leq 1$.

*Demonstrație:* Aplicând teorema cosinusului, inegalitatea din cerință este echivalentă cu

$$8\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leq 1\Leftrightarrow(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\leq a^2b^2c^2$$

Această inegalitate este adevărată, deoarece $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\leq xyz$, unde x, y și z sunt numere reale pozitive (Justificare: $x^2> x^2-(y-z)^2$, $y^2> y^2-(z-x)^2$, $z^2> z^2-(x-y)^2$. Prin înmulțirea acestor relații, obținem $(xyz)^2>(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)(y-z+x)(z+x-y)(z-x+y)\Rightarrow$

$(xyz)^2>(x+y-z)^2(x-y+z)^2(-x+y+z)^2\Rightarrow xyz\geq(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$).

***5. Fiind dat triunghiul ABC, să se arate că:***

$$\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)+\cos^2(A-B)\geq 24\cos A\cos B\cos C.$$

*Demonstrație:*

Deoarece $(x+y)^2\geq 2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, înlocuind în această inegalitate $x=\cos A,\ \ y=2\cos B\cos C$

obținem $\left(\cos A+2\cos B\cos C\right)^2\geq 8\cos A\cos B\cos C$.

Dar $\cos A=\cos\left(\pi-(B+C)\right)=-\cos(B+C)$. Astfel

obținem $\left(-\cos(B+C)+2\cos B\cos C\right)^2\geq 8\cos A\cos B\cos C\Rightarrow$

$\left(-\cos B\cos C-\sin B\sin C+2\cos B\cos C\right)^2\geq 8\cos A\cos B\cos C\Rightarrow$

$\cos^2(B-C)\geq 8\cos A\cos B\cos C.$ Analog, obținem:

$\cos^2(C-A)\geq 8\cos A\cos B\cos C.$ $\cos^2(A-B)\geq 8\cos A\cos B\cos C.$

Însumând ultimele trei relații, obținem

$\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)+\cos^2(A-B)\geq 24\cos A\cos B\cos C$.

***Bibliografie:***

Coșniță, C., Turtoiu, F., Probleme de algebră, Editura Tehnică, București, 1972
Coța, A., Răduțiu, M. ș.a., Matematică-Geometrie și trigonometrie, Manual pentru clasa a IX a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1996.

## Asupra ordonării unor puteri cu bază naturală și exponent real.

**de Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu**

La concursul de admitere la Universitatea Politehnica din București , în anul 2016 , într-unul din subiecte s-a cerut să se găsească ordinea crescătoare a numerelor $2016^{\sqrt{2014}}$ , $2015^{\sqrt{2015}}$ , $2014^{\sqrt{2016}}$.

Ne propunem o extindere , stabilind ordinea crescătoare a puterilor reale $a=(n+1)^{\sqrt{n-1}}$, $b=n^{\sqrt{n}}$ , $c=(n-1)^{\sqrt{n+1}}$ ,unde $n\in\mathbb{N}^*$ .

Pentru $n\in N^*$, numerele consecutive *n-1 , n , n+1* nu pot fi simultan pătrate perfecte și atunci cel puțin unul dintre numerele $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$ este număr irațional(avem justificarea titlului articolului).

Dacă $n=1$ avem $a=b=1$ și $c=0$ , deci $c<a=b$.

Pentru ordonarea crescătoare a numerelor *a , b, c* dacă $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ , considerăm mai multe cazuri:

***<u>Cazul I:</u>*** Arătăm că $c<b<a$ pentru $n\in\{2,3,4\}$.

$n=2\Rightarrow c=1, b=2^{\sqrt{2}}, a=3$. Cum $\sqrt{2}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 8<9$ și $2^{\frac{3}{2}}<3\Leftrightarrow 8<9$ rezultă

$1<2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$, deci $1<2^{\sqrt{2}}<3$ , adică $c<b<a$.

Dacă *n*=3 , avem $c=2^{\sqrt{4}}=4$ , $b=3^{\sqrt{3}}$ , $a=4^{\sqrt{2}}$ și arătăm că $4<3^{\sqrt{3}}<4^{\sqrt{2}}$.

Cum $\sqrt{3}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 12>9$ și $3^{\frac{3}{2}}>4\Leftrightarrow 27>16$ , rezultă $3^{\sqrt{3}}>3^{\frac{3}{2}}>4$ , deci $4<3^{\sqrt{3}}$.

Inegalitatea $3^{\sqrt{3}}<4^{\sqrt{2}}$ o scriem echivalent $3^{\sqrt{6}}<4^2$.

Cum $\sqrt{6}<\frac{5}{2}\Leftrightarrow 24<25$ și $3^{\frac{5}{2}}<16\Leftrightarrow 3^5<16^2\Leftrightarrow 243<256$ , avem

$3^{\sqrt{6}}<3^{\frac{5}{2}}<16$ , deci $3^{\sqrt{6}}<16 \quad (*)$

Obținem $4<3^{\sqrt{3}}<4^{\sqrt{2}}$ , adică $c<b<a$ pentru *n*=3.

Dacă *n*=4 , atunci $c=3^{\sqrt{5}}$ , $b=4^{\sqrt{4}}=16$ , $a=5^{\sqrt{3}}$ și arătăm că $3^{\sqrt{5}}<16<5^{\sqrt{3}}$ , adică $c<b<a$. Avem

$3^{\sqrt{5}}<3^{\sqrt{6}}\overset{(*)}{<}16$ , iar pentru $16<5^{\sqrt{3}}$ ne folosim de proprietăți ale logaritmilor și de valoarea

$lg2\cong 0,301<0,302$ : $16<5^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow lg2^4<lg5^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 4lg2<\sqrt{3}\,lg\frac{10}{2}\Leftrightarrow 4lg2<\sqrt{3}(1-lg2)\Leftrightarrow$

$(4+\sqrt{3})lg2<\sqrt{3}$

Dar $(4+\sqrt{3})lg2<(4+\sqrt{3})\cdot 0,302=1,208+0,302\sqrt{3}$ iar

$1,208+0,302\sqrt{3}<\sqrt{3}\Leftrightarrow 1,208<0,698\sqrt{3}\Leftrightarrow 604<349\sqrt{3}\Leftrightarrow 604^2<349^2\cdot 3\Leftrightarrow$

$364816<365403$ , adevărat. Rezultă $(4+\sqrt{3})lg2<1,208+0,302\sqrt{3}<\sqrt{3}$ de unde $16<5^{\sqrt{3}}$.

Deci $c<b<a$ și pentru *n*=4.

***<u>Cazul</u>* <u>II:</u>** Arătăm că $a<b$ , $\forall n\geq 5$.

Considerăm funcția $f(x)=\frac{ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ pentru $x\geq 4$ , cu derivata

$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{ln(x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x-(x+1)ln(x+1)}{2x(x+1)\sqrt{x}}==\frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}$ , unde $g(x)=2x-(x+1)ln(x+1)$ cu $x\in[4,\infty)$.

Funcția $g:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ este derivabilă și are derivata

$g'(x)=2-ln(x+1)-1=1-ln(x+1)<0, \forall x\in[4,\infty)$.

Atunci $g$ este funcție strict descrescătoare , deci $g(x)\leq g(4)$ , $\forall x\geq 4$. Dar $g(4)=8-5ln5$ și deoarece $ln5=1,609\ldots>1,6$ avem $g(4)<8-5\cdot 1,6=0$ , deci $g(x)\leq g(4)<0$ , $\forall x\geq 4$.

Rezultă $f'(x)<0, \forall x\geq 4$ și atunci funcția *f* este strict descrescătoare pe $[4,\infty)$.

Deci $4\leq x<x+1\Rightarrow f(4)\geq f(x)>f(x+1)$ , $\forall x\geq 4$; $\frac{ln5}{\sqrt{4}}=ln\sqrt{5}\geq\frac{ln(x+1)}{\sqrt{x}}>\frac{ln(x+2)}{\sqrt{x+1}}$ , $\forall x\geq 4$ ,

de unde $ln(x+1)^{\sqrt{x+1}} > ln(x+2)^{\sqrt{x}}, \forall x \geq 4$, deci $(x+1)^{\sqrt{x+1}} > (x+2)^{\sqrt{x}}$ , $\forall x \geq 4$.
Pentru $x = n-1 \geq 4$(deci $n$ natural și $n \geq 5$) , avem
$(n-1+2)^{\sqrt{n-1}} < n^{\sqrt{n}}$, deci $(n+1)^{\sqrt{n-1}} < n^{\sqrt{n}}, \forall n \geq 5$ adică $a < b$, pentru $n \geq 5$.

***Cazul* III:** Arătăm că $c < a$ , pentru $n \in \{5,6,7\}$.

Funcția $f: [4,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ este derivabilă cu $f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{lnx}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-lnx}{2x\sqrt{x}}$.
Pentru $x = e^2 = 7{,}3890 \ldots$ avem $f'(e^2) = 0$, iar dacă $x \in [4,\infty)$, avem $f'(x) > 0$.
Deci funcția $f$ este strict crescătoare pe intervalul $[4, \infty)$.
Atunci $f(4) < f(6)$ și cum $7 < e^2$, avem și $f(5) < f(7)$.
Dar $f(4) < f(6) \Leftrightarrow \frac{ln4}{\sqrt{4}} < \frac{ln6}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sqrt{6}\,ln4 < \sqrt{4}\,ln6 \Leftrightarrow 4^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{4}} \Leftrightarrow c < a$, pentru $n = 5$.
Avem și $f(5) < f(7) \Leftrightarrow \frac{ln5}{\sqrt{5}} < \frac{ln7}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sqrt{7}ln5 < \sqrt{5}\,ln7 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{7}} < 7^{\sqrt{5}} \Leftrightarrow c < a$, pentru $n = 6$. Dacă
*n*=*7* atunci $c = 6^{\sqrt{8}}$, $a = 8^{\sqrt{6}}$ iar $c < a \Leftrightarrow 6^{\sqrt{8}} < 8^{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,ln6 < 3\sqrt{6}\,ln2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}ln2 > 2ln6$.
Cum $\sqrt{3} > 1{,}73$; $ln2 = 0{,}6931 \ldots > 0{,}693$ și $ln6 = 1{,}7917 \ldots < 1{,}792$
avem $3\sqrt{3}ln2 > 3 \cdot 1{,}73 \cdot 0{,}693 = \;=3{,}59667$ și $2ln6 < 2 \cdot 1{,}792 = 3{,}584$, deci
$3\sqrt{3}ln2 > 3{,}59667 > 3{,}584 > 2ln6$, de unde $3\sqrt{3}ln2 > 2ln6$.
Astfel $c < a$ și pentru $n = 7$.

***Cazul IV:*** Arătăm că $a < c$, dacă $n \geq 8$.
$n = 8 \Rightarrow a = 9^{\sqrt{7}}, c = 7^{\sqrt{9}} = 7^3$ și $a < c \Leftrightarrow 9^{\sqrt{7}} < 7^3 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{7}} < 7^3 \Leftrightarrow 2\sqrt{7}ln3 < 3ln7 \quad (**)$
$2\sqrt{7}ln3 = 2 \cdot 2{,}6457 \ldots \cdot 1{,}0986 \ldots < 2 \cdot 2{,}646 \cdot 1{,}098 = 5{,}810616 < 5{,}811$
Avem și $3ln7 = 3 \cdot 1{,}9459 \ldots > 3 \cdot 1{,}9459 = 5{,}8377$
Deci $2\sqrt{7}ln3 < 5{,}811 < 5{,}8377 < 3ln7$ și rezultă $(**)$
Arătăm că $a < c$ și pentru $n \geq 9$, considerând funcția $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$, ca și la cazul III , dar pentru $x > e^2$.
Cum $f'(x) = \frac{2-lnx}{2x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (e^2, \infty)$,
rezultă $f$ strict descrescătoare pe intervalul $(e^2, \infty)$, deci $f(x) > f(x+2), \forall x > e^2$
Dacă $x = n-1 > e^2$, pentru $n \geq 9 > e^2 + 1 > 8{,}38 \ldots$ , avem $f(n-1) > f(n+1), \forall n \geq 9$, de unde $\frac{ln(n-1)}{\sqrt{n-1}} > \frac{ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$ ; $(n+1)^{\sqrt{n-1}} < (n-1)^{\sqrt{n+1}}, \forall n \geq 9$, deci $a < c$, pentru $n \geq 9$.

***Cazul* V:** Dacă $n \in \{8,9\}$, arătăm că $c < b$.
$n = 8 \Rightarrow c = 7^{\sqrt{9}} = 7^3$ și $b = 8^{\sqrt{8}} = 2^{6\sqrt{2}}$, iar $c < b \Leftrightarrow 7^3 < 2^{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,ln2 > ln7$
Dar $2\sqrt{2}ln2 = 2 \cdot 1{,}4142 \ldots \cdot 0{,}6931 \ldots > 1{,}414 \cdot 1{,}386 = 1{,}9598 > 1{,}94590 \ldots = ln7$,
deci $2\sqrt{2}ln2 > ln7 \Leftrightarrow c < b$, pentru *n*=8.
$n = 9 \Rightarrow c < b \Leftrightarrow 8^{\sqrt{10}} < 9^{\sqrt{9}} \Leftrightarrow 2^{3\sqrt{10}} < 3^6 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{10}} < 3^2 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}ln3 > \sqrt{5}\,ln2$
$\sqrt{2}ln3 = 1{,}4142 \ldots \cdot 1{,}0986 \ldots > 1{,}414 \cdot 1{,}098 = 1{,}552572 > 1{,}552$
$\sqrt{5}\,ln2 = 2{,}2360 \ldots \cdot 0{,}6931 \ldots < 2{,}2361 \cdot 0{,}6932 = 1{,}55006452$
Deci $\sqrt{2}ln3 > 1{,}552 > 1{,}55006452 > \sqrt{5}ln2$ și avem $\sqrt{2}ln3 > \sqrt{5}ln2$, adică $c < b$ și pentru $n = 9$.

***Cazul* VI:** Să arătăm că $b < c, \forall n \geq 10$.
Considerăm funcția derivabilă
$f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x+1}}, \forall x \geq 10$ pentru care $f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{lnx}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2x+2-x\,lnx}{2x(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x+1}}$,
unde $g(x) = 2x + 2 - xlnx, \forall x \geq 10$. Avem $g'(x) = 2 - lnx - 1 = 1 - lnx < 0, \forall x > e = 2{,}71 \ldots$ deci $g'(x) < 0, \forall x \geq 10 > e$ iar $g$ este strict descrescătoare pe $[10, \infty)$. Rezultă $g(x) \leq g(10), \forall x \geq 10$. Dar
$g(10) = 20 + 2 - 10ln10 = 2(11 - 5ln10) < 0$, deoarece $11 < 5ln10 \Leftrightarrow e^{\frac{11}{5}} < 10 \Leftrightarrow e^{11} <$
$< 10^5 \Leftrightarrow 59874{,}14 \ldots < 100000$, adevărat.

Astfel $g(x) \le g(10) < 0, \forall x \ge 10$ și rezultă $f'(x) < 0, \forall x \ge 10$, adică f este strict descrescătoare pe $[10, \infty)$. Atunci $10 \le x < x+1 \Rightarrow f(x+1) < f(x) \le f(10), \forall x \ge 10$, de unde $\frac{ln(x+1)}{\sqrt{x+2}} < \frac{lnx}{\sqrt{x+1}}, \forall x \ge 10 \Leftrightarrow (x+1)^{\sqrt{x+1}} < x^{\sqrt{x+2}}, \forall x \ge 10$.

Pentru $x = n - 1 \ge 10$, deci pentru n natural, $n \ge 11$, obținem

$$n^{\sqrt{n}} < (n-1)^{\sqrt{n+1}}, \forall n \ge 11, \text{ adică } b < c, \forall n \ge 11.$$

Pentru $n = 10$, avem $b < c \Leftrightarrow 10^{\sqrt{10}} < 9^{\sqrt{11}} \Leftrightarrow \sqrt{10} < \sqrt{11}\,lg9 \Leftrightarrow \sqrt{10} < 2\sqrt{11}\,lg3$.

Dar $\sqrt{10} = 3{,}162277 \ldots < 3{,}163464 = 6{,}632 \cdot 0{,}477 < 2 \cdot 3{,}316 \cdot 0{,}477 < 2\sqrt{11}\,lg3$,
deci $\sqrt{10} < 2\sqrt{11}\,lg3$. Astfel $b < c$ și pentru $n$=10.

Din analiza cazurilor I-VI , concluzionăm:

$n = 1 \Rightarrow c < a = b$; $n \in \{2,3,4\} \Rightarrow c < b < a$; $n \in \{5,6,7\} \Rightarrow c < a < b$;
$n \in \{8,9\} \Rightarrow a < c < b$; $n \ge 10 \Rightarrow a < b < c$.

Pentru $n = 2015 > 10$, rezultă $a < b < c$, deci $2016^{\sqrt{2014}} < 2015^{\sqrt{2015}} < 2014^{\sqrt{2016}}$ și avem problema dată la concurs în 2016.

## Noțiuni fundamentale ale matematicii (I)

**de Daniel Văcaru, Pitești**

Prima noțiune fundamentală a matematicii este, după părerea mea, **numărul**. El este posibil să fi apărut empiric. Bănuiesc că lumea largă a Umanității din Epoca Primitivă, ce are caracteristică faptul că reușești să te faci înțeles, în cele din urmă, prin orice mijloc, ar fi măsurat cantități de grâne(**Aritmetică**), arii de teren (**Geometrie**) și ar fi văzut că ceea ce le unește este **NUMĂRUL**.

Și pentru că este natural să vorbești în termeni naturali, iată **NUMERELE NATURALE.**

Să o luăm de la început. Back in square 1!.

1 kg de mere, mi-e mai simplu cu merele, sau o palmă de pământ, cum se zice la noi, la țară.

Și uite așa, țărănește, am introdus pe 1.

Să recapitulăm. Am vorbit despre **ARITMETICĂ, GEOMETRIE**, am introdus pe **1 ∈ N** .

Să adunăm merele. E mai simplu! Pofticioși, la cratiță! Încă nu, nu avem decât 1+1=2 ∈ N mere.

Să vedem ce mai putem să facem cu 2.

Mă gândesc să le împart. Am 2 mere și 2 copii, Ana și Barbu. Aș dori să le împart merele. Atunci e simplu, fiecare primește câte 1=2**:**2 mere.

Ce am reușit până acum? L-am introdus pe 2 ∈ N ca **ADUNARE** 1+1=2. Și am mai și împărțit. Am introdus în această scurtă poveste didactică și operațiile de ADUNARE și **ÎMPĂRȚIRE A NUMERELOR NATURALE.**

Hai să fac și o **SCĂDERE.** Sau, poate am uitat ceva! Cineva, la început, mă gândesc la desenele animate cu omulețul lui GOPO, i-a dat omulețului ceva (cred că MINTEA) și i-a zis: Îmi plătești când vei putea! Deci ești dator la mine! O mie de ani, cred, a zis omulețul!

El era singur 1 și era dator. Acum nu poate plăti, căci nu are nimic, dacă plătește rămâne gol-goluț! Nu știu dacă în desenele animate ale lui GOPO apare vreo GOPOLINA, era mai ușor. Rămân cu merele mele, am două mere, sunt dator vândut!, nu-mi pasă, luna și doi bani jumate!, 2-1=1 ∈ N .

Ce mai pot face eu cu 2? Ar mai fi câte ceva, hai să merg înainte, mai dau un lustru, poate îmi mai vine vreo idee, 2+1=3 ∈ N și 3+1=4 ∈ N .

Am înmulțit numerele, mulțimea mea a numerelor naturale e mai bogată, avem 1,2,3,4 ∈ N (4 Cupa și Campionatul!) Știu și să adun, scad, împart. Acestea sunt operații cu numere naturale. Adică **LEGI DE COMPOZIȚIE.**

Ia să vedem ce le unește pe 2 și 3. Ambele sunt venite de la merele mele. La ambele știu să împart 2:1=2 și 2 **:**2=1 și 3**:**1=3 și 3**:**3=1 . Hai că sunt DATOR! O mie de ani pace! AM ÎNȚELES! Înmulțesc (fără cratimă) și scriu 2=1 · 2=2 · 1( 1 ) și 3=1 · 3=3 · 1( 2 ) . Îl am și pe 4. GOPO, mulțumesc! Revin în peisaj, și îmi dau seama că 4 : 1=4,4:2=2,4:4=1 . Asemănări și deosebiri, la metru pătrat și secundă. 4=1 · 4=2 · 2=4 · 1( 3 ) . S-a mărit numărul de scrieri ale numerelor cu semnul " · " . A rămas de la legi de compoziție, din păcate. Scuze! Domozină, ești la numere naturale! Și tu vorbești de legi de compoziție! Ce Dumnezeu! Puțină măsură și decență! Revin și scriu · → × (ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE)

Dar avem două **NUMERE PRIME** 2,3 și un **PĂTRAT PERFECT** 4. Numerele prime sunt cele care au scrieri (DESCOMPUNERI) ca în relațiile ( 1 ) ,( 2 ) . Pătrate perfecte sunt numerele care se comportă ca în ( 3 ) .

Abia acum să mai fac puțină ordine, hai că sunt aproape gata!
2=1 × 2=2 × 1,3=1 × 3=3 × 1 este legat de **COMUTATIVITATEA** de zilele trecute, căci și înmulțirea este tot o lege de compoziție.

M-am mai îngrășat puțin, ptiu!, nu te deochea!, și $4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1=2^2$ . Și iată și ridicarea la putere! Am uitat cum am introdus ridicarea la putere! Am uitat să consemnez sub formă de PDF. Ne descurcăm! Ce Dumnezeu, pentru o curcă! A apărut și curca! Acum cel ce este în spatele acestei povești didactice și metodice se poate prezenta. **Daniel Văcaru** PDF (Portable Document Format) .

# Ştiaţi că ....

.....Pitagora și-a plătit primul elev să participe la lecțiile sale? Cu timpul au început elevii să plătească și astfel Pitagora a creat o adevărată școală asemănătoare cu o sectă care îi purta numele cu aproximativ 600 de discipoli.

....Pitagora și discipolii săi au numit numerele naturale care au proprietatea că sunt egale cu suma divizorilor lor mai mici decât aceste numere ***"numere perfecte"***( ex:6=1+2+3)?

....Pitagora a descoperit și armonia muzicală atunci când trecea pe lângă o fierărie? El și-a dat seama că acele ciocane care cântăreau jumătate, două treimi sau trei sferturi din masa unui anume ciocan produceau sunete armonioase.

....Pitagora a refuzat să accepte existența numerelor iraționale și acesta poate fi motivul pentru care (spune legenda) unul din elevii săi a fost executat prin înecare?

....Matematicienii din întreaga lume s-au străduit vreme de 358 de ani (de la 1637 până în 1995) să demonstreze Marea Teoremă a lui Fermat?( teorema spune că ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi pentru $n \geq 3$ .

**Prof. Gabriela Florina Toader, Buzău**

„ Matematica nu este nici mai mult, nici mai puțin,
decât partea exactă a gândirii noastre.”
**L.E.J. Brouwer**
**(1881- 1966)**

# 3. Probleme rezolvate

## ▪ Clasa a V-a

**G:1004. Un elev parcurge un drum în formă de pătrat și un alt drum în formă de dreptunghi a cărui lungime este de trei ori cât lățimea. Știind că al doilea drum este de două ori mai lung decât primul, să se compare lățimea dreptunghiului cu latura pătratului.**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare***:

Fie a latura pătratului de la primul drum și l lățimea dreptunghiului de la cel de-al doilea drum. Cum lungimea dreptunghiului este de trei ori mai mare decât lățimea și perimetrul dreptunghiului este dublul perimetrului pătratului obținem: $P_{\square} = 2\cdot P_{\square} \Rightarrow 2(L+l) = 2\cdot 4a \Rightarrow 3l + l = 4a \Rightarrow l = a$.

**G:1005. Arătați că numărul** $A = \overline{\underbrace{11...11}_{2021}\underbrace{22...22}_{2021}} + \overline{\underbrace{33..33}_{2021}\underbrace{44...44}_{2021}} - \overline{\underbrace{11...11}_{2021}0}$ **este pătrat perfect.**

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

***Rezolvare:***

Notăm $t = \overline{\underbrace{11...11}_{2021}} \Rightarrow A = t\cdot 10^{2021} + 2t + 3t\cdot 10^{2021} + 4t - 10t = t\cdot\left(10^{2021} + 2 + 3\cdot 10^{2021} + 4 - 10\right) =$

$4t\left(10^{2021} - 1\right) = 4t\cdot\overline{\underbrace{999...99}_{2021}} = 4t\cdot 9t = (6t)^2$, deci A este pătrat perfect.

**G:1006. Rezolvați ecuația** $x^x = 2020^{2020^{2021}}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București și **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare***: $2020^{2020^{2021}} = 2020^{2020\cdot 2020^{2020}} = \left(2020^{2020}\right)^{2020^{2020}} = x^x \Rightarrow x = 2020^{2020}$.

**G:1007. Care sunt ultimele două cifre ale numărului** $N = 6\cdot 5^{2021} - 4\cdot 5^{2020} + 2\cdot 5^{2019}$ **?**

**Livia-Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:*** $N = 6\cdot 5^4\cdot 5^{2017} - 4\cdot 5^3\cdot 5^{2017} + 2\cdot 5^2\cdot 5^{2017} = \left(6\cdot 5^4 - 4\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2\right)\cdot 5^{2017} =$

$= (6-4+2)\cdot 5^2\cdot 5^{2017} = 100\cdot 25\cdot 5^{2017}$ Așadar, $u_2(N)=00$.

**G:1008. Determinați numerele naturale** $\overline{abc}$ **, pentru care este îndeplinită relația:**

$\overline{abc} + \overline{bc} + c = \overline{cbc}$ .

**Sanda Mitea**, Cugir, Alba

***Rezolvare:*** Relația este echivalentă cu $50a + 5b = 49c$ sau $\underbrace{5\cdot\overline{ab}}_{M_5} = \underbrace{45c}_{M_5} + 4c$ și prin urmare

$\left.\begin{matrix} c = M_c \\ c = cifră \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = 5$. Atunci $5\cdot\overline{ab} = 245$ , astfel $\overline{ab} = 49$, iar $\overline{abc} = 495$ .

$\boxed{\text{G:1009}}$. **Determinați cifrele în baza 10 astfel încât** $\dfrac{\overline{aa}+\overline{bb}}{a+b}+\dfrac{\overline{ab}}{2}=57$. **Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare***:

Relația dată este echivalentă cu $\dfrac{11(a+b)}{a+b}+\dfrac{10a+b}{2}=57 \Rightarrow 10a+b=92 \Rightarrow a=9,\ b=2$.

$\boxed{\text{G:1010}}$. **Determinați numerele** $\overline{abc}$ **pentru care** $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare***:

Relația dată devine: $100a+10b+c=10a+b+10b+c+10c+a \Leftrightarrow 89a=b+10c \Leftrightarrow 89a=\overline{cb}$
Din ultima relație rezultă că a=1, b=9, c=8, și prin urmare există un singur număr cu cerința dată și anume 198.

$\boxed{\text{G:1011}}$. **Arătați că există un număr prim p astfel încât** $\dfrac{44447}{p}$ **să fie număr natural pătrat perfect.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni,Giurgiu

***Rezolvare***: $\dfrac{44447}{p}=\dfrac{13^2\cdot 263}{263}=13^2$, pentru p = 263 care este număr prim.

## ▪ Clasa a VI-a

$\boxed{\text{G:1012}}$. **Aflați numărul real x din egalitatea** $\left\{\left[\left(\dfrac{x}{43}-1\right)\cdot\dfrac{1}{46}+\dfrac{1}{43}\right]\cdot\dfrac{43}{44}:\dfrac{2020}{2021}-\dfrac{1}{2020}\right\}-1=0$.

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:*** $\left[\left(\dfrac{x}{43}-1\right)\cdot\dfrac{1}{46}+\dfrac{1}{43}\right]\cdot\dfrac{43}{44}:\dfrac{2020}{2021}=\dfrac{2021}{2020}\Rightarrow\left[\left(\dfrac{x}{43}-1\right)\cdot\dfrac{1}{46}+\dfrac{1}{43}\right]=\dfrac{44}{43}\Rightarrow$

$\left(\dfrac{x}{43}-1\right)\cdot\dfrac{1}{46}=\dfrac{44}{43}-\dfrac{1}{43}=1\Rightarrow\dfrac{x}{43}-1=46\Rightarrow x=43\cdot 47=2021$.

$\boxed{\text{G:1013}}$. **Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2021 dau câtul și restul egale, se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.**

**Livia- Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:***

Fie $a=2021\cdot r+r=2020\ r$ cu $r\in\{0;1;2;....;2020\}$. Suma acestor numere este $2022\cdot 0+2022\cdot 1+...+2022\cdot 2020=2022\cdot(1+2+3+...+2020)=2022\cdot\dfrac{2020\cdot 2021}{2}$. Atunci, dublul sumei acestor numere este $2020\cdot 2021\cdot 2022$ adică trei numere consecutive.

$\boxed{\text{G:1014}}$. **Rezolvați în** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **ecuația** $2xy+7=(x+1)(y+5)$. **Doina** și **Mircea Mario Stoica**, Arad

***Rezolvare:***

Ecuația data este echivalentă cu $2xz+7-xy-5x-y-2=3\Leftrightarrow(x-1)(y-5)=3$ de unde se obțin soluțiile $S=\{(-2;4),(0;2),(2;8),(4;6)\}$.

$\boxed{\text{G:1015}}$. **Determinați a, b, c, d știind că** $\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{9},\ \dfrac{b}{6}=\dfrac{c}{3},\ \dfrac{c}{9}=\dfrac{d}{16}$ **și** $3a-2b+4c-d=40$.

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare***:

Relațiile date se pot scrie $\frac{a}{12}=\frac{b}{18}=\frac{c}{9}=\frac{d}{16}=k\Rightarrow a=12k,\ b=18k,\ c=9k,\ d=16k$. După înlocuire în relația $3a-2b+4c-d=40$ rezultă $k=2$ adică $a=24, b=36, c=18, d=32$.

**G:1016. Să se arate că oricare ar fi n natural, numărul $N=2019^{n+2}+2021^{n+1}+2023^{n}$ nu este pătrat perfect.**

**Gheorghe Ghiță,** Buzău

***Rezolvare:***
Pentru n = 0 numărul $N=2019^2+2021+1=4078383$ care nu este pătrat perfect.
Pentru $n\geq 1\Rightarrow N=(2020-1)^{n+2}+(2020+1)^{n+1}+(2024-1)^{n}=M_4+(-1)^{n+2}+M4+1+M4+(-1)^{n}$.
Pentru n par sau impar se obține $M_4+3$ care nu e pătrat perfect.

**G:1017. Aflați numerele naturale prime a, b, c, știind că îndeplinesc condițiile:**

$43\cdot a^2+86\cdot b-16\cdot c=2021$ **, precum și $a+b+c$ este un număr natural prim.**

**Sanda Mitea**, Cugir, Alba

***Rezolvare:*** Egalitatea este echivalentă cu $43\cdot 47=43\cdot a^2+43\cdot 2\cdot b-16\cdot c$, ce este îndeplinită dacă $c=M_{43}$ și cum c este număr prim, rezultă $c=43$.

Atunci obținem $a^2+2\cdot b=63$ și cum $8^2=64$ deducem că $a\leq 7$ și găsim:
(a;b)∊{(7;7), (5;19)}, dar numai 5+19+43=67 = prim. Deci soluția este (a;b;c)=(5;19;43).

**G:1018. Se dau n fracții pozitive. Să se arate că fracția care are numărătorul egal cu suma numărătorilor celor n fracții și numitorul egal cu suma numitorilor celor n fracții este mai mare decât cea mai mică dintre fracțiile date și mai mică decât cea mai mare dintre fracțiile date.**

**Petre Rău,** Galați

***Rezolvare:*** Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că am notat fracțiile în ordinea lor crescătoare $0<\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\ldots<\frac{a_n}{b_n}$. Avem de demonstrat că $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$.

Dar $\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1}{b_1}$, deci $a_2>b_2\cdot a_1/b_1$, $\frac{a_3}{b_3}>\frac{a_1}{b_1}$, deci $a_3>b_3\cdot a_1/b_1$ ,..., $\frac{a_n}{b_n}>\frac{a_1}{b_1}$, deci $a_n>b_n\cdot a_1/b_1$ și adunând toate acestea, avem că $a_2+a_3+\ldots+a_n>(b_2+b_3+\ldots+b_n)\cdot\frac{a_1}{b_1}$, adică $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n>(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)\cdot\frac{a_1}{b_1}$ și inegalitatea din stânga a fost astfel demonstrată. În mod analog se demonstrează și inegalitatea din dreapta.

**G:1019. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x^2-2x-4080399=0$.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare**: Din $x^2-2x=4080399$ (*) observăm că partea stângă trebuie să fie număr impar adică x trebuie să fie impar. Fie $x=2n+1$ cu $n\in\mathbb{Z}$.
Atunci $x\cdot(x-2)=x^2-2x$ iar în (*) obținem $(2n+1)(2n+1-2)=4080399$, de unde :
$(2n+1)(2n-1)=4080399$, $4n^2-1+1=4080399+1\Rightarrow$

$$n^2=\frac{4080400}{4}=1020100=100\cdot 10201=10^2\cdot 101^2=1010^2\Rightarrow n\in\{-1010,1010\}.$$ Atunci,

$x\in\{-2019,2021\}$.

**G:1020. Pentru $x,y,z\in\mathbb{Z}^*$ și $\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}$, determinați valoarea raportului $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.**

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

***Rezolvare***:

Dacă $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z,\ y+z=-x,\ z+x=-y \Rightarrow \dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\dfrac{(-z)(-x)(-y)}{xyz}=-1.$

Dacă $x+y+z \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2 \Rightarrow x+y=2z,\ y+z=2x,\ z+x=2y \Rightarrow$

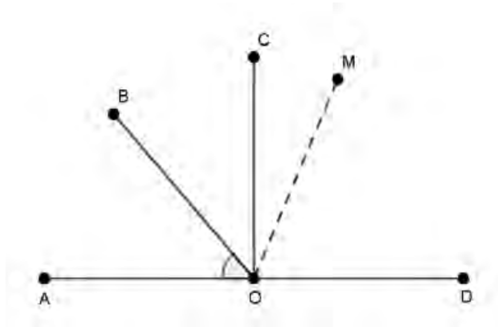
$\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\dfrac{(2z)(2x)(2y)}{xyz}=8$.

**G:1021. a) Să se determine măsura unui unghi, știind că o treime din complementul său, este cu 19 mai mic decât sfertul suplementului său.**
**b) Dacă m(∡AOB) este cea determinată la punctul a), CO⊥AO , OM este bisectoarea suplementului unghiului AOB, arătați că m(∡AOB)= 2·m(∡COM), B,C,M de aceeași parte a lui AD.**

**Sanda Mitea**, Cugir, Alba

**Rezolvare:** a) Fie $m(\sphericalangle AOB)=x$, atunci obținem ecuația

$\frac{1}{3}\cdot(90^0-x)+19^0=\frac{1}{4}\cdot(180^0-x)$ sau
$4\cdot(90^0-x)+228^0=3\cdot(180^0-x)$ ce are soluția
$x=48^0$.




b) Avem m(∡AOB) = $x$ = $48^0$, complementul BOC, m(∡BOC) = $42^0$, suplementul BOD, m(∡BOD) = $132^0$, precum și m(∡BOM) = m(∡MOD) = $66^0$. Astfel m(∡COM) = $66^0-42^0=24^0$, de unde se obține
m(∡AOB)= 2·m(∡COM).

# ▪ Clasa a VII-a

**G:1022. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Dacă $a^2+b^2+c^2-10a-10b-14c+99=0$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.**

**Doina și Mircea Mario Stoica,** Arad

***Rezolvare***:

Relația dată se scrie ca $(a-5)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=0$ de unde obținem $a=b=5$ adică triunghiul ABC este isoscel.

**G:1023. Se consideră mulțimea: $A=\left\{p\in\mathbb{N} \middle| p=3n^2+2,\ n\in\mathbb{N}\right\}$.**

**a) Să se arate că numărul $2030\in A$;**
**b) Să se scrie numărul 2030 ca suma a trei pătrate perfecte.** **Adrian Stan,** Buzău

***Rezolvare***:

a) $2030=3\cdot n^2+2 \Rightarrow 2028=3n^2 \Rightarrow 676=n^2 \Rightarrow n=26$. Așadar, $2030=3\cdot 26^2+2\in A$.
b) Cum $3n^2+2=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 \Rightarrow 2030=25^2+26^2+27^2$.

**G:1024. Dacă $a,\ b\in\mathbb{R}_+$ și $a+b=2\sqrt{25+ab}$ determinați $a-b$.**

**Livia- Emilia Stan,** Buzău

**Rezolvare:**

$(a+b)^2=4(25+ab)\Rightarrow a^2+2ab+b^2=4(25+ab)\Rightarrow a^2-2ab+b^2=100\Rightarrow (a-b)^2=100\Rightarrow a-b=\pm 10$.

**G:1025. Să se scrie fracția $F=\dfrac{17\cdot 2^{102}+59}{93\cdot 2^{101}-93}$ ca suma a trei fracții cu numărătorul 1. Arătați că numărul $(2^{2020}-1)\cdot F$ este natural.**

**Ionel Tudor,** Călugăreni,Giurgiu

***Rezolvări*:**

$$F=\frac{17\cdot 2^{102}+59}{93\cdot(2^{101}-1)}=\frac{34(2^{101}-1)+93}{93(2^{101}-1)}=\frac{34}{93}+\frac{1}{2^{101}-1}=\frac{31+3}{3\cdot 31}+\frac{1}{2^{101}-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{31}+\frac{1}{2^{101}-1}.$$

$$(2^{2020}-1)\cdot F=\frac{2^{2020}-1}{3}+\frac{2^{2020}-1}{31}+\frac{2^{2020}-1}{2^{101}-1}=a+b+c\in\mathbb{N}.$$

$$2^{2020}-1=(2^4)^{504}-1=(2^4-1)\cdot\left((2^4)^{504}+(2^4)^{503}+\ldots+2^4+1\right)=M_{15}=M_3\Rightarrow a=\frac{2^{2020}-1}{3}\in\mathbb{N}.$$

Analog, $2^{2020}-1=(2^5)^{404}-1=(2^5-1)\cdot\left((2^5)^{403}+(2^5)^{402}+\ldots+2^5+1\right)=M_{31}\Rightarrow b=\dfrac{2^{2020}-1}{31}\in\mathbb{N}$ și

$$2^{2020}-1=(2^{101})^{20}-1=(2^{101}-1)\cdot\left((2^{101})^{19}+(2^{101})^{18}+\ldots+2^{101}+1\right)=M_{(2^{101}-1)}\Rightarrow c=\frac{2^{2020}-1}{2^{101}-1}\in\mathbb{N}$$

**G:1026. Aflați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{x^2+4x+2021}\in\mathbb{Z}$.** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:***

$\sqrt{x^2+4x+2021}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x^2+4x+2021=k^2,\ k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow (x+2)^2+2017=k^2\Leftrightarrow$

$(k-x-2)(k+x+2)=2017\Rightarrow x\in\{-1010;1006\}$ .

**G:1027. Să se arate că numărul $A=\sqrt{1+2017\sqrt{1+2018\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}}}}$ este rațional.**

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare*:** Cum $1+2021\cdot 2023=1+2021\cdot(2021+2)=(2021+1)^2=2022^2$ obținem

$\sqrt{1+2020\cdot\sqrt{2022^2}}=\sqrt{1+2020\cdot 2022}=\sqrt{1+2020(2020+2)}=\sqrt{(1+2020)^2}=\sqrt{2021^2}=2021$ .

Din aproape în aproape prin înlocuire se obține

$A=\sqrt{1+2017\cdot\sqrt{2019^2}}=\sqrt{1+2017\cdot 2019}=\sqrt{(1+2017)^2}=2018\in\mathbb{Q}$.

**G:1028. a) Arătați că numărul $A=\sqrt{51+4\sqrt{47}}\cdot\sqrt{51-4\sqrt{47}}\cdot\sqrt{55-4\sqrt{51}}\cdot\sqrt{55+4\sqrt{51}}$ este natural.**

**b) Arătați că numărul $B=\sqrt{43^{2022}+47^{2020}}$ este irațional.** **Sanda Mitea,** Cugir, Alba

***Rezolvare*:**

a) $A=\sqrt{51^2-(4\sqrt{47})^2}\cdot\sqrt{55^2-(4\sqrt{51})^2}=\sqrt{2601-752}\bullet\sqrt{3025-816}=43\cdot 47=2021\in\mathbb{N}$.

b) Un pătrat perfect dă, la împărțirea cu 13, unul din resturile: 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12.

Pe de altă parte avem că: $(a+b)^n=M_a+b^n$. Atunci,

$$43^{2022}=(13\cdot 3+4)^{2022}=(M_{13}+4)^{2022}=M_{13}+4^{2022}=M_{13}+\left(4^3\right)^{674}=M_{13}+(65-1)^{674}=M_{13}+M_{13}+1$$

$$47^{2020}=(13\cdot 3+8)^{2020}=M_{13}+8^{2020}=M_{13}+\left(4^3\right)^{1000}=M_{13}+(65-1)^{1010}=M_{13}+M_{13}+1.$$

Așadar, $43^{2022}+47^{2020}=M_{13}+2$ adică numărul $B=\sqrt{43^{2022}+47^{2020}}$ nu poate fi rațional.

$\boxed{\text{G:1029}}$. **Demonstrați că pentru orice numere** $x, y, z \in \mathbb{R}$, **avem** $\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz+x+y+z\right)^2 \geq 4\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$. **Adrian Gobej,** Curtea de Argeș

***Rezolvare:***

Din $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$, notând cu $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=m$ și $x+y+z=n$ obținem $(m+n)^2 \geq 4mn \Leftrightarrow (m-n)^2 \geq 0$ adevărată cu egalitate pentru $m=n$.

$\boxed{\text{G:1030}}$. **Fie** $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ......\cdot n$. **Găsiți valoarea minimă a lui n, astfel ca a să fie divizibil cu** $p^2$ **, unde p este cel mai mare număr prim de două cifre.**

**Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede, Teleorman

***Rezolvare:***

Știm că p = 97. Dar în numărul **a** factorii sunt consecutivi, deci pe al doilea factor p = 97 , îl găsim în numărul 2p= 194, deci n =194.

$\boxed{\text{G:1031}}$. **Să se arate că numărul natural de 2n+1 cifre, A =** $1\underbrace{00...0}_{\text{n-2 cifre de 0}}18\underbrace{00...0}_{\text{n-2 cifre de 0}}81$ **este un pătrat perfect, n fiind un număr natural oarecare.**

**Petre Rău,** Galați

***Rezolvare***: $A=(10^n+18)\cdot 10^n+81=10^{2n}+18\cdot 10^n+81=(10^n+9)^2$.

$\boxed{\text{G:1032}}$. **Dacă** $p\rangle 3$ **este un număr prim, atunci** $p^6=M_{72}+1$. **Dorin Mărghidanu**, Corabia

**Rezolvare**: Se va arăta că $p^6-1$ este un multiplu de 72.

$p^6-1=(p-1)(p+1)(p^4+p^2+1)$ unde p-1 și p+1 sunt numere pare consecutive, deci, unul din ele este multiplu de 4 iar $(p-1)\cdot(p+1)$ este multiplu de 8.

Cum $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$ este produsul a trei numere naturale consecutive , el este multiplu de **3** . Cum p este prim , rezultă că de fapt **( p — 1) ( p + 1)** este multiplu de **3** .

Așadar, $(p-1)\cdot(p+1)=p^2-1$ este multiplu de 24 sau $p^2=M_{24}+1$ .

Deci, $p^6-1=(p^2-1)(p^4+p^2+1)=M_{24}\cdot\left((M_{24}+1)^2+(M_{24}+1)+1\right)=M_{24}\cdot\left(M_{24}+3\right)=M_{24}\cdot M_3=M_{72}$

$\boxed{\text{G:1033}}$. **Dacă** $a,b,c\geq 0$ **astfel încât** $a^2+b^2+c^2=a+b+c=2$ **atunci** $\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+1}\geq 1$.

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare:*** Utilizând **Lema: Dacă** $a\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2+1}\geq 1-\frac{a}{2}$ obținem,

$$Ms=\sum\frac{a}{a^2+1}\overset{Lema}{\geq}\sum a\left(1-\frac{a}{2}\right)=\sum a-\frac{1}{2}\sum a^2=2-\frac{1}{2}\cdot 2=1=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=0, b=1, c=1$ și permutările sale.

$\boxed{\text{G:1034}}$. **Arătați că patrulaterul cu vârfurile** $A(\sqrt{2};1-\sqrt{2})$, $B(\sqrt{3};1-\sqrt{3})$, $C(1-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $D(1-\sqrt{2};\sqrt{2})$ **este dreptunghi.**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:***

Se arată că două laturi opuse sunt egale și paralele iar diagonalele sunt egale.

$AB=CD,\ tg(AB,Ox)=\ tg(CD,Ox)$. $AB=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{3}-1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2(5-2\sqrt{6})}$,

$CD=\sqrt{(1-\sqrt{2}-1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2(5-2\sqrt{6})}$ , analog AC=BD,

$$tg(AB,Ox)=\frac{1-\sqrt{3}-1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-1=\ tg(CD,Ox).$$

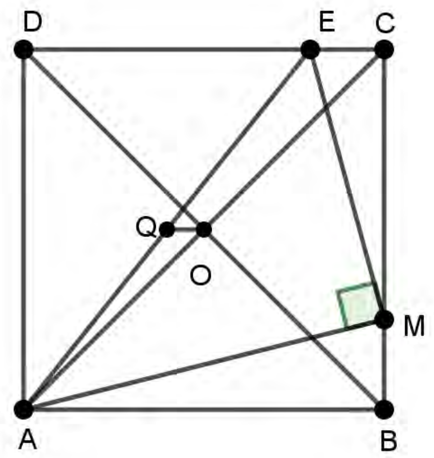
**Altfel,** se arată că mijlocul diagonalei AD coincide cu mijlocul diagonalei BC.

**$\boxed{\text{G:1035}}$. Pe laturile pătratului ABCD de centru O, se iau punctele M∊BC, E∊CD, astfel încât AM=8 , ME=6, AE= 10. Dacă Q este mijlocul lui AE, arătați că** $18\langle P_{ABOQ}\langle 19$.

**Sanda Mitea**, Cugir, Alba

***Rezolvare:*** Se arată că triunghiul ΔEMA este dreptunghic în M și m(∡AMB) + m(∡EMC) = $90^0$, de unde ΔAMB∼ΔMEC. Rezultă că

$$\frac{AM}{EM}=\frac{AB}{CM}\Rightarrow CM=\frac{EM\cdot AB}{AM}=\frac{3AB}{4}\text{ iar }MB=\frac{AB}{4}.$$




În triunghiul ΔABM, conform T. Lui Pitagora,

$AB^2+MB^2=AM^2\Rightarrow AB=\frac{32}{\sqrt{17}}$ iar cum

$CE=\frac{3MB}{4}=\frac{6}{\sqrt{17}}$. În triunghiul ΔACE, QO este linie mijlocie, deci $QO=\frac{CE}{2}=\frac{3}{\sqrt{17}}$ iar $OB=\frac{DB}{2}=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

Astfel,

$$P_{ABOQ}=AB+OB+QO+QA=\frac{32}{\sqrt{17}}+\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{17}}+\frac{3}{\sqrt{17}}+5.$$

Pentru $18\langle P_{ABOQ}\langle 19$ se arată mai departe prin ridicare la pătrat că următoarele inegalități sunt adevărate: $35+16\sqrt{2}\ \rangle\ 13\sqrt{17}$ și $35+16\sqrt{2}\ \langle\ 14\sqrt{17}$.

# ▪ Clasa a VIII-a

**$\boxed{\text{G:1036}}$. Să se determine partea întreagă a raportului $\frac{a}{b}$, unde** $a=\sqrt{5-\sqrt{3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ **, și** $b=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-1$.

**Livia-Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:*** $a=\sqrt{5-\sqrt{3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=\sqrt{5-\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$,

$$b=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-1=\sqrt{2+\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})^2}-1=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}.$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]=\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\right]=1.$$

**G:1037**. **Rezolvați ecuația** $x+y+26=6\sqrt{x-3}+10\sqrt{y-5}$. **Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Din $\sqrt{x-3}^2+3^2-2\sqrt{x-3}\cdot 3+\sqrt{y-5}^2+5^2-2\sqrt{y-5}\cdot 5=0$ obținem $\left(\sqrt{x-3}-5\right)^2+\left(\sqrt{y-5}-3\right)^2=0$ adică x = 12 și y = 30.

**G:1038**. **Dacă** $a,b,c,d\ \rangle\ 0$ **atunci** $1+\dfrac{4}{ab+bc+cd+da}\geq\dfrac{8}{a+b+c+d}$. **Când are loc egalitatea ?**

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare:*** Folosind inegalitatea $(a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)\Leftrightarrow(a-b+c-d)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a+c=b+d$ obținem:

$$Ms=1+\frac{4}{ab+bc+cd+da}\geq 1+\frac{16}{(a+b+c+d)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{8}{a+b+c+d}=Md,$$ unde (1) este inegalitatea MA – MG cu egalitate pentru $a+b+c+d=4$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a+c=b+d=2$.

**G:1039**. **Se consideră ecuația cu soluții reale** $2021x^2-223x+6=0$. **Fără a rezolva ecuația să se arate că soluțiile sunt strict pozitive și subunitare.**
**Rezolvați ecuația folosind relațiile între rădăcini și coeficienți (relațiile lui Viète).**

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare***:

Se va arăta că dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ verifică ecuația dată atunci $\alpha\in(0;1)$.

Presupunem $\alpha\leq 0$ și atunci $0=2021\alpha^2-223\alpha+6=2021\alpha^2+223(-\alpha)+6\ \rangle\ 6$, contradicție.

Presupunem $\alpha\geq 1$, atunci

$0=2021\alpha^2-223\alpha+6\ \rangle\ 2021\alpha^2-223\alpha=\alpha(2021\alpha-223)\geq 1\cdot(2021\cdot 1-223)=1798$, contradicție.

Așadar, $\alpha\in(0;1)$. Cum $2021=2025-4=25\cdot 81-4=45^2-2^2=43\cdot 47$ și din

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow x_1\cdot x_2=\dfrac{6}{43\cdot 47}=\dfrac{1}{47}\cdot\dfrac{6}{43}$. Cum $x_1,x_2\in(0;1)\Rightarrow x_1,x_2\notin\mathbb{N}$ așadar,

$x_1,x_2\in\left\{\dfrac{1}{43};\dfrac{1}{47};\dfrac{2}{43};\dfrac{2}{47};\dfrac{3}{43};\dfrac{3}{47};\dfrac{6}{43};\dfrac{6}{47}\right\}$. Cum $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{223}{43\cdot 47}$, convin doar soluțiile

$x_1=\dfrac{2}{43},\quad x_2=\dfrac{3}{47}$.

**Observație**: O rezolvare cu ajutorul formulelor pentru ecuația de gradul doi conduce la aceleași soluții dar cu calcule numerice mai laborioase.

**G:1040**. **Să se rezolve ecuația:** $\left\{\dfrac{x-2}{3}\right\}=\left\{\dfrac{x+2}{4}\right\}$, **unde** $\{\alpha\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **reprezintă partea fracționară a lui** $\alpha$ **.**

**Gheorghe Ghiță,** Buzău

***Rezolvare:*** Ecuația se rescrie:

$$\frac{x-2}{3}-\left[\frac{x-2}{3}\right]=\frac{x+2}{4}-\left[\frac{x+2}{4}\right]\Leftrightarrow\left[\frac{x-2}{3}\right]-\left[\frac{x+2}{4}\right]=\frac{x-14}{12}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=12k+14,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Se observă că x determinat verifică ecuația dată: $\left\{\dfrac{12k+14-2}{3}\right\}=\left\{\dfrac{12k+12}{4}\right\}\Leftrightarrow\{4k+4\}=\{3k+3\}=0$

**G:1041. Se consideră triunghiul ABC cu notațiile uzuale** $a = BC,\ b = AC$ **și** $c = AB$**. Demonstrați că** $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ **dacă și numai dacă** $m(\sphericalangle ABC)=60^0$**.** **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

***Rezolvare:***

$$\frac{^{b+c)}1}{a+b}+\frac{^{a+b)}1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}=\frac{3}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+2b+c)(a+b+c)=3(a+b)(b+c)\Leftrightarrow$$

$b^2=a^2+c^2-ac$. Această relație o identificăm cu teorema cosinusului

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\sphericalangle ABC)$ și obținem $2\cos(\sphericalangle ABC)=1\Leftrightarrow\cos(\sphericalangle ABC)=\frac{1}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=60^0$.

**G:1042. Dacă** $1^3+2^3+3^3+.......+9^3=a^2$, **atunci cu cât este egal a ?**
**Folosind relația de mai sus, arătați că** $b=(99^3+100^3+101^3)\vdots 10002$**.**

**Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede, Teleorman

***Rezolvare***:
Folosind formula pentru suma cuburilor găsim

$$a^2=1^3+2^3+3^3+.......+9^3=\left(\frac{9\cdot10}{2}\right)^2=(1+2+3+.....+9)^2\Rightarrow a=45.$$ Atunci,

$$b=(1^3+2^3+....+99^3+100^3+101^3)-(1^3+2^3+3^3+.....+98^3)=(1+2+3+.....+101)^2-(1+2+3+.....+98)^2=$$
$$=(1+2+3+....+101-1-2-3-......-98)(1+2+3+....+101+1+2+3+....+98)=$$
$$=(99+100+101)\cdot(2(1+2+3+4+....+98)+300)=300\cdot(98\cdot99+300)=300\cdot10002\ \vdots\ 10002.$$

**G:1043. Fie x, y, z trei numere reale și distincte două câte două. Să se demonstreze identitatea:**

$$\frac{z-y}{(y-x)(x-z)}+\frac{x-z}{(z-y)(y-x)}+\frac{y-x}{(x-z)(z-y)}+\frac{2}{y-x}+\frac{2}{z-y}+\frac{2}{x-z}=0$$

**Petre Rău**, Galați

***Rezolvare***: Într-adevăr, efectuând calculele pentru cele două serii de expresii din membrul stâng al relației date, obținem valori egale și de semne diferite:

$$\frac{z-y}{(y-x)(x-z)}+\frac{x-z}{(z-y)(y-x)}+\frac{y-x}{(x-z)(z-y)}=\frac{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}{(y-x)(x-z)(z-y)}=\frac{2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}{(y-x)(x-z)(z-y)}$$

iar $\frac{2}{y-x}+\frac{2}{z-y}+\frac{2}{x-z}=\frac{2(z-y)(x-z)+2(y-x)(x-z)+2(y-x)(z-y)}{(y-x)(x-z)(z-y)}=\frac{-2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}{(y-x)(x-z)(z-y)}$.

**G:1044. Jumătate dintr-un cilindru metalic având raza de 3 și înălțimea de 6 se topește și se obține un con cu raza de** $r=3\sqrt{3}$**. Aflați unghiul de la vârful conului.**

**Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

***Rezolvare:*** Calculând jumătate din volumului cilindrului și egalându-l cu volumul conului obținem: $27\pi=\frac{1}{3}\pi\left(3\sqrt{3}\right)^2\cdot h\Rightarrow h=3$,unde h este înălțimea conului. Se află imediat generatoarea conului ca fiind 6 și atunci unghiul de la vârful conului este $120^0$.

**G:1045. Fie E, F, G, H mijloacele laturilor BC, CD, DA, AB ale pătratului ABCD de centru O, AC∩EF={M}. iar MN⊥(ABC). Dacă AB=2*a*, MN=**$a\sqrt{2}$ **.**
**a) Aflați volumul piramidei NMGH și măsura unghiului diedru dintre (NGH) și (ABC).**
**b) Arătați că** $BN^2>AM\cdot CN$ **.**

**Sanda Mitea**, Gugir, Alba

***Rezolvare:*** În pătratul ABCD, avem $AC = 2a\sqrt{2}$, de unde

$AO = OB = OC = OD = a\sqrt{2}$. Cum EF este linie mijlocie în ΔBCD $\Rightarrow CM = MO = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Analog

$\Rightarrow AP = PO = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MP = AC - AP - CM = a\sqrt{2}$ unde AC∩GH={P}. Cum GH este linie mijlocie în ΔABD $\Rightarrow$

$$GH = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A_{MGH} = \frac{GH \cdot MP}{2} = a^2 \text{ iar } V_{NMGH} = \frac{A_{MGH} \cdot MN}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$$

Din $GH \parallel BD$ și $AC \perp BD$, deducem $MP \perp GH$, iar conform teoremei celor trei perpendiculare obținem $NP \perp GH$. Astfel din

$$\begin{cases} (NGH) \cap (ABC) = GH \\ MP \perp GH,\ MP \subset (ABC) \Rightarrow m\left(\sphericalangle(NGH);(ABC)\right) = m\left(\sphericalangle NP;MP)\right) = m\left(\sphericalangle MPN\right) = 45^0 \\ NP \perp GH;\ NP \subset (NGH) \end{cases}$$

întrucât în ΔMPN avem $m(\sphericalangle NMP) = 90^0$ și $MP = MN = a\sqrt{2}$.

b) Cu ajutorul T. lui Pitagora arătăm că

$$MB = MD = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow BN^2 = DN^2 = \frac{18a^2}{4} \Rightarrow$$

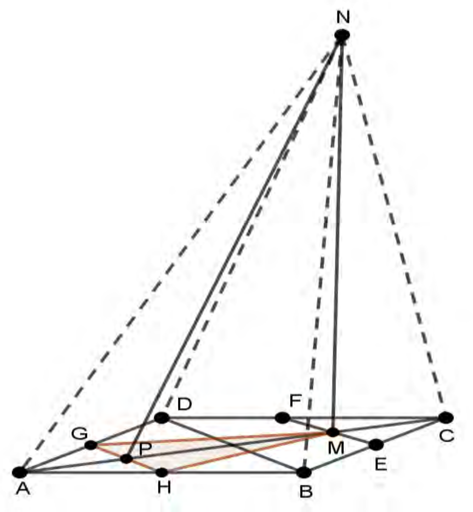
$$AM = AC - CM = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \text{ și deci}$$

$$AN^2 = \frac{26a^2}{4}, CN^2 = \frac{10a^2}{4} \Rightarrow$$

$$BN^2 + DN^2 = AN^2 + CN^2 \Rightarrow$$

$$BN^2 = \frac{AN^2 + CN^2}{2} \rangle \sqrt{AN^2 \cdot CN^2} = AN \cdot CN$$

Deci, $BN^2 \rangle AM \cdot CN$.




## ▪ Clasa a IX-a

**L:839. Fie $x_1, x_2$ soluțiile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$. Să se calculeze expresia: $\frac{x_1^4 - x_1^3 + 1}{x_1^2 - 3} + \frac{x_2^4 - x_2^3 + 1}{x_2^2 - 3}$.**

**Prof. Livia- Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare***:

Deoarece $x_1, x_2$ sunt soluțiile ecuației date rezultă $x_1^2 - x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 - x_1 = 3$; Analog pentru $x_2$.

$$\frac{x_1^2(x_1^2 - x_1) + 1}{x_1} + \frac{x_2^2(x_2^2 - x_2) + 1}{x_2} = \frac{3x_1^2 + 1}{x_1} + \frac{3x_2^2 + 1}{x_2} = \frac{3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{8}{3}.$$

S-au folosit relațiile lui Viete: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$.

**L:840**. **Fie** $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ **o funcție de gradul întâi astfel încât** $f(x+y)+f(2x-y)=42x+40,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+$ . **Să se determine f(x) și să se arate că** $f\left(\dfrac{x}{2021}+\dfrac{2021}{x}\right)\rangle\ 48$.

**Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare***:

Pentru y=0 rezultă $f(x)+f(2x)=42x+40$. Conform relației din enunț deducem că f(x) este de gradul 1, adică f(x)=ax+b. Atunci, f(2x)=2ax+b și obținem: $ax+b+2ax+b=42x+40\Rightarrow a=14, b=20\Rightarrow f(x)=14x+20$.

$$f\left(\frac{x}{2021}+\frac{2021}{x}\right)=14\cdot\left(\frac{x}{2021}+\frac{2021}{x}\right)+20\rangle\ 14\cdot2+20=48.$$

**L:841**. **Determinați numerele naturale n pentru care numărul** $8^n+72n+1$ **este cub perfect.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare***: Pentru $n\ge4\Rightarrow8^n=(2^n)^3<8^n+72n+1<(2^n+1)^3$. Cum prima parte a dublei inegalități este evidentă, rămâne de justificat partea a doua. $8^n+72n+1<(2^n+1)^3\Leftrightarrow8^n+72n+1<8^n+3\cdot4^n+3\cdot2^n+1\Leftrightarrow24n<2^n+4^n$.

Din $2^n>3n\Rightarrow2^n+4^n>9n^2+3n$, și atunci rămâne de arătat că: $9n^2+3n\ge24n\Leftrightarrow3n^2\ge7n\Leftrightarrow n\ge3$.

Pentru n∈{0;1;2} se obțin numerele 2,81 și 208, care nu sunt cuburi perfecte, iar pentru n = 3 se obține singurul cub perfect, și anume 729.

**L:842**. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **cu proprietatea** $(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)+2021x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Arătați că f(x) este injectivă și calculați f(0).**

**Constantin Dinu**, Buzău

***Rezolvare:*** Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ cu

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow f(f(f(x_1)))=f(f(f(x_2)))\Leftrightarrow$

$(f\circ f\circ f)(x_1)=(f\circ f\circ f)(x_2)$. Înlocuind în enunț avem

$(f\circ f)(x_1)+2021x_1=(f\circ f)(x_2)+2021x_2\Rightarrow2021x_1=2021x_2\Rightarrow x_1=x_2$, adică f este injectivă.

Făcând x=0 în enunț, obținem $f(f(f(0)))=f(f(0))$ ceea ce implică $f(f(0))=f(0)$ căci f este injectivă de unde rezultă $f(0)=0$.

**L:843**. **Determinați ultimele două cifre ale numărului** $2021^{2021}$. **Gheorghe Dârstaru,** Buzău

***Rezolvare***: $2021=43\cdot47\Rightarrow43^4\equiv1(\text{mod}100)\Rightarrow\left(43^4\right)^{505}\equiv1(\text{mod}100)\Rightarrow43^{2021}\equiv43(\text{mod}100)$.

$47^5\equiv7(\text{mod}100)\Rightarrow\left(47^5\right)^4\equiv7^4(\text{mod}100)\equiv1(\text{mod}100)\Rightarrow\left(47^{20}\right)^{101}\equiv1(\text{mod}100)$.

$47^{2021}\equiv47(\text{mod}100)\Rightarrow47^{2021}\cdot43^{2021}\equiv47\cdot43(\text{mod}100)$. Ultimele două cifre ale numărului $2021^{2021}$ sunt 21.

**L:844**. **Demonstrați că** $2^n+3^n+....+p^n\ \rangle\ \dfrac{(p-1)(np+1)}{2},\ \forall n\ge1$.

**Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena.** Fălticeni

***Rezolvare*** : Considerăm propoziția: $P(n):k^n\ge(K-1)n+1$ pe care o demonstrăm.

Etapa de verificare:

$n=1\Rightarrow P(1):k\ge k-1+1\Rightarrow k\ge k(A)$,

$n=2\Rightarrow P(2):k^2\ge(k-1)2+1\Rightarrow k^2-2k+1\ge0(A)$

Etapa de demonstrație: $P(k)\Rightarrow P(k+1)$

$n=p\Rightarrow P(p): k^p \geq (k-1)p+1(A)$

$n=p+1\Rightarrow P(k+1): k^{p+1}\geq (k-1)(p+1)+1\Rightarrow k^{p+1}\geq kp-p+k$

$k^{p+1}=kk^p\geq k(k-1)p+k=k^2p-kp+k$

$k\ \ p-kp+k\geq kp-p+k\Rightarrow p(k-1)^2\geq 0(A)$

$2^n+3^2+...+p^n\geq n+1+2n+1+...+[(p-1)n+1]=n(1+2+..+p-1)+p-1$

$=(p-1)\left(\frac{np}{2}+1\right)\geq (p-1)(np+1)/2$

$\boxed{\text{L:845}}$. **Dacă** $a\in(-4;1)$, $b\in(-3;2)$, $c\in(-2;3)$, $d\in(-1;4)$, **astfel încât** $a+b+c+d=5$, **să se demonstreze că:** $81\cdot(1-a)\cdot(2-b)\cdot(3-c)\cdot(4-d)\leq(4+a)\cdot(3+b)\cdot(2+c)\cdot(1+d)$ **și să se precizeze când are loc egalitatea.**

**Dorin Mărghidanu**, Corabia, Olt

***Rezolvare***:

În condițiile din enunț avem : $1-a>0$ , $2-b>0$ , $3-c>0$ , $4-d>0$ .

Avem deci , după o scurtă pregătire și apoi cu aplicarea inegalității mediilor :

$$(1-a)\cdot(2-b)\cdot(3-c)\cdot(4-d) = \sqrt[3]{(1-a)\cdot(2-b)\cdot(3-c)}\cdot$$

$$\cdot\sqrt[3]{(2-b)\cdot(3-c)\cdot(4-d)}\cdot\sqrt[3]{(3-c)\cdot(4-d)\cdot(1-a)}\cdot\sqrt[3]{(4-d)\cdot(1-a)\cdot(2-b)}\leq$$

$$\leq\frac{6-(a+b+c)}{3}\cdot\frac{9-(b+c+d)}{3}\cdot\frac{8-(c+d+a)}{3}\cdot\frac{7-(d+a+b)}{3}=$$

$$\leq\frac{1+d}{3}\cdot\frac{4+a}{3}\cdot\frac{3+b}{3}\cdot\frac{2+c}{3}=\frac{(4+a)\cdot(3+b)\cdot(2+c)\cdot(1+d)}{3^4}$$ , adică inegalitatea din enunț .

Egalitatea are loc dacă avem simultan : $1-a=2-b=3-c=4-d\Rightarrow$ $b=a+1$ , $c=a+2$ , $d=a+3$ , în care caz condiția din enunț devine : $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=5\Leftrightarrow 4a=-1\Rightarrow$

$$a=-\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4},\quad c=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4},\quad d=-\frac{1}{4}+3=\frac{11}{4}.$$

$\boxed{\text{L:846}}$. **Fie** $a,b\in\mathbb{R}^*_+$. **Să se rezolve ecuația** $\sqrt{a^2+b^2-x^2}+x\sqrt{a^2+b^2-x^2}+x=a+ab+b$.

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare***: Domeniul de definiție este $D=\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$.

Notând $\sqrt{a^2+b^2-x^2}=t$ avem $t+xt+x=a+ab+b$ și $t^2+x^2=a^2+b^2$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases}t+xt+x=a+ab+b\\ t^2+x^2=a^2+b^2\end{cases}$ convin: $\begin{cases}t=b\\ x=a\end{cases}\Rightarrow x_1=a$ și $\begin{cases}t=a\\ x=b\end{cases}\Rightarrow x_2=b$.

Reciproc $x_1=a$ și $x_2=b$ verifică ecuația. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\mathscr{S}=\{a,b\}$.

**<u>Notă.</u>**

Pentru $a=2$ și $b=3$ se obține Problema propusă de Resul Arslan în Etkin Matematik Grubu 2/2021.

$\boxed{\text{L:847}}$. **Să se determine** $\min\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{1}{100}\ \langle\ \{\sqrt{n}\}\ \langle\ \frac{1}{10}\right\}$, **unde** $\{x\}$ **reprezintă partea fracționară a numărului real x.**

**Dorin Mărghidanu,** Corabia

***Rezolvare***:

Fie $\sqrt{n} = k + f$ , unde $k = \left[\sqrt{n}\right] \in \mathbb{N}$ şi $f = \left\{\sqrt{n}\right\} \in [0, 1)$ sunt ***partea întreagă*** şi respectiv ***partea fracţionară*** a numărului $\sqrt{n}$ .

Din condiţiile problemei avem :

$$\frac{1}{100} < f < \frac{1}{10} \Leftrightarrow k + \frac{1}{100} < k + f < k + \frac{1}{10} \Leftrightarrow k + \frac{1}{100} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 0,02 \cdot k + 0,0001 < n < k^2 + 0,2 \cdot k + 0,01 \qquad (*)$$

După cum se poate uşor observa , inegalitatea (*) nu poate avea loc în $\mathbb{N}$ pentru $k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$ .

Pentru $k = 5$ , avem cu relaţia (*) :

$25 + 0,1 + 0,0001 < n < 25 + 1 + 0,01 \Leftrightarrow 25,1001 < n < 26,01$, deci $n = 26$ , care este cel mai mic număr natural ce verifică condiţiile enunţului .

**L:848. Să se demonstreze că, pentru orice unghi real x, are loc inegalitatea** $\sin^{123} x + \cos^{321} x \le 1$.

**Petre Rău,** Galaţi

***Rezolvare:***

Într-adevăr, $\sin^{123}x + \cos^{321}x \le |\sin^{123}x + \cos^{321}x| \le |\sin^{123}x| + |\cos^{321}x| \le \sin^2x + \cos^2x = 1$.

Notă: Problema se poate generaliza astfel: $\forall p,q \in R$, $p,q \ge 2$ şi $\forall x \in R$, avem $\sin^p x + \cos^q x \le 1$.

**L:849. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*$, ecuaţiile: a)** $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{4}$; *b)* $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{4}$ .

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

**a)** $\left|\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right| = \left|\sin\frac{\pi}{n}\right|\cdot\left|\sin\frac{2\pi}{n}\right| \le 1 \Rightarrow \frac{n}{4} \le 1 \Rightarrow n \le 4 \Rightarrow n \in \{1;2;3;4\}$ .

Singura soluţie naturală este pentru n=3 deoarece $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}$.

b) Pentru $n \in \{1;2;3;4\}$ avem $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n} \in \left\{0;\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \ne \left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{4}}{4}\right\}$ şi nu avem soluţii naturale $n$ în mulţimea $\{1,2,3,4\}$. Arătăm că n = 5 este soluţie, deci $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Folosim cunoscuta valoare $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ şi obţinem succesiv:

$$\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 2\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2\cos\frac{\pi}{5} = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{(1+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{16} = \frac{5-\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{16} = \frac{4\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Pentru $n \ge 6$, avem $\frac{\pi}{n} \le \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{2\pi}{n} \le \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Cum în cadranul întâi funcţia sin este strict crescătoare , rezultă:

$\sin\frac{\pi}{n} \le \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ şi $\sin\frac{2\pi}{n} \le \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ de unde $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} \le \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{6}}{4} \le \frac{\sqrt{n}}{4}$,

iar $n \ge 6$ , nu este soluţie a ecuaţiei date deoarece $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n} < \frac{\sqrt{n}}{4}$

Deci ecuaţia are unica soluţie naturală n=5.

# ▪ Clasa a X-a

**L:850**. **Fie** $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ **și** $y=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ **. Să se arate că** $x^2+y^2=7$**.**

**Livia-Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:*** Notăm $S=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=x+y\,|()^3\Rightarrow$ $S^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$\Rightarrow S^3-3S-18=0$ deoarece $x\cdot y=\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})\cdot(9-4\sqrt{5})}=1$.Se obține S = 3.

Din $\begin{cases}x+y=3\\ x\cdot y=1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=7$.

**L:851**. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}_+$* **sistemul de ecuații:** $\begin{cases}\log_2(\lg x-\lg y)+\log_2(\lg x)=3\\ \log_3(\lg x+\lg y)-\log_3(\lg x)=1\end{cases}$.

**Adrian Stan**, Buzău

**Rezolvare:** Obligatoriu $\lg x\rangle \lg y\rangle 0,\ \lg xy\rangle 0,\ \lg\frac{x}{y}\rangle 0.$ (*).

$$\begin{cases}\log_2\left((\lg x-\lg y)\cdot\lg x\right)=\log_2 8\\ \log_3\dfrac{\lg x-\lg y}{\lg y}=\log_3 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\lg x-\lg y)\cdot(\lg x)=8\\ \dfrac{\lg x+\lg y}{\lg y}=3\end{cases}.\Rightarrow \lg x=4\Rightarrow x=10^4 \text{ și } \lg y=2\Rightarrow y=10^2.$$

**L:852**. **Pentru numerele reale** $a,b\in(1;\infty)$ **să se rezolve ecuația** $a^{\log^2{}_b x}+x^{\log_b x}\le a+b$**.**

**Adrian Gobej,** Curtea de Argeș

***Rezolvare:***

Evident se pune condiția $x\rangle 0$. Cum $b^{\log_b x}=x$ obținem $x^{\log_b x}=\left(b^{\log_b x}\right)^{\log_b x}=b^{\log^2{}_b x}$ și

inecuația devine $a^{\log^2{}_b x}+b^{\log^2{}_b x}\le a+b\quad(1)$.

Notăm $\log^2{}_b x=t\ge 0$ obținem $a^t+b^t\le a+b$.

Cazul I. $t\in(1;\infty)\Rightarrow a^t+b^t\ \rangle\ a+b$ și deci inecuația nu are soluții pe aces caz.

Cazul al II-lea, $t\in[0;1]\Rightarrow a^t+b^t\ \le\ a+b$ obținem folosind (1):

$\log^2{}_b x\le 1\Leftrightarrow \log_b x\in[-1;1]\Rightarrow x\in\left[b^{-1};b\right]$.

**L:853**. **Se consideră funcția** $f\ :[1,+\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ **. Calculați** $f\left(\frac{9}{2}\right)$**.**

**Demonstrați că** $\operatorname{Im} f=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$**.**

**Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena,** Fălticeni, Suceava

***Rezolvare***:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\sqrt{\frac{2x+2\sqrt{2x-1}}{2}}=\sqrt{\frac{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}{2}}==\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2}}.$$

$$x\ge 1\Rightarrow 2x\ge 2\Rightarrow 2x-1\ge 1\Rightarrow\sqrt{2x-1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{2x-1}+1\ge 2$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{\frac{2x-2\sqrt{2x-1}}{2}}=\sqrt{\frac{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{2}}=\frac{\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}.$$

$\sqrt{2x-1}\geq 1\Rightarrow \sqrt{2x-1}-1\geq 0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4x-2}\Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right)=\sqrt{4\cdot\frac{9}{2}-2}=\sqrt{18-2}=\sqrt{16}=4$$

Demonstrăm că funcția $f:[1,+\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{4x-2}$ este strict crescătoare .

$$R=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{4x_1-2}-\sqrt{4x_2-2}}{x_1-x_2}=\frac{4x_1-2-4x_2+2}{(x_1-x_2)\left(\sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2}\right)}$$

$x_1\in[1,+\infty)\Rightarrow x_1\geq 1\Rightarrow 4x_1\geq 4\Rightarrow 4x_1-2\geq 2\Rightarrow \sqrt{4x_1-2}\geq\sqrt{2}$. Analog pentru $x_2$.

$$\sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2}\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow R=\frac{4}{\sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2}}\succ 0\Rightarrow \operatorname{Im} f=[f(1),+\infty)=[\sqrt{2},+\infty)$$

**L:854. Fie $a\rangle 1$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^{\log_a\sqrt{a+1}}=\sqrt{x}+1$.** **Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare:***

Notând $\sqrt{x}=t$, ecuația se scrie $t^{2\log_a\sqrt{a+1}}=t+1\Leftrightarrow t^{\log_a(a+1)}=t+1$, cu soluția unică $t=a$.

Rezultă că ecuația inițială are soluția unică $x=a^2$.

<u>**Notă.**</u> Pentru $a=2$ se obține Problema propusă în Etkin Matematik Grubu.

**L:855. Rezolvați ecuația $\log_2(x-1)^3=2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.** **Constantin Dinu**, Buzău

***Rezolvare:***

C.E. $x\in(1;\infty)$. Ecuația devine: $3\log_2(x-1)\ =2-\log_2(x-1)\Rightarrow 2\log_2(x-1)\ =1\Rightarrow$

$\log_2(x-1)^2=\log_2 2\Rightarrow (x-1)^2=2\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. $S=\{1+\sqrt{2}\}$.

**L:856. Să se rezolve ecuația:** $2021^{2x}-2019x\cdot 2021^x-2021^{x-1}=2020x^2+\left(2021-\frac{2020}{2021}\right)x+\frac{2020}{2021}$.

**Gheorghe Dârstaru**, Buzău

***Rezolvare:***

Notăm cu $2021^x=t$ și obținem ecuația $t^2-\left(2019x+\frac{1}{2021}\right)t-\left(2021-\frac{2020}{2021}\right)x-\frac{2020}{2021}=0$ cu

soluțiile $t_{1,2}=\dfrac{\left(2019x+\frac{1}{2021}\right)\pm\left(2021x+2-\frac{1}{2021}\right)}{2}\Rightarrow t_1=2020x+1,\ t_2=-x-1+\frac{1}{2021}$.

Din $2021^x=2020x+1$ conform faptului că funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2021^x$ este strict convexă iar funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2020x+1$ este liniară, ecuația f(x)=g(x) are cel mult două soluții. $x\in\{0;1\}$.

Dacă $2021^x=-x-1+\frac{1}{2021}$, conform monotoniei, ecuația are soluție unică, x = −1.

**L:857. Să se rezolve ecuația** $\log_x(bx+c)=\log_a(ab+c),\ c\rangle\ a\rangle\ 1,\ b\rangle 0$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:*** 1) Dacă $x\in(0;1)\Rightarrow\log_x(bx+c)\ \langle 0\ \langle\log_a(ab+c)$ și ecuația nu are solute.

2) Dacă $x\in(1;\infty)\Rightarrow bx+c=x^{\log_a(ab+c)}\Leftrightarrow x^{\log_a(ab+c)-1}-\frac{c}{x}=b\Leftrightarrow x^{\log_a(b+\frac{c}{a})}-\frac{c}{x}=b$.

Funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\log_a(b+\frac{c}{a})}-\frac{c}{x}$ este o funcție strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare $f=f_1+f_2,\ f_1(x)=x^{\log_a(b+\frac{c}{a})},\ \left(a\rangle 1,\ b+\frac{c}{a}\rangle 1\Rightarrow \log_a(b+\frac{c}{a})\rangle 0\right),\ f_2(x)=-\frac{c}{x}$, deci este injectivă. Cum ecuația se mai scrie și sub forma f(x) = b, și atunci din f(x) = f(a) rezultă soluția unică x = a.

**L:858. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3}\cdot\cos\frac{9x}{2}-3(1+2\cos 3x)\cdot\sin\frac{3x}{2}=2\sqrt{3}$.**

**Petre Rău,** Galați

***Rezolvare:*** Vom demonstra mai întâi identitatea $(1+2\cos 3x)\sin\frac{3x}{2}=\sin\frac{9x}{2}$. Folosind formula

$\sin 3\alpha=\sin\alpha\left(3-4\sin^3\alpha\right)$ obținem $\sin\frac{9x}{2}=\sin\frac{3x}{2}\left(3-4\sin^2\frac{3x}{2}\right)\Rightarrow$

$$\frac{\sin\frac{9x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}=3-4\sin^2\frac{3x}{2}=3-4\cdot\frac{1-\cos 3x}{2}=1+2\cos 3x.$$

După înlocuirea acestui rezultat în ecuația inițială și după împărțirea acesteia la $2\sqrt{3}$ ea devine:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{9x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{9x}{2}=1\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{9x}{2}-\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{9x}{2}=1\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{9x}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{27}(6k\pi-\pi),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

**L:859. Determinați numărul natural $x$, pentru care**

$$x^2=\left[\left(C_{2021}^0\right)^2+\left(C_{2021}^2\right)^2+\left(C_{2021}^4\right)^2+\dots\dots\left(C_{2021}^{2020}\right)^2\right]\cdot\left[\left(C_{2021}^1\right)^2+\left(C_{2021}^3\right)^2+\left(C_{2021}^5\right)^2+\dots\dots\left(C_{2021}^{2021}\right)^2\right]$$

**Ionel Tudor,** Călugăreni

***Rezolvare:*** Mai general , arătăm că ecuația

$x^2=\left[\left(C_{2n+1}^0\right)^2+\left(C_{2n+1}^2\right)^2+\dots+\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2\right]\cdot\left[\left(C_{2n+1}^1\right)^2+\left(C_{2n+1}^3\right)^2+\dots+\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2\right]$ are singura soluție naturală $x=C_{4n+1}^{2n},\ n\in\mathbb{N}$.

Notând $S_1=\sum_{k=0}^{n}\left(C_{4n+1}^{2k}\right)^2$ și $S_2=\sum_{k=0}^{n}\left(C_{4n+1}^{2k+1}\right)^2$ ecuația dată se scrie $x^2=S_1\cdot S_2$ . Din formula combinărilor complementare $\left(C_{2n+1}^0\right)^2=\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2,\left(C_{2n+1}^2\right)^2=\left(C_{2n+1}^{2n-1}\right)^2,\dots,\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2=\left(C_{2n+1}^1\right)^2$, obținem $S_1=S_2$. Utilizăm identitatea combinatorială $\left(C_m^0\right)^2+\left(C_m^1\right)^2+\dots\dots+\left(C_m^m\right)^2=C_{2m}^m$ și calculăm $S_1+S_2$.

$$S_1+S_2=\left(C_{2n+1}^0\right)^2+\left(C_{2n+1}^1\right)^2+\dots\dots+\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2+\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2=C_{2(2n+1)}^{2n+1}=C_{4n+2}^{2n+1}=\frac{4n+1}{2n+1}C_{4n+2}^{2n}=2C_{4n+1}^{2n}.$$

S-a folosit relația $C_p^k=\frac{p}{k}C_{p-1}^{k-1}$. Cum $S_1=S_2$ rezultă $S_1=S_2=C_{4n+1}^{2n}$ iar ecuația devine

$x^2=(S_1)^2=(C_{4n+1}^{2n})^2$ cu soluția naturală $x=C_{4n+1}^{2n}=C_{4n+1}^{2n+1}$ unde $n\in N$.

Pentru n=1010 , obținem ecuația din enunț cu soluția naturală $x=C_{4041}^{2021}$ .

**L:860**. **Dacă** $a,b,c \geq \frac{3}{4}$ **să se demonstreze că**

$$6+\sqrt[3]{(2a-1)(3b-2)(4c-3)}+\sqrt[3]{(2b-1)(3c-2)(4a-3)}+\sqrt[3]{(2c-1)(3a-2)(4b-3)} \leq 3(a+b+c)$$

**și să se precizeze când are loc egalitatea .**

**Dorin Mărghidanu** , Corabia

***Rezolvare:*** Cu inegalitatea mediilor, avem :

$\sqrt[3]{(2a-1)\cdot(3b-1)\cdot(4c-2)} \leq \frac{(2a-1)+(3b-2)+(4c-3)}{3} = \frac{2a+3b+4c}{3}-2$ , (1) cu egalitate dacă ,

$2a$-1 = $3b-2$ = $4c-3$ . (e1)

Analog , $\sqrt[3]{(2b-1)\cdot(3c-1)\cdot(4a-2)} \leq \frac{2b+3c+4a}{3}-2$ , (2) cu egalitate dacă ,

2b-1 = 3c – 2 = 4a – 3 . (e2)

$\sqrt[3]{(2c-1)\cdot(3a-1)\cdot(4b-2)} \leq \frac{2c+3a+4bc}{3}-2$ , (3) cu egalitate dacă ,

$2b$-1 = $3c-2$ = $4a-3$ . (e3)

Prin adunarea relațiilor (1) , (2) , (3) se obține inegalitatea din enunț .
Prin însumarea condițiilor de egalitate (e1) , (e2) , (e3) , obținem :
$2(a+b+c)$-3 = $3(a+b+c)-6 = 4(a+b+c)-9$ , de unde rezultă : $a+b+c = 3$ . (4)
Datorită simetriei circulare în $a$ , $b$ , $c$ a expresiilor de sub radicali, este suficient să ne ocupăm de prima condiție de egalitate (e1)

de unde deducem $b=\frac{2a+1}{3}$ , $c=\frac{2a+2}{4}$ . Introducând în (4) , obținem :

$a+\frac{2a+1}{3}+\frac{2a+2}{4}=3$, cu soluția $a=1$ . Rezultă apoi $b=1$ , $c=1$ .

# ▪ Clasa a XI-a

**L:861**. **Calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+......+\frac{1}{\ln n}}$ .

**Adrian Gobej,** Curtea de Argeș

***Rezolvare***:

Notăm $a_n = 1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+....+\frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$. Atunci, $\left(\sqrt[n]{n}\right)^{a_n} = n^{\frac{a_n}{n}} = e^{\frac{a_n}{n}\ln n} = e^{\frac{\ln n}{n}\cdot a_n}$ .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}}{\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)}{\ln(n+1)\cdot\ln n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n-\ln(1+\frac{1}{n})^n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+......+\frac{1}{\ln n}} = e .$$

**L:862**. **Să se calculeze limita de funcții** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-\cos(x^2-x-2)}{\sin^2(x^3+x^2-2x-2)}$ .

**Livia Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:***

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-\cos(x^2-x-2)}{\sin^2(x^3+x^2-2x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sin\frac{x^2-x-2}{2}\right)^2}{\left(\frac{x^2-x-2}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^3+x^2-2x-2}{\sin(x^3+x^2-2x-2)}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{x^2-x-2}{2}\right)^2}{\left(x^3+x^2-2x-2\right)^2}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to -1}\frac{\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{4}}{(x+1)^2(x^2-2)^2}=2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}.$$

**$\boxed{\text{L:863}}$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-ax-b\right)=4$;**

**Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare:*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-ax-b\right)=4\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+3-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+ax+b}=4$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(4-2ab)x+3-b^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{3}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)}=4\Rightarrow 1-a^2=0,\ \frac{4-2ab}{1+a}=4\Rightarrow a=1, b=-2.$$

**$\boxed{\text{L:864}}$**. Fie $A=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{a}\right\}$, $a>1$ și $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2-3ax+a+1}{(ax-1)^2}$. Determinați $\min\limits_{x\in A}f(x)$.

**Marin Chirciu**, Argeș

***Rezolvare:*** Avem $f'(x)=\frac{(3a^2-2a)x-2a^2+a}{(ax-1)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2a-1}{3a-2}$;

$$f\left(\frac{2a-1}{3a-2}\right)=\frac{a\cdot\left(\frac{2a-1}{3a-2}\right)^2-3a\left(\frac{2a-1}{3a-2}\right)+a+1}{\left(a\cdot\frac{2a-1}{3a-2}-1\right)^2}=\frac{-5a^3+14a^2-13a+4}{4(a-1)^4}=\frac{(a-1)^2(-5a+4)}{4(a-1)^4}=$$

$$=\frac{4-5a}{4(a-1)^4};\ \frac{2a-1}{3a-2}>\frac{1}{a}\Leftrightarrow 2(a-1)^2>0.$$

Tabelul de variație al funcției este:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{a}$ | | $\frac{2a-1}{3a-2}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + + + + | \| | − − − | 0 | + + + + | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{a}$ | ↗ | $+\infty$ \| $+\infty$ | ↘ | $\frac{4-5a}{4(a-1)^2}$ | ↗ | $\frac{1}{a}$ |

Deducem că $\min\limits_{x\in A}f(x)=\frac{4-5a}{4(a-1)^2}$ și acest minim se realizează pentru $x=\frac{2a-1}{3a-2}$.

<u>Obs.</u> $f(x)\geq\frac{4-5a}{4(a-1)^2}\Leftrightarrow\frac{ax^2-3ax+a+1}{(ax-1)^2}\geq\frac{4-5a}{4(a-1)^2}\Leftrightarrow(3a-2)^2x^2-2(6a^2-7a+2)x+$

$+(2a-1)^2\geq 0\Leftrightarrow\left[(3a-2)x-(2a-1)\right]^2\geq 0$, evident, cu egalitate dacă $x=\frac{2a-1}{3a-2}$.

**$\boxed{\text{L:865}}$. Fie $x,y\in(1;\infty)$. Arătați că dacă $x+y\rangle\ 8\sqrt{2}$ atunci $x^{x^2}+y^{y^2}\rangle\ 2^{80}$.**

**Gheorghe Dârstaru**, Buzău

***Rezolvare***: Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{x^2}$. $f^{I}(x)=x^{x^2}\left(2x\ln x+x\right)$,

$f^{II}(x)=x^{x^2}\left(2x\ln x+x\right)^2+x^{x^2}(2\ln x+3)\Rightarrow f^{II}(x)\rangle\ 0\Rightarrow$ f(x) este convexă.

Din inegalitatea lu Jensen, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)\Rightarrow f(4\sqrt{2})\le\dfrac{x^{x^2}+y^{y^2}}{2}\Rightarrow$

$x^{x^2}+y^{y^2}\ge 2f\left(4\sqrt{2}\right)=2\left(4\sqrt{2}\right)^{32}=2^{81}\rangle\ 2^{80}$.

**L:866. Să se arate că ecuația** $64x^3-112x^2+56x-7=0$ **are soluția** $\sin^2\dfrac{\pi}{7}$ **. Rezolvați în** $\mathbb{N}^*$**, ecuația :** $64\cdot\sin^6\dfrac{\pi}{n}-112\cdot\sin^4\dfrac{\pi}{n}+56\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}=n$ **.**

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

Trebuie să arătăm că $64\cdot\sin^6\dfrac{\pi}{7}-112\cdot\sin^4\dfrac{\pi}{7}+56\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{7}-7=0$, sau înmulțind cu $\sin\dfrac{\pi}{7}\ne0\Rightarrow$

$64\cdot\sin^7\dfrac{\pi}{7}-112\cdot\sin^5\dfrac{\pi}{7}+56\cdot\sin^3\dfrac{\pi}{7}-7\sin\dfrac{\pi}{7}=0$ $(*)$. Pentru aceasta se folosesc succesiv formulele trigonometrice pentru arce multiple:

$$0=\sin\pi=\sin\left(7\cdot\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)=\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)\cdot\left(1-2\sin^2\frac{2\pi}{7}\right)+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\left(4\cos^3\frac{\pi}{7}-3\cos\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}-24\sin^3\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}+32\sin^5\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}+16\sin\frac{\pi}{7}\cos^4\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-12\sin\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=$$

$$=3\sin\frac{\pi}{7}-28\sin^3\frac{\pi}{7}+56\sin^5\frac{\pi}{7}-32\sin^7\frac{\pi}{7}+16\sin\frac{\pi}{7}-32\sin^3\frac{\pi}{7}+16\sin^5\frac{\pi}{7}-32\sin^3\frac{\pi}{7}+64\sin^5\frac{\pi}{7}$$

$$-32\sin^7\frac{\pi}{7}-12\sin\frac{\pi}{7}+24\sin^3\frac{\pi}{7}+12\sin^3\frac{\pi}{7}-24\sin^5\frac{\pi}{7}=7\sin\frac{\pi}{7}-56\sin^3\frac{\pi}{7}+112\sin^5\frac{\pi}{7}-64\sin^7\frac{\pi}{7}$$

Ecuația $64\cdot\sin^6\dfrac{\pi}{n}-112\cdot\sin^4\dfrac{\pi}{n}+56\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}=n$ are unica soluție naturală n=7.

Pentru $n\in\{1;2;3;4;5;6\}$ nu se verifică ecuația dată.

Pentru $n\in(6;\infty)$ funcția $64\cdot\sin^6\dfrac{\pi}{x}-112\cdot\sin^4\dfrac{\pi}{x}+56\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ este strict descrescătoare iar funcția g(x)=x este strict crescătoare prin urmare ecuația $f(x)=g(x)$ are soluția unică x=7.

S-a utilizat $f^{I}(x)=-\dfrac{8\pi}{x^2}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{x}\cdot\left(24\sin^4\dfrac{\pi}{x}-28\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}+7\right)\langle\ 0$ deoarece

$x\rangle6\Rightarrow0\langle\dfrac{\pi}{x}\langle\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow0\langle\sin\dfrac{\pi}{x}\langle\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin^2\dfrac{\pi}{x}\langle\dfrac{1}{4},\ 7-28\sin^2\dfrac{\pi}{x}\rangle0$.

**L:867. Fie matricea** $A=\begin{pmatrix}2&2022\\0&2\end{pmatrix}$**. Determinați matricea** $X\in M_2(\mathbb{R})$ **cu proprietatea** $X^{2021}+X=A$**.**

**Constantin Dinu**, Buzău

***Rezolvare:*** Deoarece $\left(X^{2021}+X\right)\cdot X=X\cdot\left(X^{2021}+X\right)\Rightarrow A\cdot X=X\cdot A$. (1). Fie

$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ o soluție. Din (1) rezultă $\begin{pmatrix} 2a+2022c & 2b+2022d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b+2022a \\ 2c & 2022c+2d \end{pmatrix}$ de unde rezultă c= 0 și d= a, deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ iar prin inducție, $X^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, deci $X^{2021}=\begin{pmatrix} a^{2021} & 2021a^{2010}b \\ 0 & a^{2021} \end{pmatrix}$. Cum $X^{2021}+X=A$ rezultă $a^{2021}+a=2$ cu a=1 și $2021a^{2020}b+b=2022$ adică b=1. Așadar, $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# ▪ Clasa a XII-a

**L:868. Să se determine funcțiile derivabile $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+2x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x),\ \forall x\in(0;\infty)$.** **Livia-Emilia Stan,** Buzău

***Rezolvare:*** Știm că $\int_0^x f(t)dt=F(t)\Big|_0^x=F(x)-F(0)$, după derivare rezultând:

$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^I=F^I(x)-F^I(0)=f(x)$. . Derivând relația din enunț se obține:

$2x+2+f(x)=(x+1)^I f(x)+(x+1)f^I(x)\Rightarrow\ f^I(x)=2\Rightarrow f(x)=2x+C$ (*).
Cum din relația din enunț f(0)=0 și din (*) $f(0)=2\cdot 0+C\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=2x$.

**L:869. Găsiți o primitivă a funcției $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}$ cu proprietatea $F(5)+F(1)=10\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-1\right)$.** **Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare:*** Observăm că $f(x)=\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}=\sqrt{(\sqrt{x}-2)^2}=\left|\sqrt{x}-2\right|=\begin{cases}\sqrt{x}-2, & x\geq 4\\ 2-\sqrt{x}, & x\langle 4\end{cases}$.

Atunci, $F(x)=\begin{cases}2x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C_1, & x\langle 4\\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C_2, & x\geq 4\end{cases}$. Din condiția ca F(x) să fie continuă în 4 rezultă

$C_1=\frac{32}{3}-16+C_2\Rightarrow\ F(x)=\begin{cases}2x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{32}{3}-16+C, & x\langle 4\\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\ , & x\geq 4\end{cases}$.

Din condiția $F(5)+F(1)=10\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-1\right)\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\begin{cases}2x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{32}{3}-16, & x\langle 4\\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ , & x\geq 4\end{cases}$.

$\boxed{\text{L:870}}$. **Să se arate că** $\int_0^3 \sqrt[4]{x^2+16}\,dx \le \sqrt{22,5+24\ln 2}$. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

***Rezolvare***: Utilizând inegalitatea Cauchy- Buniakovsky- Schwarz pentru integrale

$$\left(\int_0^3 \sqrt[4]{x^2+16}\,dx\right)^2 \le \int_0^3 1^2 dx \cdot \int_0^3 \sqrt[4]{x^2+16}^{\,2}\,dx \text{ și faptul că}$$

$$\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+16}+16\ln(x+\sqrt{x^2+16})\right]\Big|_0^3 = 7,5+8\ln 2 \text{ rezultă}$$

$$\int_0^3 \sqrt[4]{x^2+16}dx \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{\int_0^3 \sqrt{x^2+16}dx} = \sqrt{3(7,5+8\ln 2)} = \sqrt{22,5+24\ln 2}.$$

$\boxed{\text{L:871}}$. **Fie** $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ **o funcție continuă care verifică relația**

$4I^3-12I\sin\alpha+3\sin\alpha-\sin 3\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ **unde** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. **Să se calculeze I.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** $4I^3-12I\sin\alpha+3\sin\alpha-\sin3\alpha+4=0 \Leftrightarrow 4I^3-12I\sin\alpha+4\sin^3\alpha+4=0\,|:4 \Rightarrow$

$\left(I+\sin\alpha+1\right)\left(I^2+\sin^2\alpha+1-I\sin\alpha-\sin\alpha-1\right)=0$

S-a folosit formula $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Din $\left(I+\sin\alpha+1\right)\cdot\dfrac{(I-\sin\alpha)^2+(I-1)^2+(\sin\alpha-1)^2}{2}=0 \Rightarrow I=-1-\sin\alpha$ sau $I-\sin\alpha=I-1=\sin\alpha-1=0$.

Obținem $I=\sin\alpha=1$ pentru $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ sau $I=-1-\sin\alpha$ pentru $\alpha\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\boxed{\text{L:872}}$. **a) Se consideră funcția** $f_n:[n,+\infty)\to R;\ f_n(x)=\sqrt{n+\sqrt{2nx-n^2}}+\sqrt{n-\sqrt{2nx-n^2}};\forall n\ge 1$.

**Arătați că:** $\int_n^{2n} f_n(x)dx=\dfrac{n\sqrt{n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$

**b) Demonstrați că** $\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{2}\left(9-\sqrt{3}\right)$**,unde** $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$.

**Ciobîcă Constantin. Ciobîcă Elena,** Fălticeni, Suceava

***Rezolvare:***

a) $$f(x)=\sqrt{\frac{2nx+2n\sqrt{2nx-n^2}}{2n}}+\sqrt{\frac{2nx-2n\sqrt{2nx-n^2}}{2n}}$$

$$=\sqrt{\frac{2nx-n^2+2n\sqrt{2nx-n^2}+n^2}{2n}}+\sqrt{\frac{2nx-n^2-2n\sqrt{2nx-n^2}+n^2}{2n}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2nx-n^2}+n\right)^2}{2n}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2nx-n^2}-n\right)^2}{2n}}=\frac{\left|\sqrt{2nx-n^2}+n\right|+\left|\sqrt{2nx-n^2}-n\right|}{\sqrt{2n}}$$

$$x\ge n\Rightarrow 2nx\ge 2n^2\Rightarrow 2nx-n^2\ge n^2\Rightarrow\sqrt{2nx-n^2}\ge n\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2nx-n^2}+n\ge 2n\succ 0\\ \sqrt{2nx-n^2}-n\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{2nx-n^2}}{\sqrt{2n}}=\sqrt{4x-2n}$$

$\int_n^{2n} f(x)dx=\int_n^{2n}\sqrt{4x-2n}dx=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{(4x-2n)^3}}{\frac{3}{2}}\Big|_n^{2n}=\frac{n\sqrt{2n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$. Observăm că

$$g(x)=f_3(x)\Rightarrow n=3\Rightarrow\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{6}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

$\boxed{\text{L:873}}$. **Calculați** $\int\frac{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot.....\cdot(1+x^{2^{n-1}})}{x^{2^n}}dx,\ x\in[1;\infty),\ n\in\mathbb{N}^*$.

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

***Rezolvare:*** Cum $1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$, $1+x^2=\frac{1-x^{2^2}}{1-x^2}$, ......,$1+x^{2^{n-1}}=\frac{1-x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}}$, $\forall x\rangle 1$, prin înmulțirea acestora se obține $(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot.....\cdot(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=1+x+x^2+.....+x^{2^n-1}\Rightarrow$

$$\frac{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot.....\cdot(1+x^{2^{n-1}})}{x^{2^n}}=\frac{1+x+x^2+....+x^{2^n-1}}{x^{2^n}}=\frac{1}{x^{2^n}}+\frac{1}{x^{2^n-1}}+...+\frac{1}{x}.$$

Atunci, $\int\left(\frac{1}{x^{2^n}}+\frac{1}{x^{2^n-1}}+...+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{-1}{(2^n-1)x^{2^n-1}}+\frac{-1}{(2^n-2)x^{2^n-2}}+...+\frac{-1}{x}+\ln x+C$.

$\boxed{\text{L:874}}$. Se dă polinomul $f(X)=X^3-9X-12\in\mathbb{Z}[X]$. Arătați că există $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu $\alpha+\alpha^2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $\alpha^3\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f\left(\alpha+\alpha^2\right)=0$. Dacă f are rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$ atunci $\frac{x_1^{3n}+x_2^{3n}+x_3^{3n}}{(3x_1+4)^{3n}+(3x_2+4)^{3n}+(3x_3+4)^{3n}}=\alpha^{3n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Rezolvați ecuația f(x)=0.

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $f\left(\alpha+\alpha^2\right)=0\ \Leftrightarrow(\alpha+\alpha^2)^3-9(\alpha+\alpha^2)-12=0\Leftrightarrow\ \alpha^3\left(\alpha^3+1\right)-12+3\left(\alpha^3-3\right)\left(\alpha^2+\alpha\right)=0$ (*)

Cum $\alpha^3(\alpha^3+1)-12\in\mathbb{Q}$ și $3(\alpha^3-3)\in\mathbb{Q}$, rezultă că egalitatea (*) este adevărată dacă și numai dacă

$$\begin{cases}\alpha^3(\alpha^3+1)-12=0\\3(\alpha^3-3)=0\end{cases}\Rightarrow\alpha^3=3\Rightarrow\alpha=\sqrt[3]{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$

Dacă $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile lui f atunci $x_k^3-9x_k-12=0,\ k=\overline{1,3}$ sau $x_k^{3n}=3^n(3x_k+4)^n,\ k=\overline{1,3},n\in\mathbb{N}^*$. Atunci, $x_1^{3n}+x_2^{3n}+x_3^{3n}=3^n\left[(3x_1+4)^n+(3x_2+4)^n+(3x_3+4)^n\right]$ ceea ce implică cerința problemei în care se înlocuiește $\alpha=\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow 3=\sqrt[3]{\alpha}$.

În ecuația f(x)=0 știm că $f\left(\alpha+\alpha^2\right)=0$ deci o soluție este $x_1=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Aplicând relațiile lui Viete obținem $x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2x_3=12\Rightarrow x_2+x_3=-x_1=-\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$ și

$x_2\cdot x_3=\frac{12}{x_1}=\frac{12}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}-3$. Cu $x_2,x_3$ se formează ecuația de gradul doi

$x^2+\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)x+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}-3=0$ din care se obțin soluțiile $x_2=-\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}+\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\cdot i\sqrt{3}$ și conjugata ei, $x_3=-\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\cdot i\sqrt{3}$.

**L:875. Să se calculeze** $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x^n \cdot \ln bx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx,\ \forall a,b\rangle 0,\ n\in\mathbb{N}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:*** Pentru a = 1 integrala este egală cu zero. Pentru $a\neq 1$cu schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, integrala dată devine

$$I=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{t^n}\ln\frac{b}{t}}{\frac{1}{t^{2n+2}}+\frac{1}{t^{n+1}}+1}\cdot\frac{dt}{t^2}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n\ln\frac{b^2}{bx}}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n\ln\frac{b^2}{bx}}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx=\ln b^2\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n\ln bx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx$$

În final se obține $I=\ln b\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx$. Efectuând schimbarea de variabilă $x^{n+1}=t\Rightarrow(n+1)x^n dx=dt\Rightarrow$

$$I=\frac{\ln b}{n+1}\int_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2\ln b}{\sqrt{3}(n+1)}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}.$$

**L:876. Calculați integrala:** $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2x^2+x+2}dx$ **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

***Rezolvare***: Notăm: $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2x^2+x+2}dx$ ; $J=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{arcctg}\,x}{2x^2+x+2}dx$.

Avem: $I+J=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\,x}{2x^2+x+2}dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2x^2+x+2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}$

$$I+J=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\left(\mathrm{arctg}\frac{9}{\sqrt{15}}-\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{15}}\right)\quad(1)$$

În integrala J facem schimbarea de variabilă și obținem: $J=-\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{arcctg}\frac{1}{t}}{\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}+2}\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{arctg}\,t}{2+t+2t^2}dt=I$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă: $I=\frac{\pi}{2\sqrt{15}}\left(\mathrm{arctg}\frac{9}{\sqrt{15}}-\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$. Rezultatul se poate scrie sub o formă mai simplă în felul următor.

Notăm: $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{9}{\sqrt{15}}-\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{15}}$ Rezultă: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{7}$ Deci: $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}$ Astfel, valoarea integralei din enunțul problemei se poate scrie: $I=\frac{\pi}{2\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}$.

**L:877. Fie funcția *f* : (0, ∞) → *G*, *f*(*x*) =** $\frac{x-a}{x+b}$**, unde *a*, *b* ∈ (0, ∞).**

**a) Să se determine mulțimea *G* și legea de compoziție Δ : *G* → *G* astfel încât** $\left(R_+^*,\ \cdot\right)\cong\left(G,\ \Delta\right)$.

**b) Să se calculeze** $\underbrace{x\Delta x\Delta...\Delta x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$**, unde *n* ∈ ℕ*.** **Marin Chirciu,** Argeș

***Rezolvare:***

a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\frac{a}{b}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, deci G = $\left(-\frac{a}{b},\ 1\right)$.

Funcția f : (0, ∞) → $\left(-\frac{a}{b},\ 1\right)$, f (x) = $\frac{x-a}{x+b}$ este inversabilă și $f^{-1}:\left(-\frac{a}{b},\ 1\right)\to (0,\infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{a+bx}{1-x}$.

Cum $f^{-1}$ este morfism obținem $f^{-1}(x \Delta y) = f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \Delta y = f\left(\frac{a+bx}{1-x}\cdot\frac{a+by}{1-y}\right) =$

$$= f\left(\frac{a^2+abx+aby+b^2yx}{1-x-y+xy}\right) = \frac{\frac{a^2+abx+aby+b^2yx}{1-x-y+xy}-a}{\frac{a^2+abx+aby+b^2yx}{1-x-y+xy}+b} = \ = \frac{a^2-a+a(b+1)x+a(b+1)y+(b^2-a)xy}{a^2+b+b(a-1)x+b(a-1)y+b(b+1)xy}.$$

b) Fie $x_n = \underbrace{x\Delta x\Delta\ldots\Delta x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$. Avem $f^{-1}(x_n) = f^{-1}(x\Delta x\Delta\ldots\Delta x) = f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(x)\cdot\ldots\cdot f^{-1}(x) =$

$$= \frac{a+bx}{1-x}\cdot\frac{a+bx}{1-x}\cdot\ldots\cdot\frac{a+bx}{1-x} = \left(\frac{a+bx}{1-x}\right)^n. \qquad x_n = f\left(\left(\frac{a+bx}{1-x}\right)^n\right) = \frac{\left(\frac{a+bx}{1-x}\right)^n - a}{\left(\frac{a+bx}{1-x}\right)^n + b} = \frac{(a+bx)^n - a(1-x)^n}{(a+bx)^n + b(1-x)^n}.$$

# ELEVI REZOLVITORI

**Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:**
**Clasa a XI-a**: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**
**Școala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeș:**
**Clasa a VII-a:** Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;
**Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău**:
**Clasa a XI-a:** Găvăneanu Adriana, Berechet Ștefan, Modruz Ștefania, Crăciun Elena, Penteliuc Ioana**; Clasa a XII-a :** Știrbu Cătălin; Ilie Anița, Gegea Andreea. **Prof. Adrian Stan.**
**Scoala Gimnazială Nicolae Labis , Mălini, Suceava:**
**Clasa a VII-a**: Gogan Maria Veronica, **Prof. Gabriela Gogan.**
**Colegiul Național „Anastasescu”, Roșiorii de Vede.**
Clasa a XII-a: Ciupageanu Aurel, Stroescu Ariana, Ștefan Mișu.Prof. **Alecu Orlando**
**Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova**
Clasa a IX-a: Alecsie Mihnea, Dobre Robert, Ungureanu Alexandru, Ieremia Nicolae, Truică Cristian. Clasa a X-a: Cașcotă Dalina, Rada Andra; Clasa a XI-a:Bicu Eduard, Florea Alina, Milcu Amelia, Cealîcu Mihai. Prof. **Tutescu Lucian**. Clasa a XII-a: Ciuperceanu Vlad, Negooescu Divia, Teișanu Florin. Prof. **Moanță Cristian**; Clasa a VI-a: Iana Bianca, Tudorașcu Rareș, Schwarz Isabella. Prof. **Sanda Iulia** Clasa a VII-a: Bădoiu Cristian. Prof. **Dascălu Simona**. Clasa aVIII-a: Smolnik Renata. Prof. **Nălbaru Ramona**, Clasa a VII-a: Ionescu Mihai, Viespescu Carina, Ionașcu Andrei, Mușuloi Matei. Prof. **Dîrnu Daniela;** Clasa a XI-a: Velicovici Darie. Prof. **Goiceanu Dorina**
**Liceul Energetic Craiova**
**Clasa a VI-a:** Cîrjan Clara, Dobre Bianca, Prică Rareș. Prof. **Grigorie Dan Lucian**
**Școala Gimnazială „ Sf. Dumitru”, Craiova**
**Clasa a VII-a**: Corbeanu tania, Mihăicescu Teodora. Prof. **Seinu Cristina**
**Colegiul Național „N. Titulescu „ Craiova**
**Clasa a XI-a:** Bobocel Maria, Popa Mihaela. Prof. **Turcu Eugenia**
**Liceul Teoretic Bechet**
**Clasa a VII-a**. Stoica Matiaș, Brebu Alexandra. Prof. **Gilena Dobrica; Clasa a X-a**: Percea Valentina, Prof. **Iacob Meda Elena**
**ȘCOALA PREUNIVERSITARĂ DE MĂSURĂ SMEENI, BUZĂU**
Clasa.a V-a: Argatu Ioana, Popa Andrada; Clasa a VI-a: Mîrzu Diana, Neacșu Gabriela, Stănescu Daria; Clasa a VII-a: Mîrzu Alexandru; Clasa a VIII-a: Anghel Marius, Sava Alexandra; Clasa a X-a: Constantin Ioana. **Prof. Ion STĂNESCU.**

**„ Eu am rezultatele de mult timp:**
**dar încă nu știu cum să ajung la ele”**

**C. F. Gauss (1777-1855)**

# 4. Probleme propuse

## ▪ Clasa a V-a

**G:1046**. Pe o tablă sunt scrise 10 numere naturale consecutive. Este posibil ca suma cifrelor celui mai mic număr să fie 41 iar suma cifrelor celui mai mare număr să fie 14.

**Lucian Tuțescu, Sanda Iulia,** Craiova

**G:1047**. Numerele naturale a, b, c nu sunt divizibile cu 3. Arătați că $a^{2020}+b^{2022}+c^{2024}$ este un număr divizibil cu 3.

elev **Rareș Tudorașcu**, Craiova

**G:1048**. Arătați că numărul $A=\left(\frac{1+2+3+...+2021}{1011}\right)^n+4$ este divizibil cu 5 pentru orice n număr natural.

**Ion Stănescu**, Buzău

**G:1049. Dați exemple de numere naturale nenule x, y, z distincte două câte două astfel încât x+y+z să dividă pe $x^3+y^3+y^3$.** **Eugenia Turcu**, Craiova

**G:1050. Să se rezolve în N*xN* ecuația px+qy = xy, unde p și q sunt numere prime date.**

**Gheorghe Ghiță,** Buzău

**G:1051**. Numerele naturale x și y verifică egalitatea $2x^3+3y^2=123456$. Să se arate că:

a) x este divizibil cu 6 și y este divizibil cu 4;

b) numărul $10(x^2+y^2)+43004$ este divizibil cu 37037 unde x și y verifică enunțul problemei.

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

**G:1052**. Să se arate că numărul $A=17^n-14^n-11^n-8^n-5^n$, $n\in\mathbb{N}$ este un număr întreg divizibil cu 3.

**Simona Dascălu**, Craiova

**G:1053**. Determinați numărul $\overline{abc}$ cu cifre impare consecutive, nu neapărat în această ordine, astfel încât $a\cdot\overline{bc}\cdot\overline{cb}+c\cdot(b+1)=2021$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

## ▪ Clasa a VI-a

**G:1054**. Se consideră în plan un unghi $\sphericalangle XOY$ cu măsura cunoscută $4^0 45^{\prime}$. Folosind rigla negradată și compasul să se obțină unghiul de $1^0$. elev **Carina Viespescu**, Craiova

**G:1055**. Aflați numerele întregi a și b din relația $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=-2$. **Ion Stănescu**, Buzău

**G:1056**. Să se arate că numerele $a=\frac{5^{807}}{31}$ și $b=\frac{5^{2021}+5^{2020}}{31}$, nu sunt naturale, dar suma lor este număr natural.
**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G:1057**. Determinați numerele naturale x, y, z, u știind că x și y sunt direct proporționale cu numerele 6 și 7, numerele y și z sunt direct proporționale cu 21 și 8 iar z și u sunt direct proporționale cu 16 și 9 și că suma tuturor numerelor este de 1030.
**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1058**. Fie x cel mai mic număr întreg de 38 de cifre cu suma cifrelor egală cu 182. Dacă $y=\underbrace{8000....0}_{17\ cifre\ de\ 0}$, să se arate că y-x este pătrat perfect.
**Adrian Stan**, Buzău

**G:1059**. Fie $x$ și $y$ două numere naturale nenule astfel încât: $\frac{2010}{2011}<\frac{x}{y}<\frac{2011}{2012}$.
Calculați cea mai mică valoare a sumei $x+y$.
**Neculai Stanciu,** Buzău

**G:1060**. Aflați numerele naturale x, y, z știind că $\frac{x}{q^2}=\frac{y}{pq^2}=\frac{p^2q}{z}$ unde p și q sunt numere prime diferite date.
**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G:1061**. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC, AN este bisectoarea unghiului BAC, BN este perpendiculară pe AN. Dacă $AB=14$, $AC=19$ să se afle MN. **(clasa a VI-a)**
**Flavia Anton**, Vaslui

# ▪ Clasa a VII-a

**G:1062**. Aflați numerele $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $8b^2-3a^2-10ab+5=0$
**Gabriela Florina Toader,** Buzău

**G:1063**. Să se arate că există numere naturale x și y pentru care numerele $x^2+2021$ și $y^2+2021^2$ sunt simultan pătrate perfecte.
**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G:1064**. Fie $k\in\mathbb{R}$ și $a,b\rangle 0$ astfel încât $a\cdot b=1$. Arătați că $k^2\cdot a\geq 2k-b$. Când avem egalitate ?
**Maria Popescu**, Rm. Vâlcea, **Alecu Orlando**, Roșiorii de Vede

**G:1065**. Există $x,y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{x}{y+2}+\frac{y}{x+2}=\frac{1}{2}$? Justificați.
**Adriana Ioniță, Aurel Chiriță**, Slatina

**G:1066**. Aflați numerele naturale x, y, p, cu p număr prim dat, astfel încât $x^2-p^{2y}=2021$.
**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G:1067**. Se dau 7 numere naturale $a_1, a_2,........., a_7$ care au următoarea proprietate: daca le aranjăm pe un cerc în ordinea dată fiecare din ele este media aritmetică a vecinilor lui. Arătați că suma lor este divizibilă cu 7.
**Flavia Anton**, Vaslui

**G:1068**. Să se determine soluțiile naturale ale ecuațiilor; a) $x^2-3xy=3y-x+2021$;
b) $a^2-2a=b^2+2b+2021$ .
**Mariana Mitea**, Cugir, Alba

**G:1069**. Demonstrați că: $\sqrt{\frac{1}{2021}}+\sqrt{\frac{2}{2020}}+\sqrt{\frac{3}{2019}}+...+\sqrt{\frac{2021}{1}}>2021.$
**Adrian Gobej**, Curtea de Argeș și **Marin Ionescu**, Pitești

**G:1070**. Demonstrați că pentru $a \in [-1, \infty)$, are loc inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{a+1}}{a+2}+\frac{\sqrt{a+2}}{a+3}+\frac{\sqrt{a+3}}{a+4}+...+\frac{\sqrt{a+2020}}{a+2021}<1010.$$

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Pitești

**G:1071**. Fie ABCD un romb și O punctul de intersecție a diagonalelor sale și $I_1, I_2, I_3, I_4$ centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $\Delta AOB$, $\Delta BOC$, $\Delta COD$ respectiv $\Delta DOA$. Arătați că $I_1I_2I_3I_4$ este pătrat. **Ileana Duma, Meda Iacob**, Craiova

**G:1072**. . Se dă unghiul xOy cu măsura de $150^0$. Pe laturile unghiurilor $(Ox$ și $(Oy$ se iau punctele A și B astfel ca $[OA] \equiv [OB]$. Folosind un echer construiți triunghiul $\Delta ABC$. (cu un echer se pot trasa drepte și unghiuri drepte). **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1073**. Se consideră în plan punctele A(2;4), B(a;b), C(6,8), D(c;d), M(1;2) astfel încât $[AM]$ să fie mediană în triunghiul $\Delta ABC$ iar $[AD]$ să fie înălțime și mediană în triunghiul $\Delta ABM$ .Aflați coordonatele lui B și aria triunghiului ABC. **Ion Stănescu**, Buzău

# ▪ Clasa a VIII-a

**G:1074**. Descompuneți în factori expresia $E(a;b) = a^2(b-2) + a(1-2b) + a^3 + b$.

**Ion Stănescu**, Buzău

**G:1075**. Arătați că există o infinitate de numere întregi m, n care verifică ecuația $m^2 = n^3 - 3n + 2$.

**Flavia Anton**, Vaslui

**G:1076**. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=2020$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G:1077**. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că

$(x^2+2)(y^2+2)+(y^2+2)(z^2+2)+(z^2+2)(x^2+2) \geq 9+6(xy+yz+zx)$. În ce caz avem egalitate ?

**Călina Doina Cristina, Simona Radu**, Craiova

**G:1078**. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $g\left(f(x)-1\right)=\frac{1}{2}g^2(x)+2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că $b\rangle 1$. **Ilinca Sebastian**, Pârscoveni, Olt

**G:1079**. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+9\geq 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$

**Gabriela Florina Toader,** Buzău

**G:1080**. Fie numerele reale pozitive a și b cu $a > b$ și cu proprietatea că $a + b = 505$. Demonstrați că $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}<\sqrt{2021}.$

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Pitești

**G:1081**. Se consideră numerele reale nenegative x, y, z și t cu proprietatea că $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2021$. Demonstrați că $\sqrt{2021-x^2}+\sqrt{2021-y^2}+\sqrt{2021-z^2}+\sqrt{2021-t^2}\geq\sqrt{3}(x+y+z+t)$.

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Pitești

**G:1082**. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

**Ionuț Ivănescu, Simona Vladimirescu**, Craiova

**G:1083**. Să se arate că $\frac{xa^3+yb^3+zc^3}{a^3+bc(b+c)}+\frac{ya^3+zb^3+xc^3}{b^3+ca(c+a)}+\frac{za^3+xb^3+yc^3}{c^3+ab(a+b)}\geq x+y+z$,

$a, b, c, x, y, z\rangle 0$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G:1084**. Fie triunghiul $\Delta ABC$, cu $AB = AC = 4\left(\sqrt{2}+1\right)cm$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^0$. În punctul C se ridică perpendiculara CV pe planul triunghiului cu $CV = 4\sqrt{2}cm$. Aflați tangenta unghiului format de planul (ABC) cu planul (VMA), unde M este mijlocul lui $[BC]$ și tangent unghiului format de planele (VAB) și (ABC). **Nicolae Ivășchescu**, Canada

# ▪ Clasa a IX-a

**L:878**. Știind că $(1+3+5+.....+2021)^{2+4+6+.....+2p} = 9^{12}\cdot 337^{24}$, să se determine numărul natural p.

**Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede

**L:879**. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathrm{N},\ n \geq 2021,$ are loc inegalitatea: $\left(1-\dfrac{1}{2021^k}\right)\left(1-\dfrac{1}{2022^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right) > \dfrac{2020}{2021},\ k \geq 3,$ natural.

**Adrian Gobej**, Curtea de Argeș și **Marin Ionescu**, Pitești

**L:880**. Dacă **a** este soluția pozitivă a ecuației $x^3 - x - 1 = 0$ și b este soluția pozitivă a ecuației $y^6 - y - 3a = 0$, să se compare numerele a și b. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L:881**. Fie $x, y, z \rangle\ 0$ astfel încât $xyz(x+y+z) = 1$. Demonstrați că $(x+y)(y+z)(z+x) \rangle\ 2\sqrt{2}$.

**Călina Doina Cristina, Simona Radu**, Craiova

**L:882**. Fie $x, y \in \mathbb{R} - \{-1\}$ astfel încât $\dfrac{1}{1+x^3} + \dfrac{1}{1+y^3} = 1$. Arătați că $\dfrac{1-x}{1-x+x^2} + \dfrac{1-y}{1-y+y^2} \geq 0$. În ce caz avem egalitate ? **Mihaela Daianu, Mihaela Mirea**, Craiova

**L:883**. Fie $x_k \rangle 0,\ k = \overline{1,n}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} = n$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{x^2_k + x_k + 7}} \leq \dfrac{n}{3}$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:884**. În triunghiul oarecare ABC se cunosc AB=3, BC=7 și mediana BD are lungimea egală cu 4. Să se afle aria triunghiului ABC. **Luiza Cremeneanu**, Craiova

**L:885**. Arătați că nu există $x, y, z \in \mathbb{R}^*_+$ astfel încât $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ x^2 + xz + z^2 = b^2 \\ y^2 + yz + z^2 = (a+b)^2 \end{cases}$.

**Lucian Tuțescu**, Craiova, **Cătălin Pană**, Rm. Vâlcea

**L:886**. Arătați că în orice triunghi ascuțitunghic ABC există relația

$$\frac{A\sin\frac{A}{2} + B\sin\frac{B}{2} + C\sin\frac{C}{2}}{A\cos\frac{A}{2} + B\cos\frac{B}{2} + C\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{5}{4} + \frac{r}{2R}\right),$$ notațiile fiind cele uzuale.

**Radu Diaconu,** Sibiu

# ▪ Clasa a X-a

**L:887**. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x+3^x+5^x=10$. **Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede

**L:888**. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 2021+\log_3 2021+\log_4 2021$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:889**. Arătați că numărul $2021!\cdot 2022!$ se poate scrie ca suma a 2021 numere naturale consecutive dar nu se poate scrie ca suma a 2022 de numere naturale consecutive.

**Cătălina Doina Cristina, Simona Radu**, Craiova

**L:890**. Arătați că soluția reală a ecuației $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2021}=2$ este suma a 2021 numere reale în progresie geometrică. **Ionel Tudor**, Călugăreni,. Giurgiu

**L:891**. Să se determine partea întreagă a numărului $a=\log_2 59049+\log_3 10484576$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L:892**. Arătați că nu există $a\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ astfel încât $\log_{\frac{a^2+1}{a^2-1}}(x^2-x+1)\rangle 1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

**Adriana Ioniță, Aurel Chiriță**, Slatina

**L:893**. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $4\cos^4 x=\cos 2x+2\cos^2 x\cdot\cos 8x$.

**Sorin Pîrlea, Simona Radu**, Craiova

**L:894**. Fie $a\rangle 0,\ a\neq 1$ fixat. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_x(x+2021)=\log_a(a+2021)$;

b) $\log_x(x^{2021}+2021)=\log_a(a^{2021}+2021)$.

**Dan Grigorie, Luiza Cremeneanu**, Craiova

**L:895**. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2}x\sin\frac{\pi x}{x^2+4}+\frac{x^2}{2}+1=0$.

**Mihaela Dăianu, Mihaela Mirea**, Craiova

**L:896.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin^{2021}x+\cos^{2021}x+\sin^{2022}x=2$. **Delia Popescu**, Craiova

**L:897**. Fie numerele reale $a\neq b\neq c\neq a$. Arătați că $\sqrt[3]{a^3-b^3}+\sqrt[3]{b^3-c^3}+\sqrt[3]{c^3-a^3}\neq 0$.

**Daniela Stoian, Roxana Vasile**, Craiova

# ▪ Clasa a XI-a

**L:898**. Fie A o matrice pătratică de ordinul doi cu proprietățile $\det(A+2I_2)=0$ și $\det(A-4I_2)=36$. Să se calculeze $(A+2I_2)^{2022}$. **Iuliana Trașcă,** Olt

**L:899**. Să se determine funcția continuă $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât să avem relația $f(2^x)-f(2^{x-1})=2^{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Cezar Ozunu** Daneți, Dolj

**L:900**. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)\right)}{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$. **Adrian Stan**, Buzău

**L:901**. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = a+1$, $x_2 = a$, $x_{n+2} = \sqrt{(a-1)x_n + x_{n+1}}$, $n \geq 1, a \rangle 1$. Să se arate că $x_n \leq a + \frac{2}{n}$, $\forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

**Gheorghe Ghiță,** Buzău

**L:902**. Arătați că $\sum\limits_{0\leq i \langle j \leq n} (i+j)C_n^i C_n^j = n(2^{2n-1} - C_{2n-1}^n)$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

# ▪ Clasa a XII-a

**L:903**. Să se calculeze: $\int\limits_0^1 \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)}{x^2 - x + 1} dx$

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:904**. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ care verifică relația $(x-1)f(x) = xf(x-2021)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L:905**. Arătați că $\int\limits_0^1 \frac{x^{2020} - 1}{\ln x} dx = \ln 2021$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L:906**. Calculați $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^8 - x^2}{x^{12} + 2x^9 + 4x^6 + 2x^3 + 1} dx$.

**Costel Florea,** Bucuresti

**L:907**. Arătați că $\int\limits_1^2 \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx < 2 - \sqrt{2}$.

**Codruț-Sorin Zmicală**, Sighetu Marmației

**L:908**. Să se calculeze $\int \frac{e^x - x \cdot e^x}{x^2 - e^{2x}} dx$.

**Adrian Stan**, Buzău

**L:909**. Fie $a, b \in R$, $a < b$ și funcțiile continue $f, g : R \to R$ astfel încât $f(x)f(a+b-x) = 1, g(x) = g(a+b-x), \forall x \in R$. Să se arate demonstreze că

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b g(x) dx.$$

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București și **Neculai Stanciu,** Buzău

**L:910.** Calculați integrala: $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x}{1 - x^2} dx$.

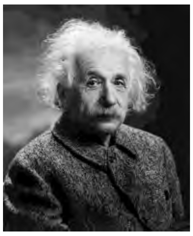
**Vasile Mircea Popa,** Sibiu

**Matematica este ca urcuşul la munte. Efortul este răsplătit de privelişti mărețe. Ca şi pe munte, ascensiunile în matematică sunt frumoase dacă nu eşti obsedat doar de locul unde vrei să ajungi şi dacă eşti în stare să savurezi tot ceea ce întâlneşti pe parcurs.“**

**(Solomon Marcus – „Şocul matematicii“)**

„ **Life is like riding a bicycle.**
**To keep your balance, you must keep moving.”**

**Albert Einstein**
**(1879 - 1955)**



# 5. QUICKIES

**A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader’s name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 01, 2022.**

## PROPOSALS – QUICKIES

**Q71. Proposed by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.**
If $a,b,c>0$ with $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{64}{9}$, then prove that $\frac{a^4+b^3}{a^3+b^3}+\frac{b^4+c^3}{b^3+c^3}+\frac{c^4+a^3}{c^3+a^3}\ge\frac{21}{8}$.

**Q72. Proposed by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan.** If $ABC$ is a triangle with usual notations, then prove that $AH^4+BH^4+CH^4\ge 3R^4$.

**Q73. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.** If $a_k>0$ for any $k=\overline{1,5}$, then prove that

$$\frac{a_1-a_4}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2-a_5}{a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3-a_1}{a_4+a_5+a_1}+\frac{a_4-a_2}{a_5+a_1+a_2}+\frac{a_5-a_3}{a_1+a_2+a_3}\ge 0.$$

**Q74. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania.**
Prove that in any triangle $ABC$ is true the following inequality $\frac{abc}{a+b+c}\ge 8r^2-R^2$.

**Q75. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**
Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n-1)!!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)^2}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}\right)$.

**Q76. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania.** If $a,b,c>0$ and $abc=1$, then prove that $\sum\frac{1}{(a+c)b+a+b+4}\le\frac{3}{8}$.

## SOLUTIONS - QUICKIES

**Q67. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.** Solve the equation

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}},\ \text{where } x>0.$$

**Solution 1 by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan.**

It is known that $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}=\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}$ and $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}}=x$, so we have that

$$x+\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}=x^2 \Leftrightarrow 2x+1+\sqrt{4x+1}=2x^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}=2x^2-2x-1 \Leftrightarrow x=2$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-2x-1)^2=4x+1 \Leftrightarrow 4x^4-8x^3-4x^2+4x+4x^2+1=4x+1 \Leftrightarrow 4x^4-8x^3=0 \Leftrightarrow$$

**Solution 2 by author.** Extracting the square root from both members we obtain $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}=\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}}$, (1). If we denote $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}$, we get $y^2=x+y$, (2), so by (1) we deduce that $y^2=xy \Leftrightarrow y(y-x)=0$. Therefore $x=y=0$ or $y=x \Leftrightarrow x^2=2x$ and because $x>0$ we obtain an unique solution $x=2$.

**Q68. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.** If $a_k, b_k>0$ for any $k=\overline{1,n}$, then prove that

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\ge\frac{4}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}}.$$

**Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.**

By Hölder inequality we get $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\overset{(H)}{\ge}(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n})^n$ and then by Bergström inequality we obtain

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\overset{(B)}{\ge}\frac{(1+1)^2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\overset{(H)}{\ge}\frac{4}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}}.$$

**Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.**

The inequality may be written as $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}}{2}\ge\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)\ldots\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)}}$

By the AM-GM inequality, if *LHS* denotes the left-hand side of the last inequality, then $LHS\ge\sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{a_1b_1}\sqrt{a_2b_2}\ldots\sqrt{a_nb_n}}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)\ldots\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)}}$, which again in the last step the AM-GM inequality has been applied, since $\sqrt{a_kb_k}\le\frac{a_k+b_k}{2}$ for $k=\overline{1,n}$.

**Solution 3 by author.** $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\overset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\cdot\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}}=$

$$=\frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{a_2b_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_nb_n}}}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2}{\sqrt[n]{\frac{a_1+b_1}{2}\cdot\frac{a_2+b_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+b_n}{2}}}==\frac{4}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}}.$$

Equality occurs iff $a_k=b_k\ \forall k=\overline{1,n}$.

**Solution 4 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.** Folosind inegalitatea lui Bergstrőm și inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\overset{Bergstrom}{\ge}\frac{(1+1)^2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}\overset{Holder}{\ge}\frac{4}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_k=b_k$, for any $k=\overline{1,n}$.

**Also solved by Marian Cucoaneș, Mărășești, Romania and Daniel Văcaru, Pitești, Romania.**

**Q69. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.** Let the positive real sequence $(a_n)_{n\geq 1}$, such that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n\sqrt[n]{n!}}=a\in R_+^*$. Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n})$.

**Solution by Daniel Văcaru, Pitești, Romania.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=a\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{a}{e}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{n^{2n}}}\overset{C-D'A}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}}\cdot\frac{n^{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n n^2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2}=\frac{a}{e}\cdot\frac{1}{e^2}=\frac{a}{e^3}.$$

$\frac{1}{n}(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n})=\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}\cdot(u_n-1)=\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n$, where

$u_n=\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_n}}=\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}},\forall n\geq 2$. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$,

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n^2a_n}\cdot\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{a}{e}\cdot\frac{e^3}{a}\cdot 1=e^2.$$

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n})=\frac{a}{e^3}\cdot 1\cdot\ln e^2=\frac{2a}{e^3}$.

**Q70. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania.** Prove that in all scalene triangle $ABC$ holds $\sum\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}\geq\frac{9}{4}$.

**Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.** We shall prove the stronger inequality $\sum\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}\geq\frac{9}{4}$. We have $a^2-ab+b^2=\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{3(a-b)^2}{4}\geq\frac{3(a-b)^2}{4}$ and then

$$\sum\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}\geq\sum\frac{3}{4}\cdot\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=\frac{9}{4}.$$

**Solution 2 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.**

It is not necessary that $a,b,c$ to be the lenghts sides of a triangle; it is sufficient that $a,b,c$ to be real positive numbers $a\neq b\neq c\neq a$. We have

$a^2+ab+b^2\geq a^2-ab+b^2=\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{3(a-b)^2}{4}\geq\frac{3(a-b)^2}{4}$, so $\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}\geq\frac{3}{4}$, and writing other two similar inequalities which by adding yields the desired inequality.

**Solution 3 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.**

Since $\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}=1+\frac{3ab}{(a-b)^2}\geq 1$, the inequality follows trivially $\sum\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}\geq 3>\frac{9}{4}$.

**Also solved by Marian Cucoaneș, Mărășești, Romania and Daniel Văcaru, Pitești, Romania.**

**„ Aș dori ca cineva iscusit în matematică și fizică să se ocupe de jocuri. Spiritul omenesc scânteiază în jocuri mai puternic decât în orice altceva.”**

**G. Leibniz**

**(1646- 1716)**

# 6. Caleidoscop matematic

## Formule de calcul prescurtat. Trucuri folosite în calcule rapide

În următoarele aplicații vom folosi formulele $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ și $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

**1. Ridicarea la pătrat a numerelor ce se termină în 5.**

Dacă a este numărul zecilor acestui număr, atunci numărul dat este 10 a+ 5. Dar,

$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$

Deci, $\overline{a5}^2=\overline{n25}$, unde n este produsul dintre a și succesorul său.

Exemplu: $75^2=5625$

**2. Ridicarea la pătrat a numerelor formate dintr-un număr întreg și $\frac{1}{2}$.**

$$\left(n\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}=n(n+1)+\frac{1}{4}.$$

Exemplu: $\left(4\frac{1}{2}\right)^2=(4,5)^2=20,25$ .

**3. Produsul a două numere $\overline{na}\cdot\overline{nb}$ ce au același număr de zeci iar suma dintre cifra unităților celor două numere este 10** $a+b=10$.

$\overline{na}\cdot\overline{nb}=(10n+a)(10n+b)=100n^2+10n(a+b)+ab=100n(n+1)+ab$.

Deci produsul a două astfel de numere se calculează astfel: pe ultimele poziții apare produsul $a\cdot b$, iar cifrele din fața sa reprezintă produsul dintre n și succesorul său.

Exemplu: $72\cdot78=\overline{(7\cdot8)00}+2\cdot8=5600+16=5616$.

Pentru produsul $\overline{nma}\cdot\overline{nmb}$ cu $a+b=10$ se procedează similar: pe ultimele două poziții apare produsul $a\cdot b$, iar cifrele din fața sa reprezintă produsul dintre $\overline{nm}$ și succesorul său.

Exemplu: $783\cdot787=(78\cdot79)00+3\cdot7=616221$.

**4. Produsul a două numere ce au același număr de zeci și atât suma cât și produsul dintre cifra unităților celor două numere este mai mic decât 10.**

$\overline{na}\cdot\overline{nb}$, unde $a+b\langle 10$ și $a\cdot b\langle 10$.

$\overline{na}\cdot\overline{nb}=n\cdot\overline{n(a+b)}(a\cdot b)$.

Exemplu: $72\cdot73=7\cdot7(2+3)(2\cdot3)=7\cdot75(6)=5256$.

**5. Utilizarea formulei diferențelor de pătrate:** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ **sau** $a^2=(a+b)(a-b)+b^2$

**Exemple:**

$783\cdot787=(785+2)(785-2)=785^2-2^2=(78\cdot79)25-4=616225-4=616221.$

$988^2=(988+12)(988-12)+12^2=1000\cdot976+144=976144$

$27^2=(27+3)(27-3)+3^2=729$ $\quad 63^2=66\cdot60+3^2=3969$, $\quad 37^2=40\cdot34+3^2=1369$,

$48^2=50\cdot16+2^2=2304$, $\quad 54^2=58\cdot50+4^2=2916$.

**Prof. Iancu Daniela,** Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova

**„Unii citesc pentru a gândi, aceştia sunt rari.**
**Unii pentru a scrie, aceştia sunt ceva mai obişnuiţi.**
**Cei rămaşi citesc pentru a discuta”.**
**Charles Caleb Colton**
**( 1777- 1832)**

# 7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 28** al revistei de matematică „**SCLIPIREA MINŢII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate (**salvate în Word 2003-2007**), fie scrise de mână și scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției. revistei **„SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2022**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

## APARIŢII EDITORIALE

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

**REVISTA SCLIPIREA MINȚII**

**NR. 28 ANUL XIV - DECEMBRIE 2021**

**Cuprins**



LEI 12 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

**ISSN 2247 – 6601**
**ISSN – L 2247 - 6601**