BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 23

Prof: Cristea Maria

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+2i}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)$ $\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}=1$	3p 2p
2.	Tripletul $3x-1, x+3, 9-x$ constituie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice dacă are loc relaţia: $x+3=\sqrt{(3x-1)(9-x)}$, Condiţii de existenţă: $(3x-1)(9-x)\geq 0$ $\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3};9\right]$ $(x+3)^2=(3x-1)(9-x)$, adică $4x^2-22x+18=0 \Leftrightarrow 2x^2-11x+9=0$ cu soluţiile $x_1=\frac{9}{2}$ şi $x_2=1$, ambele aparţinând intervalului $\left[\frac{1}{3};9\right]$. $S=\left\{\frac{9}{2};1\right\}$.	1p 2p 1p
3.	$10^x+4^x-2\cdot 25^x=0 \Leftrightarrow 2^x\cdot 5^x+(2^x)^2-2\cdot(5^x)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x+\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]^2-2=0$, s-au împărțit ambii membrii ai ecuației cu $5^{2x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ Notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$. Se obţine ecuaţia: $t^2+t-2=0$ cu soluţiile $t_1=-2$ şi $t_2=1$. Înlocuind $\left(\frac{2}{5}\right)^x=1=\left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x=0$ Ecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^x=-2$ nu are soluție.	1p 2p 2p

	Deci $S=\{0\}$.	
4.	Mulţimea A are 6 elemente, deci numărul de submulţimi nevide ale mulţimii A este: $2^6-1=63$. Dintre submulţimile nevide ale mulţimii A există $C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6-(C_6^0+C_6^1+C_6^2)=42$ submulţimi care au cel puţin trei elemente. Probabilitatea cerută este: $P=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=8\vec{i}-(15-m)\vec{j}$ sunt coliniari dacă are loc relaţia: $\frac{m-3}{8}=\frac{4}{-(15-m)}\Leftrightarrow(m-3)(m-15)=32\Leftrightarrow m^2-18m+13=0$ cu soluţiile $m_1=9+2\sqrt{17}$ şi $m_2=9-2\sqrt{17}$	2p 3p
6.	Raza cercului circumscris este $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4A}$, unde a, b şi c sunt laturile triunghiului iar A aria acestuia. Din formula lui Heron $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+5+6}{2}=9$, deci $A=\sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)}=\sqrt{9\cdot2\cdot4\cdot3}=6\sqrt{6}$. Prin urmare $R=\frac{5\cdot7\cdot6}{4\cdot6\sqrt{6}}=\frac{35}{4\sqrt{6}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$x,y\in(-1,\infty)\Rightarrow x+1>0$ şi $y+1>0\Rightarrow(x+1)(y+1)>0\Leftrightarrow(x+1)(y+1)-1>-1\Rightarrow$ $xTy=(x+1)(y+1)-1>-1$, adică $xTy\in G=(-1,\infty)$, $\forall x,y\in G$. Deci, legea de compoziţie "T" este corect definită. $x,y\in(1,\infty)\Rightarrow x-1>0$ şi $y-1>0\Rightarrow(x-1)(y-1)>0\Leftrightarrow(x-1)(y-1)+1>1\Rightarrow$ $x*y=(x-1)(y-1)+1>1$, adică $x*y\in G'=(1,\infty)$, $\forall x,y\in G'$. Deci, legea de compoziţie "$*$" este corect definită.	2p 2p 1p
b)	$\exists e_1\in G$ astfel încât $e_1Tx=xTe_1=x$, $\forall x\in G$. Evident legea "T" este comutativă, deci pentru	2p

	a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_1Tx = x \Leftrightarrow (e_1+1)(x+1)-1 = x \Leftrightarrow$ $(x+1)\cdot e_1 = 0$, deoarece $x+1 \neq 0 \Rightarrow e_1 = 0 \in G$, deci 0 este element neutru. $\exists e_2 \in G'$ astfel încât $e_2 * x = x * e_2 = x$, $\forall x \in G'$.Evident legea „$*$” este comutativă, deci pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_2 * x = x \Leftrightarrow (e_2-1)(x-1)+1 = x \Leftrightarrow$ $(x-1)(e_2-2) = 0$, deoarece $x-1 \neq 0 \Rightarrow e_2 = 2 \in G'$. Prin urmare $(e_1Te_2) * (e_1 * e_2) = 2 * 0 = 0$.	2p 1p
c)	Funcţia $f(x): G \to G'$ este izomorfism dacă : $a)$ $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$. $a)$ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci $f(x)$ este injectivă. $\forall y \in G'$, există cel puțin un element $x \in G$, astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x = y - 2$ (adevărat deoarece $\forall y > 1$, există cel puțin un $x = y - 2 > -1$ astfel încât $f(x) = y$) , deci $f(x)$ este surjectivă. Prin urmare, din cele stabilite anterior, rezultă că $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = xTy + 2 = xy + x + y + 2$, iar $f(x) * f(y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 =$ $= (x+2)(y+2) - (x+2) - (y+2) + 2 = xy + x + y + 2$, deducem că $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$, ceea ce arată că $f(x)$ este morfism de grupuri. Drept urmare, $f(x)$ este izomorfism de grupuri.	1p 1p 2p 1p
2. a)	Metoda 1. $1 - i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(x)$ se divide cu $x - 1 + i$, dar și $1 + i$ este rădăcină a funcţiei $f(x)$, deci $f(x)$ se divide cu $x - 1 - i$. Prin urmare $f(x)$ se divide cu $(x-1+i)(x-1-i) = x^2 - 2x + 2$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 2)(x+3) + (a+4)x + b - 6$, și punând condiția $(a+4)x + b - 6 = 0 \Rightarrow a = -4$ și $b = 6$. Metoda 2. $1 - i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(1-i) = 0 \Leftrightarrow (-4-a)i + a + b - 2 = 0 \Rightarrow$ $-4 - a = 0$ și $a + b - 2 = 0 \Rightarrow a = -4$ și $b = 6$.	1p 3p 1p

b)	Deoarece $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcției $f(x)$, rezultă că și conjugata $1-\sqrt{2}$ este rădăcină a funcției $f(x)$. Pentru a afla a treia rădăcină este necesar sa determinăm valorile parametrilor a și b. $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcției $f(x) \Rightarrow f(1+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow (7+a)\sqrt{2}+10+a+b=0 \Rightarrow$ $7+a=0$ și $10+a+b=0 \Rightarrow a=-7$ și $b=-3$. Deducem că $f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})\cdot(x+3)=(x^2-2x-1)(x+3)$ rezultă din $f(x)=0$ că $x+3=0$, deci a treia rădăcină este -3.	1p 2p 2p
c)	Funcția $f(x)$ are o rădăcină triplă $\Rightarrow f(x)=0$, $f'(x)=0$ și $f''(x)=0$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+a=0 \Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}\epsilon\mathbb{Q}$. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2+ax+b=0 \Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0 \Rightarrow b=\frac{1}{27}\epsilon\mathbb{Q}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_1(x)=(x\cdot e^x)'=e^x+xe^x$, $f_2(x)=(e^x+x\cdot e^x)'=e^x+e^x+x\cdot e^x=e^x(2+x)$ $f_2(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x+2)=0$, deoarece $e^x\neq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$	3p 2p
b)	Pentru a calcula limita cerută aflăm $f_n(x)$ și $f_{n+1}(x)$. Obervăm că $f_1(x)=e^x(1+x)$ $f_2(x)=e^x(2+x)$....... Intuim că $f_n(x)=e^x(n+x)$ și demonstrăm această relaţie prin inducție. Fie P_n : $f_n(x)=e^x(n+x)$ Etapa de verificare. $P_{(1)}$:$f_1(x)=e^x(1+x)$, adevărat. Etapa de demonstrație.Presupunem adevărată propoziția $P_{(k)}$: $f_k(x)=e^x(k+x)$ și demonstrăm adevărată propoziția P_{k+1} : $f_{k+1}(x)=e^x(k+1+x)$.	1p 2p

	Dar $f_{k+1}(x)=f_k'(x)=\left(e^x(k+x)\right)'=e^x(k+1+x)$, ceea ce trebuia demonstrat. Prin urmare P_1 adevărată, $P_k \Rightarrow P_{k+1} \Rightarrow P_n$ este adevărată. Prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{e^x(n+1+x)}{e^x(n+x)}=1$.	2p
c)	Studiem întâi existența asimptotei orizontale. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x=[-\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left[-\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0$ (am folosit teorema lui l'Hospital). Deci $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f_0 către $-\infty$. Deoarece graficul funcției $f_0(x)$ are asimptotă orizontală nu mai are asimptotă oblică, prin urmare pe aceasta nu o mai studiem.	2p 2p 1p
2. a)	$f'(x)=(\ln(1+x)-x)'=$ $=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$, $\forall x>-1$.	3p 2p
b)	$I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n}{2004+x^n}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1\left(\ln(2004+x^n)\right)'\cdot x\,\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{n}\ln(2004+x^n)\cdot x\Big\|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\ln\frac{2005}{2004}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)\,\mathrm{d}x$.	2p 3p
c)	Se arată că $J_n=\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\Big\|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\ln 2-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$, deci $n\cdot J_n=\ln 2-\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$. Cum $0\le\ln(1+x^n)\le x^n$, $\forall x>0$, rezultă că $0\le\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x=0$ (s-a aplicat teorema cleștelui) și atunci $\lim\limits_{m\to\infty} nJ_n=\ln 2$.	1p 1p 1p 1p 1p