BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1-i)^{16}=[(1-i)^2]^8=(-2i)^8=2^8(i^2)^4$ $(1-i)^{16}=2^8\in\mathbb{R}$.	3p 2p
2.	$y_{\min}=-\frac{\Delta}{4a}$ $\Delta=b^2-4ac$, $\Delta=56$ $y_{\min}=-\frac{56}{8}=-7$.	1p 2p 2p
3.	C.E $x\geq 0$ și $9-x\geq 0\Rightarrow x\in[0,9]$ $(\sqrt{x}+\sqrt{9-x})^2=3^2\Rightarrow 2\sqrt{x(x-9)}=0$ $\Rightarrow x(9-x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=9$.	1p 2p 2p
4.	Numerele naturale pătrate perfecte din două cifre: 16, 25, 36, 49, 64, 81 $\Rightarrow$6 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$90 cazuri posibile P = $\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.	2p 3p
5.	$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$ $x_G=0$, $y_G=3\Rightarrow G(0,3)$.	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow\frac{4\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 4$ $\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m(\angle A)=60^0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$AM=\begin{pmatrix}3y & 3x\\ x & 3y\end{pmatrix}$ $MA=\begin{pmatrix}3y & 3x\\ x & 3y\end{pmatrix}$ $AM=MA,\quad \forall\ A\in C(M)$.	2p 2p 1p
b)	$B\in C(M)$ și $B^2=O_2$ $B\in M_2(\mathbb{R})\Rightarrow B^2-(Tr\,B)B+(\det B)I_2=O_2,\ Tr\,B=2x$, $\det B=x^2-3y^2\Rightarrow 2xB=(x^2-3y^2)I_2$ Dacă $x\neq 0\Rightarrow B=\dfrac{x^2-3y^2}{2x}I_2\Rightarrow y=0$ și $x=1\Rightarrow B=I_2$. Dar $(I_2)^2=I_2\neq O_2$ nu convine. Dacă $x=0\Rightarrow Tr\,B=0\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 3x\\ x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^2=\begin{pmatrix}3x^2 & 0\\ 0 & 3x^2\end{pmatrix}=O_2\Rightarrow x=0\Rightarrow B=O_2$.	3p 2p
c)	$C\in C(M), C\neq O_2$. Presupunem că $\det C=0\Leftrightarrow x^2-3y^2=0$ Dacă $x=0\Rightarrow y=0$ Dacă $x\neq 0\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\pm\sqrt{3}\in Q$, *fals. Deci* $\det C\neq 0$.	1p 2p 2p
2. a)	$f(-2)=(-2)^3-(-2)+a\Rightarrow a=-6$ $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)=0\Rightarrow x_1=2$ $\Rightarrow x_2=-1+i\sqrt{2};\ x_3=-1-i\sqrt{2}$.	1p 3p 1p
b)	$f(x_1)=x_1^3-x_1-6=0$ $f(x_2)=x_2^3-x_2-6=0$ $f(x_3)=x_3^3-x_3-6=0$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3)-18=0$ $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=18$.	3p 2p

c)	$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Fie x_1,x_2,x_3 rădăcini întregi $\Rightarrow$ $f(x)$ nu admite rădăcini multiple $\Rightarrow x_1\in(-\infty,x_2),\ x_2\in(x_2,x_1),\ x_3\in(x_1,+\infty)$. $\Rightarrow x_2=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow x^3-x=0$ $x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=0,\ x_3=1$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$e-e^{\frac{1}{x}}>0,\ x\neq 0$ $\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}<0\Leftrightarrow x<0$ sau $x>1$ $\Rightarrow D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e-e^{\frac{1}{x}})=\ln(e-1)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e-e^{\frac{1}{x}})=\ln(e-1)$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln(e-1)$ $y=\ln(e-1)$ ecuația asimptotei orizontale.	1p 1p 1p 2p
c)	f derivabilă pe D fiind o compunere de funcții derivabile $f'(x)=\frac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2},\ (\forall)x\in D$ $e-e^{\frac{1}{x}}>0$ pe domeniul D $\Rightarrow$ $f'(x)>0$. $\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe D.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_2=\int_0^1 x^2e^x dx=x^2e^x\Big\|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx$	2p

	$= e - 2xe^x \Big\|_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx = e - 2e + 2e^x \Big\|_0^1$ $= e - 2e + 2e - 2 = e - 2$.	2p 1p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$ $= x^{n+1} e^x \Big\|_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx$ $= e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$ $= e - (n+1) I_n$.	1p 1p 1p 2p
c)	Avem $0 \le I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \le \int_0^1 x^n e dx$ $\int_0^1 x^n e dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} e \Big\|_0^1 = \frac{e}{n+1}$ Deci $0 \le I_n \le \frac{e}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, folosind teorema cleștelui.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$|z|=\frac{|9-2i|}{|7+6i|}=\frac{\sqrt{9^2+2^2}}{\sqrt{7^2+6^2}}=\frac{\sqrt{81+4}}{\sqrt{49+36}}$ $|z|=\frac{\sqrt{85}}{\sqrt{85}}=1$	3p 2p
2.	$y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$ $\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=28$ $y_{\max}=-\frac{28}{4\cdot(-1)}=7$.	1p 2p 2p
3.	C.E $x>0, 5-2x>0\Rightarrow x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$ $\log_2 x(5-2x)=1\Rightarrow x(5-2x)=2\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$ $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x\in\left\{2,\frac{1}{2}\right\}\subset\left(0,\frac{5}{2}\right)$	1p 2p 2p
4.	Numerele a căror produs este 12 sunt: 26,62,34,43 $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$90 cazuri posibile P = $\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$.	2p 3p
5.	Dacă M este mijlocul lui $[AC]$ atunci M(-1,2).	2p

	Ecuația medianei din B este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ sau $-2y+4=0$.	3p
6.	$\sin C=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$	2p
	$\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow\frac{16}{\frac{4}{5}}=2R\Rightarrow R=10.$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2+6-2-3-2-4$	2p 2p
	$=-7$	1p
b)	$E(A)=A^2-A+I_3,\ A^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	3p
	$E(A)=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow E(A)=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	2p
c)	$\det A=-7\neq 0\Rightarrow (\exists)\ A^{-1}$	1p
	$A^*=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$	2p 2p

2. a)	Conform teoremei lui Bezout e necesar ca $f(1)=0$, adică $f(1)=1^3-2m\cdot 1+m+1=-m+2=0,$ de unde rezultă m=2.	1p 3p 1p
b)	$m=2\Rightarrow f(x)=x^3-4x+3$ Relațiile lui Viete: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-4 \text{ și}\\ x_1x_2x_3=-3\end{cases}$ $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3-x_1x_2x_3=$ $=1-0+(-4)-(-3)=1-4+3=0$	3p 2p
c)	E necesar ca $f(-1)=1$ $f(-1)=-1+2m+m+1=3m=1$ de unde rezultă $m=\frac{1}{3}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f^4(x)=(\sqrt{x^2+1})^4=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1,\ f^2(x)=(\sqrt{x^2+1})^2=x^2+1$ $f^4(x)-2f^2(x)-15=0\Rightarrow x^4+2x^2+1-2(x^2+1)-15=0\Rightarrow x^4-16=0$ $\Rightarrow(x^2-4)(x^2+4)=0\Rightarrow(x-2)(x+2)(x^2+4)=0\Rightarrow$ soluțiile reale $x_1=2$ și $x_2=-2$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(x^2+1\right)'$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$ $=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.	1p 1p 1p 2p

c)	$\sqrt{x^2+1}>0$ Dacă $x>0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ $\Rightarrow f^{'}(x)>0$ pentru $x>0$ $\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{'}}{1+x^2}dx$ $=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big\vert_0^1$ $=\frac{1}{2}\ln 2$.	2p 2p 1p
b)	$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx=\int_0^1 \frac{x^{n-2}+x^n-x^{n-2}}{1+x^2}dx$ $=\int_0^1 \frac{x^{n-2}+x^n}{1+x^2}dx-\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{1+x^2}dx$ $=\int_0^1 \frac{x^n(x^{-2}+1)}{1+x^2}dx-I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}dx-I_{n-2}$ $=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$.	1p 1p 1p 2p
c)	$I_{2n+1}=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx=\frac{1}{2n}-I_{2n-1}$ $=\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2(n-1)}-I_{2n-3}\right)=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}+I_{2n-3}$ $=\ldots=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2(n-2)}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}+(-1)^n\cdot I_1=$ $=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k}+(-1)^n\frac{1}{2}\ln 2$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=i,\quad \bar{z}=-i$	3p
	$a=0,\quad b=-1.$	2p
2.	$V(x_V,y_V),\quad x_V=-\frac{b}{2a},\quad y_V=-\frac{\Delta}{4a}$	1p
	$x_V=\frac{6}{2}=3,\quad y_V=-\frac{16}{4}=-4$	2p
	$V(3,-4)$.	2p
3.	$3^x+\left(3^2\right)^{\frac{x+1}{2}}=36$	1p
	$3^x+3^{x+1}=36\Rightarrow 3^x(1+3)=36\Rightarrow 3^x\cdot 4=36$ sau $3^x=t>0\Rightarrow t+3t=36\Rightarrow t=9\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2$	2p
	$3^x=9\Rightarrow x=2$	2p
4.	$M\times M$ are 36 elemente $\Rightarrow$ 36 cazuri posibile	2p
	(x,y) pentru care $x+y=5$ sunt (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile	3p
	P= $\frac{nr.\,cazuri\ \ favorabile}{nr.\,cazuri\ \ posibile}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.	

5.	$A(1,a),\ B(4,1),\ C(-1,-4)$ sunt coliniare dacă: $\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 4 & 1 & 1\\ -1 & -4 & 1\end{vmatrix}=0$	2p
	$\Leftrightarrow 1-16-a+1-4a+4=0 \Leftrightarrow -5a=10 \Rightarrow a=-2$	3p
6.	$\sin B=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\frac{AC}{\sin B}=2R$	1p
	$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \Rightarrow \frac{6\cdot\cancel{2}}{\sqrt{3}}=\cancel{2}R \Rightarrow R=2\sqrt{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$AX=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3x & 5+3y\\ x & y\end{pmatrix}$	2p
	$XA=\begin{pmatrix}3 & 5\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 14\\ x & 3x+y\end{pmatrix}$	2p
	$A+X=\begin{pmatrix}4 & 8\\ x & y+1\end{pmatrix}$.	1p
b)	$AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix}3+3x & 5+3y\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 14\\ x & 3x+y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3+3x=3\\ 5+3y=14\\ y=3x+y\end{cases}$	3p
	$\Rightarrow x=0,\quad y=3$.	2p
c)	$n=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	1p
	Presupunem adevărată relația pentru A^n și demonstrăm că $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3(n+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3+3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3(n+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	2p

2. a)	$\Delta=0$ $\Delta=4m^2-4(m+1)^2=4m^2-4(m^2+2m+1)=-8m-4=0$ de unde rezultă $m=-\frac{1}{2}$.	1p 3p 1p
b)	$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow 2=-\frac{2m}{2(m+1)}\Rightarrow -2m=4m+4$ $\Rightarrow 6m=-4\Rightarrow m=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$.	3p 2p
c)	$m=2\Rightarrow f(x)=(2+1)x^2+2\cdot 2x+2+1\Rightarrow f(x)=3x^2+4x+3$ $\begin{array}{r l} 3x^3+x^2-x-3 & \vline\; 3x^2+4x+3 \\ -3x^3-4x^2-3x & \vline\; x\;\;-1 \\ /\;-3x^2-4x-3 & \vline \\ +3x^2+4x+3 & \vline \\ /\quad\;/\quad\;/ & \end{array}$ $g(x)=(3x^2+4x+3)(x-1)\Rightarrow f(x)/g(x)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+!}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^x$ $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}$ $=e^{-2}$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$ $=\frac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$	1p 1p

	$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$ $=\frac{2}{(x+1)^2}$.	1p 2p
c)	Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\Rightarrow f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$. Deoarece $f''(x)>0, x\in(-\infty,-1)$ $\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-\infty,-1)$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$0\le x^n e^{1-x}\le 1, \quad (\forall)\, x\in[0,1]$ $0\le \int_0^1 x^n e^{1-x}dx\le 1$ $0\le f_n(x)\le 1$.	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 xe^{1-x}dx=-\int_0^1 x\cdot(-1)\cdot e^{1-x}dx$ $=-\int_0^1 x\cdot(e^{1-x})'dx=-[xe^{1-x}\|_0^1-\int_0^1 e^{1-x}dx]$ $=-(1+\int_0^1(-1)\cdot e^{1-x}dx)=$ $=-1-e^{1-x}\|_0^1=-1-(1-e)=-1-1+e=e-2$.	1p 1p 1p 2p
c)	$I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx=\int_0^1 x^n\cdot(-e^{1-x})'dx$ $=x^n\cdot(-e^{1-x})\|_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}dx$ $=-1+nI_{n-1}$ $=nI_{n-1}-1, \quad (\forall)\, n\ge 2$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

Prof . Badea Daniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

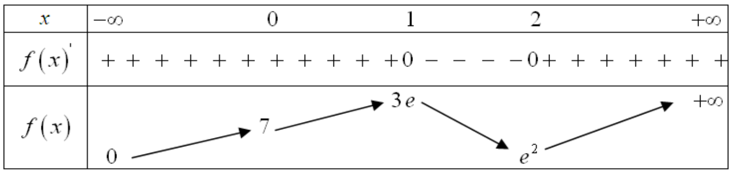
1.	$\log_2(5-\sqrt{3})+\log_2(5+\sqrt{3})-\log_2 11=\log_2 22-\log_2 11=$ $=\log_2 2=1$	3p 2p
2.	$S=2(1+2+3+...+2012)-2012=$ $=2\cdot\frac{2012\cdot 2013}{2}-2012=$ $=2012^2$	2p 2p 1p
3.	$2^{x^2+x+0,5}=2^{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow$ $x^2+x-2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{-2,1\}$	1p 2p 2p
4.	$x\in\mathbb{N},2\le x\le 10$ Formula de calcul a combinărilor $x\ge 6$ $\Rightarrow x\in\{6,7,8,9,10\}$	1p 1p 2p 1p
5.	Formula pentru coordonatele mijlocului unui segment $\mathrm{A}(2,2),\mathrm{B}(-2,-2)$ şi $\mathrm{C}(4,0)$	2p 3p
6.	$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=$ $=\left(\frac{5}{13}\right)^2$ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0$ $\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(x)=x(x^2+3)$ $A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$	3p 2p

b)	$\det A(1)=4 \Rightarrow A(1)$ inversabilă $A^*(1)=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}$ $A^{-1}(1)=\frac{1}{\text{d}}A^*(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	1p 2p 2p
c)	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}(1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	3p 2p
2. a)	$\text{U}(\mathbb{Z}_6)=\{\hat{1},\hat{5}\}$ $\mathbb{Z}_6-\text{U}(\mathbb{Z}_6)=\{\hat{0},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ $S=\hat{3}$	2p 1p 2p
b)	$\det A=\hat{3}x+\hat{4}$ $\det A=\hat{1}\Leftrightarrow \hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}\Leftrightarrow \hat{3}x=\hat{3}\Leftrightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$ $\det A=\hat{5}\Leftrightarrow \hat{3}x+\hat{4}=\hat{5}\Leftrightarrow \hat{3}x=\hat{1}\Leftrightarrow x\in\Phi$ $\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$	2p 1p 1p 1p
c)	$(x,y)\in\{(\hat{1},\hat{2})\}$	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+7}{e^{-x}}$ Se aplică regula lui l'Hospital de două ori şi se obţine $l=0\Rightarrow$ $\Rightarrow d: y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p 2p 1p 1p
b)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=e^x(x^2-3x+2)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2\},\ f(1)=3e,\ f(2)=e^2$  $\Rightarrow 1$ – maxim local, 2 –	1p 1p 2p

	minim local	1p
c)	$f(0)=7,\ f(1)=3e,\ f(2)=e^2$ $7\le e^2$ Conform tabelului de la b) $\Rightarrow 7\le f(x)\le 3e,\ (\forall)x\in[0,2]$	1p 1p 3p
2. a)	f continuă $\int_{-1}^{0}\sin x dx=-1+\cos 1$ $\int_{0}^{1}\frac{x}{x+2}dx=x\Big\vert_0^1-2\ln(x+2)\Big\vert_0^1=$ $=1-2\ln\frac{3}{2}$ $I=\cos 1-2\ln\frac{3}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$I=\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x dx$ $I=\frac{\pi}{2}$ $V=\pi\int_{-\pi}^{0}f^2(x)dx=\pi\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2}$	2p 1p 2p
c)	$\int_{0}^{x}f(t)dt=x-2\ln(x+2)+2\ln 2$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt=1$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 5

Prof . Badea Daniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresie aritmetică, $a_1=2, r=3$ $S_n=155\Leftrightarrow 3n^2+n-310=0, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=10$ $x=a_{10}=29.$	1p 3p 1p
2.	$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1\cdot x_2=m\\ \lvert x_1-x_2\rvert=1\end{cases}\Rightarrow$	2p

	$\begin{cases} x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=1-2m \\ x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-2x_1\cdot x_2=1 \end{cases}$ $1-2m-2m=1 \Leftrightarrow m=0$	2p 1p
3.	$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 5-2x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[1,\frac{5}{2}\right]$ Prin ridicare la pătrat se obţine $4x^2-21x+26=0$ $x_1=2\in\left[1,\frac{5}{2}\right]$ $x_2=\frac{13}{4}\notin\left[1,\frac{5}{2}\right]$ $\Rightarrow S=\{2\}$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$A_{10}^2=10\cdot 9=90$ $C_{10}^2=5\cdot 9=45$ $3P_3=3\cdot 6=18$ $\mathrm{N}=9\cdot 17\,\vdots\,17$	1p 1p 1p 2p
5.	$\Delta\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3x$ $\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}=3\Rightarrow \lvert x\rvert=2$ $x_{1,2}=\pm 2$	2p 2p 1p
6.	$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=$ $=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Demonstrarea relaţiei	5p
b)	$A^n(a,b)=A\left(a^n,na^{n-1}b\right),(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ Demonstrarea prin inducţie sau cu metoda binomială	3p 2p
c)	$a^{2012}=1\Rightarrow a=\pm 1$ $2012a^{2011}b=2012$ $a=1\Rightarrow b=1\Rightarrow A(1,1)$ $a=-1\Rightarrow b=-1\Rightarrow A(-1,-1)$	2p 1p 1p 1p

<table>
<tr><td>2.
a)</td><td>$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$</td><td>2p
3p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Relaţiile lui Viette
$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{s_2}{s_3}=1$
$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=a^2-2$
$a^2-2=1 \Leftrightarrow a_{1,2}=\pm\sqrt{3}$</td><td>2p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\Delta = s_1\left[s_2-\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}\right)\right]=$
$=1(1+1)=2$</td><td>3p
2p</td></tr>
</table>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2;\ x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty) \\ -x^2+x+2;\ x\in(-1,2) \end{cases}$
f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ (funcţii elementare) şi
$f^{'}(x)=\begin{cases} 2x-1;\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty) \\ -2x+1;\ x\in(-1,2) \end{cases}$
$f_s^{'}(-1)=-3,\ f_d^{'}(-1)=3, \Rightarrow f$ nu e derivabilă în -1
analog f nu e derivabilă în 2
$\Rightarrow \mathrm{D}^{'}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$</td><td>1p
1p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)^{'}$</td><td></td><td>$- - - - - - - - -$</td><td>|</td><td>$+ + + + +$</td><td>0</td><td>$- - - -$</td><td>|</td><td>$+ + + + + + +$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>∞</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$\frac{9}{4}$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
Concluzia conform tabelului</td><td>3p
2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty \Rightarrow h$ nu are asimptotă orizontală
$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=1$
$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(h(x)-x\right)=-\frac{1}{2}$
$d: y=x-\frac{1}{2}$ asimptotă oblică spre ∞</td><td>1p
1p
2p
1p</td></tr>
</table>

2. a)	f continuă pe $(0,e)\cup(e,\infty)$ - funcţii elementare $f_s(e)=f(e)=f_d(e)=1\Rightarrow f$ continuă în e $\Rightarrow f$ continuă pe $(0,\infty)\Rightarrow f$ admite primitive pe $(0,\infty)$	2p 1p 2p
b)	$h(x)\le 0(\forall)x\in\left[e^{-1},1\right]$ $A=-\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x dx$ Integrând prin părţi $\Rightarrow A=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big\vert_{\frac{1}{e}}^{1}=$ $=\frac{e^2-3}{4e^2}$	1p 1p 2p 1p
c)	$\ln x\le x-1$ $(\forall)x\in[1,2]$ şi $\ln x\ge 0,\ x-1\ge 0$ $(\forall)x\in[1,2]$ $\Rightarrow \ln^{2012}x\le(x-1)^{2012}$ $(\forall)x\in[1,2]$ prin integrare pe $[1,2]\Rightarrow$ $\Rightarrow\int_1^2 f^{2012}(x)dx\le\frac{1}{2013}$	1p 1p 1p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 6

Prof . BadeaDaniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 2x-1\rvert\le 3\Leftrightarrow -3\le 2x-1\le 3$ $-1\le x\le 2$ dar $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$ $\Rightarrow \text{card}A=4$	2p 1p 1p 1p
2.	$A(0,3)\in G_f\Leftrightarrow f(0)=3\Leftrightarrow b=3$ $-\frac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=-2$ $\Rightarrow f(x)=x^2-2x+3$	2p 2p 1p
3.	$\text{CE}: x^2-2x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ $x^2-2x-3=0$ $x_1=-1,\ x_2=3\overset{\text{CE}}{\Rightarrow}S=\{-1,3\}$	1p 2p 2p

4.	$C_{10}^{3} =$ $=120$	3p 2p
5.	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow$ $m^2 - 2m + 1 = 0$ $m = 1$	2p 2p 1p
6.	$\cos\left(180^0 - x\right) = -\cos x$ $\cos 90^0 = 0$ $S = 0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = 2I_2$ $A^{2012} = 2^{1006} \cdot I_2$;	3p 2p
b)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $XA = AX$ $\Rightarrow \begin{cases} t = x \\ y = 2z \end{cases}$ finalizare	1p 3p 1p
c)	$A^{2k} = 2^k I_2, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$ $A^{2k+1} = 2^k A, (\forall) k \in \mathbb{N}$ $A + A^3 + A^5 + ... + A^{2011} = A + 2A + 2^2 A + ... + 2^{1005} A =$ $= \left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{1005}\right) A = \left(2^{1006} - 1\right) A$ $A^2 + A^4 + A^6 + ... + A^{2012} = \left(2 + 2^2 + ... + 2^{1006}\right) I_2 = 2\left(2^{1006} - 1\right) I_2.$	1p 1p 2p 1p
2. a)	Definiţia elementului neutru $e = 5 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
b)	Definiţia elementului simetrizabil $3' = 3 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
c)	$x * y = (x-4)(y-4) + 4$ $S = (a * 4) * b = 4 * b = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)' = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, $f(1)' = \frac{e}{4}$ $t : y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x-1) \Leftrightarrow ex - 4y + e = 0$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) \infty$	3p 2p

<table>
<tr><td>c)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\qquad$ -1</td><td>$\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$- - - - - - -$</td><td>$- - - - - - -\ 0\ + + + + + + +$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$0 \searrow -\infty$</td><td>$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$</td></tr></table>
concluzia</td><td>4p
1p</td></tr>
<tr><td>2.
a)</td><td>Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă pentru $f \Rightarrow$
$\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x)$
$F'(x)=3x^2+1>0\,(\forall)\,x\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\int f(x)dx=x^3+x+\mathscr{C}$
Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3+x+c$
$A(1,3)\in G_F \Leftrightarrow F(1)=3\Leftrightarrow 2+c=3\Leftrightarrow c=1$
$F(x)=x^3+x+1$</td><td>2p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=(x+1)e^x$
$\int_0^1 g(x)dx=(x+1)e^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=$
$=2e-1-e+1=e$</td><td>1p
3p
1p</td></tr>
</table>

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 7

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a=\sum_{k=1}^{2012}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$ $=1-\frac{1}{\sqrt{2013}}$ $0<a<1\Rightarrow[a]=0$	2p 2p 1p
2.	$m=1\Rightarrow 1\geq 0\ \ (\text{A})$ $m\neq 1\Rightarrow\begin{cases}m-1>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\ (m-1)(5m-9)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1,\frac{9}{5}\right]$ $\Rightarrow m\in\left[1,\frac{9}{5}\right]$	1p 2p 1p
3.	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow$ $x-\frac{\pi}{6}\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	3p 2p
4.	$n\in\mathbb{N},\ n\geq 13$ $C_n^4=C_n^{13}\Rightarrow$ $\Rightarrow n-4=13\Leftrightarrow n=17$	1p 1p 3p
5.	Fie $M(\alpha,\beta)$ a.î. $M\in d_m,(\forall)m\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow m(2\alpha+\beta-1)+(-\alpha+\beta+5)=0,(\forall)m\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta-1=0\\ -\alpha+\beta+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-3\end{cases}\Rightarrow M(2,-3)$	1p 2p 2p
6.	$\arccos\frac{12}{13}=x\Rightarrow\cos x=\frac{12}{13}$ şi $x\in[0,\pi]$ $\Rightarrow\sin x>0$ şi $x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A^2=3A$	1p 4p

b)	$A^n=3^{n-1}\cdot A(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ Demonstrarea propoziţiei prin inducţie	2p 3p
c)	$A+A^2+A^3+....+A^{2012}=\left(1+3+3^2+....+3^{2011}\right)\cdot A=$ $=\frac{3^{2012}-1}{2}\cdot A$	2p 3p
2. a)	$A_x\cdot A_y=A_{x+y}$ finalizare	4p 1p
b)	„·" asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $G\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\Rightarrow$ „·" asociativă pe G $\left.\begin{array}{l} I_3 \text{ element neutru pentru „·" în } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ I_3=A_0\in G \end{array}\right\}\Rightarrow A_0$ element neutru pentru „·" în G $A_{x'}=A_{-x}\in G$ $A_x\cdot A_y=A_{x+y}=A_{y+x}=A_y\cdot A_x$ finalizare	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f:\mathbb{Z}\to G, f(x)=A_x$ f morfism f injectivă f surjectivă	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_2(x)=x^3+2x^2+x-1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f_2'(x)=3x^2+4x+1$ $f_2'(x)=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{3}$ $\begin{array}{cccccccc} x & -\infty & & -1 & & -\frac{1}{3} & & +\infty \\ \hline f_2'(x) & + + + + & + + & +0 & - - - - & 0 & + + + + & + + + \\ \hline f_2(x) & -\infty & \nearrow & -1 & \searrow & -\frac{31}{27} & \nearrow & +\infty \end{array}$ $\Rightarrow -1$ maxim local; $-\frac{1}{3}$ minim local	1p 1p 2p 1p
b)	$f_1(x)=x^3+x^2+x-1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f_1'(x)=3x^2+2x+1$ $f_1'(x)>0\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f_1$ strict crescătoare $\Rightarrow f_1$ injectivă $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)=\infty \\ f_1 \text{ continuă } \Rightarrow f_1 \text{ are pr. Darboux} \end{array}\right\}\Rightarrow \operatorname{Im} f_1=\mathbb{R}\Rightarrow f_1$ surjectivă $\Rightarrow f_1$ bijectivă $\Leftrightarrow f_1$ inversabilă $\left(f_1^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f_1'(x_0)}$, unde $f_1(x_0)=2$ care are soluţia unică $x_0=1$	 1p 1p 1p 1p

	$\left(f_1^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f_1'(1)}=\frac{1}{6}$	1p
c)	ecuaţia devine $x^3+mx^2-x+1=0$; $x=0$ nu este soluţie	1p
	Soluţiile ecuaţiei date sunt aceleaşi cu ale ecuaţiei $x+m-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$	1p
	Fie $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+m$	1p
	Utilizând şirul lui Rolle ecuaţia are trei soluţii reale $\Leftrightarrow m\in(-\infty,-1]$	2p
2. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx=$	1p
	$=\mathrm{tg}x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=$	3p
	$=\frac{4-\pi}{4}$	1p
b)	$0\le x\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le \mathrm{tg}x\le 1\Leftrightarrow 0\le \mathrm{tg}^n x\le 1\Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow 0\le \ln\left(1+\mathrm{tg}^n x\right)\le \ln 2\Leftrightarrow 0\le I_n\le\frac{\pi\ln 2}{4}\Rightarrow (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mărginit (1)	1p
	$\mathrm{tg}^n x\ge \mathrm{tg}^{n+1}x\ (\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$	1p
	$\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător (2)	1p
	$(1),(2)\Rightarrow (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent	1p
c)	$(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător $\Rightarrow \max\left\{I_n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}=I_1$	2p
	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\mathrm{tg}x)dx$. Făcând schimbarea de variabilă $\frac{\pi}{4}-x=y$ obţinem $2I_1=\frac{\pi\ln 2}{4}$	3p
	$\Rightarrow I_1=\frac{\pi\ln 2}{8}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 8

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_6+a_{12}+a_{22}+a_{42}=40 \Leftrightarrow 4a_1+78r=40 \Leftrightarrow 2a_1+39r=20$ $\Rightarrow S_{40}=\frac{(2a_1=39r)\cdot 40}{2}=400$	3p 2p
2.	$2[x]^2-3[x]+1=0$ notăm $[x]=a \Rightarrow 2a^2-3a+1=0 \Rightarrow a_1=\frac{1}{2}, a_2=1$ $[x]=\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nu are soluţii $[x]=1 \Leftrightarrow 1\le x<2 \Leftrightarrow x\in[1,2)$	1p 2p 1p 1p
3.	$A(0,-1)\in G_f \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow c=-1$ $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2};-\frac{\Delta}{4a}=\frac{3}{4};a<0$ $\Rightarrow a=-1;b=1;c=-1 \Rightarrow f(x)=-x^2+x-1$	1p 2p 2p
4.	$4^n=2^n+992$ $2^n=t \Rightarrow t^2-t-992=0 \Rightarrow t_1=32$ şi $t_2=-31<0$ $2^n=32 \Leftrightarrow n=5$	1p 2p 2p
5.	$A(3,1);B(1,-3);C(1,0)$ $\overrightarrow{CA}=2\vec{i}+\vec{j};\overrightarrow{CB}=-3\vec{j}$ $\cos C=\frac{-2}{\sqrt{5}}<0 \Rightarrow C$ obtuz	1p 2p 2p
6.	$\sin x=\frac{5}{13}$ $\cos x=\frac{12}{13}$ $E=\frac{104}{29}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_1=1\neq 0 \Rightarrow A_1$ inversabilă $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	1p

		4p
b)	$A_x^{\ 2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}=B;\quad A_x^{\ 3}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=x\cdot I_3$ $\Rightarrow A_x^{\ 4}=x\cdot A_x;\quad A_x^{\ 5}=x\cdot B;\quad A_x^{\ 6}=x^2\cdot I_3$ prin inducție $\Rightarrow A_x^{\ 3p}=x^p\cdot I_3;\quad A_x^{\ 3p+1}=x^p\cdot A_x;\quad A_x^{\ 3p+2}=x^p\cdot B$	2p 1p 1p
c)	$I_3+A_x+B=\begin{pmatrix}x&1&1\\x&x&1\\x&x&x\end{pmatrix}=C\Rightarrow$ $B_{3p}=x^p\cdot C; B_{3p+1}=x^p\cdot C; B_{3p+2}=x^p\cdot\begin{pmatrix}x&x&1\\x&x&x\\x&x&x\end{pmatrix}$ $\det C=x(x-1)^2;\quad \det B_{3p}=x^{3p+1}(x-1)^2$ $\det B_{3p+1}=x^{3p+1}(x-1)^2;\quad \det B_{3p+2}=x^{3p+2}(x-1)^2$ Matricele B_n sunt inversabile $\Leftrightarrow x\neq 0$ şi $x\neq 1$	1p 2p 1p 1p 1p
2. a)	$f(x)=(x-1)(x-2)c(x)+r(x),\quad r=ax+b$ $x=1\Rightarrow a+b=4$ $x=2\Rightarrow 2a+b=8$ $\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=0\end{cases}\Rightarrow r=4x$	2p 1p 1p 1p
b)	$f(3)=5^{2012}+13$ $5^{2012}=(5^2)^{1006}=(26-1)^{1006}=\sum_{k=0}^{1005}C_{1006}^k 26^{1006-k}(-1)^k+1=a+1$ unde $a\,\vdots\,13$ $\Rightarrow r=1$	1p 3p 1p
c)	$s=\sum_{k=3}^{n}k^2-3\sum_{k=3}^{n}k+2(n-2)$ Calculul fiecărei sume $s=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow f$ nu are asimptotă orizontală $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow d: y=x-\frac{1}{3}$ asimptotă oblică spre $-\infty$	1p 1p 2p 1p
b)	f continuă pe $\mathbb{R}$ f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ $f_s'(0)=\infty,\ f_d'(0)=-\infty \Rightarrow f$ nu e derivabilă în 0 $f_s'(1)=f_d'(1)=\infty \Rightarrow f$ nu e derivabilă în 1	1p 2p 1p 1p
c)	$x_1=0$ - punct de întoarcere şi punct de maxim local $x_2=1$ - punct de inflexiune	3p 2p
2. a)	$f(x)\le 0\ (x)\in[0,1]\Rightarrow A=-\int_0^1 f(x)\,dx$ Se aplică de două ori integrarea prin părţi A=*e*	2p 3p 1p
b)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=e^x\left(x^2-2\right)$ $F'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ maxim local, $\sqrt{2}$ minim local.	2p 1p 2p
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitivă pentru $f\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow L=\lim_{x\to\pi}\frac{F(\sin x)-F(0)}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$ $\overset{l'H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{F'(\sin x)\cdot(\sin x)'}{(\sin x)'}=$ $=\lim_{x\to\pi} f(\sin x)=-2$	 1p 1p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 9

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$S=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{2012}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=$ $=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2013}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8049}\right)=$ $=\frac{2012}{8049}$	2p 2p 1p
2.	$\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1\cdot x_2=2(\lvert m\rvert-1)\end{cases}$ $x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2=9\Rightarrow 5+4(\lvert m\rvert-1)=9$ $\lvert m\rvert=2\Leftrightarrow m\in\{\pm 2\}$	2p 2p 1p
3.	$CE: 9-2^x>0\Leftrightarrow x<\log_2 9$ ecuaţia este echivalentă cu $9-2^x>2^{3-x}$ notăm $2^x=t\Rightarrow 9-t>\frac{8}{t}\Rightarrow t\in(1,8)$ $1<2^x<8\Leftrightarrow 0<x<3$ $3<\log_2 9\Leftrightarrow 8<9\Rightarrow x\in(0,3)$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$f:\{a,b,c\}\to\{1,2,3,4,5\}$ Numărul nr. $=5^3$ Numărul cazurilor favorabile 2^3 $P=\frac{8}{125}$	2p 2p 1p
5.	$C\in Oy\Rightarrow C(0,y)$ $\Delta=\begin{vmatrix}0&y&1\\3&1&1\\1&-3&1\end{vmatrix}=-2y-10$ $\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}=3\Rightarrow\lvert y+5\rvert=3$ $y+5=3\Rightarrow y=-2\Rightarrow C(0,-2)$ $y+5=-3\Rightarrow y=-8\Rightarrow C(0,-8)$	1p 1p 1p 1p 1p

6.	$\sin\alpha+\sin\beta\le\sqrt{4-(\cos\alpha+\cos\beta)^2}\Leftrightarrow$ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\le 4-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta$ $\Leftrightarrow\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\le1$ $\Leftrightarrow\cos(\alpha-\beta)\le1$ (A)	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\alpha\left(\beta^2-1\right)$ (S) compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq0$ $\Leftrightarrow\alpha\in\mathbb{C}^*;\beta\in\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$	3p 1p 1p
b)	$\beta=-1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\alpha&-1&2\\\alpha&-3&3\\\alpha&-1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\det A=0$ $\begin{vmatrix}-1&2\\-3&3\end{vmatrix}=3\neq0$ minor principal $\begin{vmatrix}-1&2&1\\-3&3&1\\-1&1&-3\end{vmatrix}=-12\Rightarrow(S)$ incompatibil	1p 1p 1p 2p
c)	$\beta=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\alpha&1&2\\\alpha&1&3\\\alpha&1&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \det A=0;\ \begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq0$ minor principal $\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&4&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow(S)$ compatibil simplu nedeterminat $\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\alpha\lambda,\ \lambda\in\mathbb{C}\\z=0\end{cases}$ $x_0{}^2+y_0=(z_0-1)^{2012}\Leftrightarrow\lambda(\lambda-\alpha)=0\Rightarrow$ $\lambda=0\Rightarrow(0,1,0)$ sau $\lambda=\alpha\Rightarrow\left(\alpha,1-\alpha^2,0\right)$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$\begin{cases}x+y+\hat{2}z=\hat{0}\\y+z=\hat{1}\\z=\hat{2}\end{cases}$	2p 3p

	$\begin{cases} x=\hat{0} \\ y=\hat{2} \\ z=\hat{2} \end{cases}$	
b)	Parte stabilă Asociativitate Element neutru Elemente simetrizabile Comutativitate	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$\text{card}\mathbb{Z}_3=3$ $\Rightarrow \text{cardG}=27$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f_n derivabile pe $\mathbb{R}$ şi $f_n^{'}(x)=2x(1+x)^n+x^2\cdot n(1+x)^{n-1}$ $f_n^{'}(1)=12\Rightarrow 2^{n+1}+n\cdot 2^{n-1}=12$ $n=2\in\mathbb{N}^*$ soluţie unicitatea soluţiei	2p 1p 1p 1p
b)	$f_2(x)=x^4+2x^3+x^2$ $f_2^{'}(x)=4x^3+6x^2+2x=2x(2x^2+3x+1)$ $f_2^{'}(x)=0\Rightarrow x\in=\left\{-1,-\frac{1}{2},0\right\}$ $-1,-\frac{1}{2},0$ puncte de extrem local $\Rightarrow\sum f_2(x_k)=f_2(-1)+f_2\left(-\frac{1}{2}\right)+f_2(0)=\frac{1}{16}$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$x^2(1+x)^n=\text{C}_n^0x^2+\text{C}_n^1x^3+\text{C}_n^2x^4+.....+\text{C}_n^nx^{n+2}$ Prin derivare obţinem $f_n^{'}(x)=2\text{C}_n^0x+3\text{C}_n^1x^2+4\text{C}_n^2x^3+.....+(n+2)\text{C}_n^nx^{n+1}$ pentru $x=1\Rightarrow 2\text{C}_n^0+3\text{C}_n^1+4\text{C}_n^2+.....+(n+1)\text{C}_n^{n-1}+(n+2)\text{C}_n^n=$ $=f_n^{'}(1)=(n+4)\cdot 2^{n-1}$ limita devine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n}=\frac{1}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$\int\limits_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{f^2(x)}dx=arctg(x+1)\Big\|_0^{\sqrt{3}-1}=$ $=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$	3p 2p
b)	Aplicarea metodei de integrare prin părţi	3p

	$I=\frac{2\sqrt{5}-2}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	2p
c)	$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\cdot\frac{k}{n}+2}$ Justificarea faptului că $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi_n\right)$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f\left(x\right)dx=$ valoarea de la punctul b	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 10

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ $a_1=-15$ $S_n=0 \Leftrightarrow n=11$	1p 1p 3p
2.	$x \neq 1$ $\frac{x^2-x-6}{x-1} \leq 0$ $x \in (-\infty,-2] \cup (1,3]$ $A=\{2,3\}$	1p 1p 2p 1p
3.	$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\frac{13}{9}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot t+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}=\frac{13}{9}$ $\Leftrightarrow 6t^2-13t+6=0 \Rightarrow t_1=\frac{3}{2}, t_2=\frac{2}{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=-1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3} \Rightarrow x=1$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$A_5^3-A_4^2=$ $=60-12=48$	3p 2p
5.	$\mathrm{B}'\left(\frac{5}{2},1\right), \mathrm{O}(0,0)$ mijloacele laturilor ecuaţia dreptei determinate de două puncte OB': $2x-5y=0$	2p 1p 2p
6.	$p=9$ $\mathrm{S}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=6\sqrt{6}$ $r=\frac{S}{p}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} a^2 & a & -1 \\ b^2 & b & -1 \\ c^2 & c & -1 \end{vmatrix}=$ $=(b-a)(c-b)(c-a)$	2p 3p
b)	$\mathrm{d}_x=(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)$ $\mathrm{d}_y=-(b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ac)$ $\mathrm{d}_z=-abc(b-a)(c-b)(c-a)$ $\Rightarrow x=a+b+c,\ y=-(ab+bc+ac),\ z=-abc$	3p 2p
c)	Fie t_1,t_2,t_3 rădăcinile ecuaţiei date Fie $\Rightarrow\begin{cases} t_1+t_2+t_3=x=a+b+c \\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=-y=ab+bc+ac \\ t_1t_2t_3=-z=abc \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} t_1=a \\ t_2=b \\ t_3=c \end{cases}$	1p 2p 2p
2. a)	Suma coficienţilor polinomului f este egală cu $f(1)$ $f(1)=7^{2012}+14\Leftrightarrow$ $f(1)=7(7^{2011}+2)\vdots 7$	2p 1p 2p
b)	$g=(x+2)(x+3)$ $f=(x+2)(x+3)\cdot q+r,$ gradr $<2\Rightarrow r=ax+b$ $\left.\begin{array}{l} f(-2)=1^{2012}-8+10=3 \\ f(-2)=-2a+b \end{array}\right\}\Rightarrow -2a+b=3;\ \left.\begin{array}{l} f(-3)=(-1)^{2012}-12+10=-1 \\ f(-3)=-3a+b \end{array}\right\}\Rightarrow -3a+b=-1$ $\begin{cases} -2a+b=3 \\ -3a+b=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=11 \end{cases}\Rightarrow r=4x+11$	1p 1p 2p 1p
c)	$g(x)=(x+2)(x+3)\Rightarrow\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3},(\forall)x\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+....+\dfrac{1}{2015}-\dfrac{1}{2016}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2016}=\dfrac{1007}{2016}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f^{'}(x)=2\cdot e^{2x}+2x=2\left(e^{2x}+x\right)$ $f^{'}(x)>0(\forall)x\in[0,1]$ $\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$	2p 2p 1p
b)	$f(0)=-1<0,\ f(1)=e^2-1>0$ f continuă pe $[0,1]$ $\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină în $(0,1)$ (1) f strict crescătoare pe $[0,1]$ (2) $(1),(2)\Rightarrow f$ are o singură rădăcină în $(0,1)$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f^{''}(x)=2\left(2e^{2x}+1\right),\ f^{'''}(x)=2^3e^{2x}\Rightarrow P_3(A)$ (I) $P_k(A)\Rightarrow P_{k+1}(A)$ $f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)^{'}=\left(2^ke^{2x}\right)^{'}=2^{k+1}e^{2x}$ (A) (II) Din (I) şi $(\mathrm{II})\Rightarrow P_n$ $(A)(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 3$	2p 2p 1p
2. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{1}{3}}{x^3}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-1}{3x^3}=\frac{1}{3}$	3p 2p
b)	$\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=$ $\int\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}dx=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c$ Fie $H(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c,$ $H(0)=-1\Leftrightarrow 1+c=-1\Leftrightarrow c=-2$ $\Rightarrow H(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-2$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$V=\int_0^1\pi f^2(x)dx=$ $=\pi\frac{(x+1)^5}{5}\Big\vert_0^1=$ $=\frac{31\pi}{5}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 11

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$N=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2012}-1}{-\frac{1}{3}-1}:\frac{3^{2012}-1}{3^{2012}}=$ $=\frac{3}{2}$	3p 2p
2.	a şi b sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-12=0$ $\Rightarrow$ numerele sunt -3 şi 4	3p 2p
3.	$2\log_2 x-1\le 3$ $\Leftrightarrow \log_2 x\le 2$ $\Leftrightarrow x\le 4$ $\Rightarrow x\in\{1,2,3,4\}$	1p 1p 2p 1p
4.	$x-\frac{20}{100}x=\frac{4}{5}x$ $\frac{110}{100}\cdot\frac{4}{5}x=1760$ $x=2000$	1p 2p 2p
5.	M mijlocul lui (AB) $\Rightarrow$M(1,2) $m_{AB}=\frac{1}{2}$ d mediatoarea $\Rightarrow m_d=-2$ $d:2x+y-4=0$	1p 1p 1p 2p
6.	$\sin 0^0=0, \sin 90^0=1$ $\sin^2 15^0+\sin^2 75^0=\sin^2 15^0+\cos^2 15^0=1$ $\sin^2 30^0+\sin^2 60^0=1$ $\sin^2 45^0=\frac{1}{2}$ $S=\frac{7}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=4+m^2-m^2+2m-2m-m^2$ $=4-m^2$	3p 2p

b)	(S)sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	2p 3p
c)	$m=0 \Rightarrow \det A = 4$ $d_x = 4, d_y = 4, d_z = -4 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y,z) \in \{(1,1,-1)\}$	1p 3p 1p
2. a)	$f_{a,b} \vdots (X-1) \Leftrightarrow f_{a,b}(1) = 0$ $f_{a,b}(1) = 2a^2 - 2ab + b^2 + 2a + 1 = (a-b)^2 + (a-1)^2$ $(a-b)^2 + (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a = b = 1$	1p 2p 2p 1p
b)	x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f_{1,1} = 2X^3 - 2X^2 + X - 1 \Rightarrow$ $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1;\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2};\ s_3 = x_1x_2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2 = 0$ $\begin{cases} 2x_1^3 - 2x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \\ 2x_2^3 - 2x_2^2 + x_2 - 1 = 0 \\ 2x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^3 = 2x_1^2 - x_1 + 1 \\ 2x_2^3 = 2x_2^2 - x_2 + 1 \\ 2x_3^3 = 2x_3^2 - x_3 + 1 \end{cases}$ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{1}{2}(2S_2 - s_1 + 3) = 1$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$2 \cdot 8^x - 2^{2x+1} + 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{3x} - 2 \cdot 2^{2x} + 2^x - 1 = 0$ Notăm $2^x = t \Rightarrow 2t^3 - 2t^2 + t - 1 = 0$ $\Rightarrow (t-1)(2t^2+1) = 0 \Rightarrow t = 1$ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = (x\sqrt{3} - 2)^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left[-2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right]$	1p 2p 2p
b)	Fie pantele celor două tangente $m_1 = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$ $m_2 = f'(\sqrt{3}) = 1$ $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ cele două tangente sunt perpendiculare	1p 1p 1p 2p

c)	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}\overset{(1^\infty)}{=}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left[\left(1+\left(f'(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f'(x)-1}}\right]^{\frac{f'(x)-1}{x-\sqrt{3}}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^3-1}{x-\sqrt{3}}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-3\right)\left[\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)\right]}{x-\sqrt{3}}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)}=e^{3\sqrt{3}}$	2p 2p 1p
2. a)	$\int_{-1}^{1}(x+2)\,f_1(x)dx=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=$ $=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_{-1}^{1}=$ $=-2$	1p 2p 2p
b)	$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{x+2}dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)dx=$ $=x\Big\|_{-1}^{1}-3\ln\|x+2\|\Big\|_{-1}^{1}=2-3\ln 3$	3p 2p
c)	$\Leftrightarrow I_{n+1}+3I_n=\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^{n+1}+3(x-1)^n}{x+2}dx=$ $=\int_{-1}^{1}(x-1)^n dx=\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big\|_{-1}^{1}=$ $=\frac{(-2)^{n+2}}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 12

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1$ $N=0\in\mathbb{N}$	2p 2p 1p
2.	$\Delta=m^2-12$ $\Delta\geq 0\Leftrightarrow m^2-12\geq 0\Leftrightarrow$ $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3},\infty\right)$	1p 2p 2p

3.	$2\cdot 9^x=3^{x+1}+5\cdot 3^x-6$ $3^x=t\Rightarrow 2t^2=3t+5t-6\Leftrightarrow t^2-4t+3=0$ $t_1=1\Rightarrow x_1=0$ $t_2=3\Rightarrow x_2=1$	2p 1p 1p 1p
4.	Nr. cazuri posibile =12 $C_{11}^0=C_{11}^{11}=1$ $C_{11}^k\,\vdots\,11(\forall)k\in\{1,2,...,10\}$ Nr. cazuri favorabile =10 $P=\frac{5}{6}$	1p 1p 1p 1p 1p
5.	$AB=\sqrt{5}, AC=\sqrt{20}, BC=5$ ΔABC dreptunghic în A (R.T.P) M centrul cercului circumscris $\Rightarrow M$ mijlocul lui (BC) $\Rightarrow M\left(\frac{1}{2},0\right)$	2p 1p 1p 1p
6.	$m=0\Rightarrow \vec{u}$ şi $\vec{v}$ necoliniari $m\neq 0\Rightarrow \frac{m^2-1}{m}=2$ $\Leftrightarrow m^2-2m-1=0\Leftrightarrow m_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=5$ $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix}.$	1p 2p 2p
b)	$A^2=4A-5I_2$ se verifică prin calcul direct $A^{n+1}=4A^n-5A^{n-1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ se demonstrează prin inducţie matematică	2p 3p
c)	Presupunem că $(\exists)m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m=I_2\Rightarrow \det A^m=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\det A)^m=1\Leftrightarrow 5^m=1$ fals	2p 3p
2. a)	$f=g\cdot h+r$ $h=X^4-X^3+X$ $r=-X^3+1$	1p 2p 2p
b)	Relaţiile lui Viette $\begin{cases}s=x_1+x_2=-1\\ p=x_1\cdot x_2=1\end{cases}$ $x_1^2+x_2^2=s^2-2p=-1$ x_1 şi x_2 rădăcinile lui $g\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+x_1+1=0/\cdot x_1\\ x_2^2+x_2+1=0/\cdot x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^3=-x_1^2-x_1\\ x_2^3=-x_2^2-x_2\end{cases}$ $\Rightarrow x_1^3+x_2^3=1+1=2$	1p 1p 2p 1p

c)	$f\left(x_1^2\right)+f\left(x_2^2\right)=\left(x_1^{16}+x_1^8+1\right)+\left(x_2^{16}+x_2^8+1\right)=$ $=\left(x_1+x_2\right)+\left(x_1^2+x_2^2\right)+2=$ $=-1-1+2=0\in\mathbb{N}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}$	2p 3p
b)	$f^2(x)=-2f'(x)\cdot\sqrt{3+x} \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2\sqrt{3+x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}$ $\frac{1}{f(x)}=\sqrt{3+x}+2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}} \Rightarrow$ relaţia adevărată $f'(x)=-\frac{f^2(x)}{2\sqrt{3+x}}<0\ (\forall)x\in(-3,1)\cup(1,\infty),\ f_s(1)=f_d(1)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe D	1p 1p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei la grafic într-un punct $f(-2)=\frac{1}{3},\ f'(-2)=-\frac{f^2(-2)}{2}=-\frac{1}{18}$ $\Rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+18y-4=0$	1p 2p 1p 1p
2. a)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ (1) $F'(x)=\left(e^{\cos x}+\sin x-x+1\right)'=-\sin x\cdot e^{\cos x}+\cos x-1=f(x)\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ (2) (1) şi (2) $\Rightarrow F$ primitivă pentru f	1p 2p 2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=F(x)\bigg\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=\left(e^{\cos x}+\sin x-x\right)\bigg\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=2-e-\frac{\pi}{2}$	2p 1p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-\cos x+1}{\left(\sin^2 x-1\right)e^{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=$ $=\frac{1}{\cos x}\bigg\rvert_0^{\frac{\pi}{4}}=$ $=\sqrt{2}-1$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\left[(1+i)^2\right]^{1006}+\left[(1-i)^2\right]^{1006}=(2i)^{1006}+(-2i)^{1006}=$ $=-2^{1006}-2^{1006}=-2^{1007}\in\mathbb{R}$	2p 3p
2.	Fie $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_1\neq x_2$ (sau alte valori) $f(x_1)=f(x_2)=1\Rightarrow f$ nu este injectivă	3p 2p
3.	$\sqrt{x-1}=7-x$ $CE:\begin{cases}x-1\geq 0\\ 7-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\leq 7\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1,7]$ $x-1=(7-x)^2\Leftrightarrow x^2-15x+50=0\Rightarrow x_1=5$ şi $x_2=10$ $\overset{CE}{\Rightarrow}S=\{5\}$	2p 2p 1p
4.	$2^{n-1}=128\Leftrightarrow n=8$ $T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{a}\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k=C_8^ka^{4-k}$ $4-k=2\Leftrightarrow k=2$ $T_3=C_8^ka^2=28a^2$	1p 2p 1p 1p
5.	Ecuaţia bisectoarei a doua este $b: y=-x$ $\begin{cases}2x-y+5=0\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{3}\\ y=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow d_1\cap b=\left\{A\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)\right\}$ $A\in d_2\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$	1p 2p 2p
6.	notăm $\sin\alpha=x,\ \cos\alpha=y$ şi rezolvăm Sistemul $\begin{cases}3x+2y+3=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in\left\{\left(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right);(-1,0)\right\}$ dar $x\neq\frac{k\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{5}{13}\\ \cos\alpha=-\frac{12}{13}\end{cases}\Rightarrow$ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{120}{169}$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1&a&2\\2&2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ $\det A=3(a-1)$ $\det A=0\Leftrightarrow a=1$ $\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\neq0\Rightarrow$ rang A=2	1p 2p 1p 1p
b)	$a=1\Rightarrow$ $d_c=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\1&-1&b\end{vmatrix}=-3(b+2)$ $d_c=0\Rightarrow b=-2$	3p 2p
c)	$a=1,\ b=-2$ $\begin{cases}y+2z=1-\lambda\\2y+z=-1-2\lambda\\x=\lambda\end{cases}$ $(x,y,z)\in\{(\lambda,-1-\lambda,1)/\lambda\in\mathbb{C}\}$ $\div x,y,z\Rightarrow\lambda+1=-2-2\lambda\Leftrightarrow\lambda=-1$ $\Rightarrow(-1,0,1)$	1p 2p 1p 1p
2. a)	Definiţia $(-2x+3)(e-1)=0(\forall)x\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow e=1\in\mathbb{Z}$	1p 2p 2p
b)	Definiţia $\left.\begin{array}{l}x'(-2x+3)=-3x+4\\-2x+3\neq0(\forall)x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow x'=\dfrac{-3x+4}{-2x+3}$ $x'\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-2x+3\mid-3x+4\Leftrightarrow-2x+3\in D_1=\{\pm1\}$ $\Rightarrow x\in\{1,2\}\Leftrightarrow\mathrm{U}(\mathbb{Z})=\{1,2\}$	1p 2p 1p 1p
c)	$x*y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2},(\forall)x,y\in\mathbb{Z}.$ $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ n\ ori}=(-2)^{n-1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n}+\frac{3}{2},(\forall)n\in\mathbb{N}^{*},n\geq2$ Demonstrarea propoziţiei prin inducţie atematică completă $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ 2012\ ori}=(-2)^{2011}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2012}+\frac{3}{2}$	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$x_0=0\Rightarrow f(x_0)=1$
$f'(x_0)=f'(0)=1$
$t:y-1=x\Leftrightarrow x-y+1=0$</td><td>1p
2p
2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f_3(x)=x^3+x^2+x+1;\ \ f_3'(x)=3x^2+2x+1$
f_3 strict crescătoare şi continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)'$</td><td>+ + + + + + +</td><td>+ + + + + + + +</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty\nearrow 4$</td><td>$4\nearrow +\infty$</td></tr>
</table>
Im $f_3=\mathbb{R}\setminus\{4\}$</td><td>1p
1p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$1+x+x^2+x^3+....+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}(\forall)x\neq 1$
Derivând se obţine $1+2x+3x^2+4x^3+....+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$
pentru $x=\frac{1}{3}\Rightarrow 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+....+\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}=\frac{9}{4}$</td><td>1p
2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>2.
a)</td><td>$I_0=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2+(a+1)^2}=\frac{1}{a+1}\text{arctg}\frac{x+1}{a+1}\Big|_0^1=$
$=\frac{1}{a+1}\left(\text{arctg}\frac{2}{a+1}-\text{arctg}\frac{1}{a+1}\right)$</td><td>3p
2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}\le x^n\Rightarrow$
$\Rightarrow I_{n+1}\le I_n\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$</td><td>3p
2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$I_{n+2}+2I_{n+1}+(a^2+2a+2)I_n=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$
$\frac{1}{n+1}\le I_n+2I_n+(a^2+2a+2)I_n=(a^2+2a+5)I_n\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{(n+1)(a^2+2a+5)}$
$I_n\le\frac{1}{(n-1)(a^2+2a+5)}$
$\frac{1}{(n+1)(a^2+2a+5)}\le I_n\le\frac{1}{(n-1)(a^2+2a+5)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot I_n=\frac{1}{a^2+2a+5}$</td><td>1p
1p
1p
2p</td></tr>
</table>

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2-\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)z+1=0$ $\Delta=-4\cos^2\frac{\pi}{12}\Rightarrow z_{1,2}=\sin\frac{\pi}{12}\pm i\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{12}\pm i\sin\frac{5\pi}{12}$ $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1,\ \overline{z_1}=z_2,\ z\cdot\overline{z}=1$ $z_i^{2012}+\frac{1}{z_i^{2012}}=z_i^{2012}+\overline{z_i}^{2012}=2\cos 2012\cdot\frac{5\pi}{12}=$ $=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$	1p 1p 1p 1p 1p
2.	$f(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ Fie $y=\sqrt{3}-1,\ f(x)=\sqrt{3}-1\Rightarrow$ $\Rightarrow\sqrt{3}x-1=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow x=1\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\Rightarrow f$ nu e surjectivă	1p 2p 1p 1p
3.	$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=0$ notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=a\Rightarrow 3a^2-5a+2=0\Rightarrow a_1=\frac{2}{3}$ şi $a_2=1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1\Rightarrow x=0$	2p 1p 1p 1p
4.	$A_5^5-A_4^4+A_5^4-A_4^3+A_5^3-A_4^2+A_5^2-A_4^1+4=$ $=260$	3p 2p
5.	$G\in Ox\Rightarrow G(x,0)$ $C(x_C,y_C)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x_C+4}{3}\\0=\frac{y_C-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3x-4\\y_C=2\end{cases}\Rightarrow C(3x-4,2)$	1p

	$\Delta=\begin{vmatrix}3x-4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=12x-30$ $\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}=3\Rightarrow\lvert 6x-15\rvert=3$ $6x-15=3\Rightarrow x=3\Rightarrow C(5,2)$ $6x-15=-3\Rightarrow x=2\Rightarrow C(2,2)$	1p 1p 1p 1p
6.	Fie $T\in\mathbb{R}^*$ a.î. $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\cos\left[4(x+T)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)(\forall)x\in\mathbb{R}$ $4x-\frac{\pi}{3}=y\Rightarrow\cos(y+4T)=\cos y(\forall)y\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\mathcal{T}=\left\{k\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}^*\right\}\Rightarrow T_0=\frac{\pi}{2}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\in\mathrm{M},X=\begin{pmatrix}x & y & z\\ 0 & x & y\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}\in\mathrm{M},\ a,x\neq 0$ $AX=\begin{pmatrix}ax & ay+bx & az+by+cx\\ 0 & ax & ay+bx\\ 0 & 0 & ax\end{pmatrix};\ ax\neq 0$ $\Rightarrow AX\in\mathrm{M},\ (\forall)A,X\in\mathrm{M}$	1p 3p 1p
b)	$\det A=a^3\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y & z\\ 0 & x & y\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$ cu $x=\frac{1}{a},y=-\frac{b}{a^2},z=\frac{b^2-ac}{a^3}$	1p 4p
c)	$A=3I_3+B$ cu $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ B^k=0_3\ (\forall)k\geq 3$ $A^n=(3I_3+B)^n=C_n^0(3I_3)^n+C_n^1(3I_3)^{n-1}B+C_n^2(3I_3)^{n-2}B^2=$	1p 1p 1p

	$=\begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & n(2n+1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f=X^4+1=\left(X^4+2X^2+1\right)-2X^2=$ $=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)$	2p 3p
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ Se adună toate coloanele la prima coloană $\Rightarrow$ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$ $=1$	1p 3p 1p
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=$ $=-2a<0$ $\Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	F derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ f strict descrescătoare pe $(0,1]$ f strict crescătoare pe $[1,\infty)$	2p 1p 1p 1p
b)	$\beta=f(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ $f'(\alpha)=\frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}=\frac{3}{16}$ $\Leftrightarrow 9\alpha^3-64\alpha^2+128\alpha-64=0 \Leftrightarrow$ $(\alpha-4)(9\alpha^2-28\alpha+16)=0 \Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \alpha_1=4 \\ \alpha_{2,3}\notin\mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \beta=\frac{5}{2} \Rightarrow \mathrm{M}\left(4,\frac{5}{2}\right)$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}=$ $=\frac{(-1)^n1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-1-x)}{2^n\cdot x^n\sqrt{x}},(\forall)n\in\mathbb{N}$ Demonstrarea propoziţiei prin inducţie	3p 2p

2. a)	$I_2=\int_0^1 x^2\ln\left(1+x^2\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln\left(1+x^2\right)\Big\vert_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}dx=$ $=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$ $=\frac{4}{9}-\frac{\pi}{6}+\frac{\ln 2}{3}$	2p 1p 1p
b)	Demonstrarea relaţiei $\ln\left(1+x\right)\le x\ \left(\forall\right)x\ge 0$ $0\le\ln\left(1+x^n\right)\le x^n\ \left(\forall\right)x\in\left[0,1\right]$ $\Rightarrow 0\le x^n\ln\left(1+x^n\right)\le x^{2n}\ \left(\forall\right)x\in\left[0,1\right]$ $0\le I_n\le\frac{1}{2n+1},\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}^*$	1p 1p 1p 2p
c)	Criteriul cleştelui $\overset{b}{\Rightarrow}$ $\overset{b}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta=4m^2-4m$ $\Delta<0\Leftrightarrow m\in\left(0,1\right),\overline{z_1}=z_2$ $\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert=1\Rightarrow\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+2\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert=1$ $\Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+2\lvert z_1z_2\rvert=1\Leftrightarrow 2z_1z_2+2\lvert z_1z_2\rvert=1$ $\Leftrightarrow 2m+2\lvert m\rvert=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$	1p 1p 1p 1p 1p
2.	$\Delta=25\Rightarrow V\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)\Rightarrow V_{\min f}=-\frac{25}{4}$ $V_{\min g}=f\left(0\right)=f\left(1\right)=-6$	3p 2p
3.	$CE:\begin{cases}x^2-3>0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ $x^2-3>x+3\Leftrightarrow x^2-x-6>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(3,+\infty\right)$ $\overset{CE}{\Rightarrow}x\in\left(-3,-2\right)\cup\left(3,+\infty\right)$	2p 2p 1p
4.	Numărul total de funcţii $=5^3=125$	2p

	Numărul funcţiilor injective $= A_5^3 = 60$ Numărul funcţiilor neinjective $= 125 - 60 = 65$	2p 1p
5.	$B \in d_1 \Rightarrow B\left(x_B, x_B+1\right); C \in d_2 \Rightarrow C\left(x_C, 2x_C\right);$	1p
	$B^{'}$ - mijlocul lui $\left[AC\right]; B^{'} \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{B^{'}} = \frac{0+x_C}{2} \\ x_{B^{'}} + 1 = \frac{-1+2x_C}{2} \end{cases}$	1p
	$\Rightarrow x_C = 3 \Rightarrow C\left(3,6\right)$	1p
	$C^{'}$ - mijlocul lui $\left[AB\right]; C^{'} \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_{C^{'}} = \frac{0+x_B}{2} \\ 2x_{C^{'}} = \frac{-1+2x_B+1}{2} \end{cases}$	1p
	$\Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow B\left(0,1\right)$	1p
6.	$\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$	1p
	$\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$	1p
	$\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$	1p
	$\mathrm{arcctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$	1p
	$S = \pi$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$XA = XX^n =$	2p
	$= X^{n+1} = X^n X = AX$	3p
b)	$XA = AX \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	1p
	$\Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$	1p
	$X^n = A \Rightarrow a^n = 1;\ b^n = 2;\ c^n = 3$	1p
	n impar $\Rightarrow a = 1, b = \sqrt[n]{2}, c = \sqrt[n]{3} \Rightarrow \mathrm{cardG_n} = 1$	1p
	n par $\Rightarrow a = \pm 1, b = \pm\sqrt[n]{2}, c = \pm\sqrt[n]{3} \Rightarrow \mathrm{cardG_n} = 8$	1p

c)	n,m impare $\Rightarrow p=n\cdot m$ impar $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt[n]{2}&0\\0&0&\sqrt[n]{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt[m]{2}&0\\0&0&\sqrt[m]{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt[nm]{2}&0\\0&0&\sqrt[nm]{3}\end{pmatrix}$ În celelalte cazuri $\Rightarrow p=n\cdot m$ par	2p 3p
2. a)	$f(x)=(x-1)^2c(x)+ax+b;\ a,b\in\mathbb{R},\ f(x),c(x)$ funcţiile polinomiale asociate $f'(x)=2(x-1)c(x)+(x-1)^2c'(x)+a$ $f'(x)=2012x^{2011}-1003x^{1002}+1$ $x=1\Rightarrow\begin{cases}a+b=f(1)\\a=f'(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\a=1010\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1010\\b=-1008\end{cases}$ $r=1010x-1008$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	Din relaţiile lui Viette $\Rightarrow\begin{cases}s_{2011}=-1\\s_{2012}=1\end{cases}$ $\Rightarrow s=\dfrac{s_{2011}}{s_{2012}}=-1$	2p 3p
c)	$h=X^{2012}-X^{1003}+1$ $X^2-X+1=(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Dacă $\varepsilon\in\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}\Rightarrow\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ şi $\varepsilon^3=-1$ $h(\varepsilon)=\varepsilon^{2012}-\varepsilon^{1003}+1=\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ $\left.\begin{matrix}h\vdots(X-\varepsilon)\\\Rightarrow\varepsilon\in\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}\\\varepsilon_1\neq\varepsilon_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow h\vdots(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)=X^2-X+1$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	g derivabilã pe $\mathbb{R}$ şi $g'(x)=-2xe^{-x^2}\Rightarrow g''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$ $g''(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & +\infty \\ \hline g''(x) & + + + + + & + & 0 & - - - - & 0 & + + + + + + + & \end{array}$ $\Rightarrow f$ strict convexă pe $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict concavă pe $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict convexă pe $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$	1p 1p 2p 1p

b)	$g^{(n)}(x)=e^{-x^2}\cdot P_n(x)$, unde $P_n(x)$ este o funcţie polinomială de grad n	2p
	Demonstrarea propoziţiei prin inducţie	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{e^{x^2}}=0$	1p
c)	Fie $h(x)=f(x)-g(x)$, h continuă pe $[0,\infty)$, derivabilă pe $(0,\infty)$	2p
	$\lvert f(x)\rvert\le e^{-x^2}\ (\forall)x\ge 0\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0\\ h(0)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\exists)c\in(0,\infty)$ a.î. $h^{'}(c)=0$	2p
	$\Leftrightarrow(\exists)c\in(0,\infty)$ a.î. $f^{'}(c)=-2c\cdot e^{-c^2}$	1p
2. a)	$g(x)\ge 0(x)\in[0,1]\Rightarrow A=\int\limits_0^1 g(x)dx=$	2p
	$=\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\|_0^1=$	2p
	$=\frac{e-1}{2}$	1p
b)	Fie F o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F^{'}(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$	1p
	$L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(\cos x)-F(0)}{F(\text{ctg}x)-F(0)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$	1p
	$\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F^{'}(\cos x)\cdot(\cos x)^{'}}{F^{'}(\text{ctg}x)\cdot(\text{ctg}x)^{'}}=$	1p
	$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)\cdot(-\sin x)}{f(\text{ctg}x)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}=$	1p
	$=1$	1p
c)	$2\sqrt{e}\le h(x)\le 1+e,(\forall)x\in[-1,0]$	3p
	$\Rightarrow 2\sqrt{e}\le\int\limits_{-1}^{0}h(x)dx\le 1+e$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lg 10^6 = 6, \sqrt{10^6} = 10^3, \sqrt[3]{10^6} = 100$ $\lg 10^6 + \sqrt{10^6} + \sqrt[3]{10^6} = 1106$	3p 2p
2.	$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x \in \{5, -2\}$ $Gr_f \cap Ox = \{A(-2,0), (5,0)\}$	2p 3p
3.	$C.E. x > 0, \log_{27}^2 x^3 = (3\log_{27} x)^2$ $not \log_{27} x = t \Rightarrow 9t^2 + 9t - 4 = 0 \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$ $\log_{27} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N}$ $\log_{27} x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27^{-4}} \Rightarrow x = 3^{-4} \notin \mathbb{N}$	1p 2p 1p 1p
4.	$T_{k+1} = C_9^k (3x)^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \Rightarrow x^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = x^0$ $x^{9-k-\frac{1}{2}k} = x^0$ $k = 6 \Rightarrow T_{6+1} = C_9^6 3^3 = 2268$	2p 2p 1p
5.	$A(2,0), B(4,2), C(6,-4)$ $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = 4$ $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \frac{-2}{3}$	1p 2p 2p

6.	$6\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\to\sin 6<0$ $7\in\left(0,\frac{\pi}{2},\right)\to\sin 7>0$ $\sin 6<\sin 7$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ f(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $f(-1)+f(1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	2p 3p
b)	$f(2x)=\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $x=\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
c)	$f(x)\cdot f(x)=\begin{pmatrix}x^2 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$ $(f(x))^n=\begin{pmatrix}x^n & 0\\ 0 & x^n\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}^*$ $f(2)+\dots+(f(2))^{2014}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}2^{2014} & 0\\ 0 & 2^{2014}\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}2+..+2^{2014} & 0\\ 0 & 2+..+2^{2014}\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}2^{2015}-2 & 0\\ 0 & 2^{2015}-2\end{pmatrix}$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	elemente inversabile $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$ $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7}\cdot\hat{8}=\hat{8}$	2p 3p
b)	$\hat{1}+\hat{2}+\dots+\hat{9}=\hat{0}$ $\hat{1}+\hat{2}+\dots+\widehat{2014}=\hat{1}+\hat{2}+\dots+\hat{7}=\hat{1}$	2p 3p

c)	$\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{0}\,\vert(\ )\cdot\hat{2}\\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{6}x+\hat{4}y=\hat{0}\\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1}\end{cases}\Rightarrow$ $\widehat{10}x+\hat{9}y=\hat{1}\Rightarrow x=\hat{1}$ $y=\hat{3}, S=\left\{\left(\hat{1},\hat{3}\right)\right\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$(x^{2014})'=2014x^{2013}$ $(2014^x)'=2014^x\ln 2014$ $f'(x)=2014x^{2013}+2014^x\ln 2014$	2p 2p 1p
b)	$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=0, y_0=1-\ln 2014$ $f'(1)=\ln 2014$ $\ln 2014x-y+1-\ln 2014=0$	1p 1p 1p 2p
c)	$f''(x)=2014\cdot 2013x^{2012}+2014^x\ln^2 2014$ $x^{2012}\geq 0, 2014^x>0$ $f''(x)>0\Rightarrow fconv.pe\mathbb{R}$	2p 1p 2p
2. a)	$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx+\int_2^4\frac{1}{x+2}dx=$ $=\left(\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert x+2\rvert\vert\right)_2^4=$ $=\ln 4-\ln 2+\ln 6-\ln 4=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$	2p 2p 1p
b)	$Fprim.f\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in[1,\infty)$ $F''(x)=f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}<0$ $F''(x)<0\Rightarrow Fconc.pe[1,\infty)$	2p 2p 1p

c)	$V=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)^2dx=$ $\pi\left(\int_1^2 x^{-2}dx+\int_1^2(x+2)^{-2}dx+2\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}dx\right)=$ $\pi\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Big\|_1^2+\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\Big\|_1^2+2\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2-1}(x+1)'dx\right)=$ $\pi\left(1-2^{-1}+3^{-1}-4^{-1}+2\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{(x+1)-1}{(x+1)+1}\right\|\Big\|_1^2\right)=\pi\left(\frac{7}{12}+\ln\frac{3}{2}\right)$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{-2i}{3-i}=\frac{-2i(3+i)}{10}=\frac{2-6i}{10}$ $\overline{\frac{-2i}{3-i}}=\overline{\frac{2-6i}{10}}=\frac{2+6i}{10}$	3p 2p
2.	$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right),a=1,b=0$ ec. axei de simetrie $x=\frac{-b}{2a}$ $x=0$	2p 2p 1p

3.	$C.E. x\in[3,5]$ $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=2\big\|(\ )^2 \Rightarrow x-3+5-x+2\sqrt{(x-3)(5-x)}=4$ $\sqrt{(x-3)(5-x)}=1\big\|(\ )^2 \Rightarrow -x^2+8x-16=0$ $x=4\in[3,5]$	2p 2p 1p
4.	$x-\text{pret initial}, x-10\%x=\frac{9}{10}x, \text{pret dupa pima reducere}$ $\frac{9}{10}x-10\%\frac{9}{10}x=\frac{81}{100}x, \text{pret final}$ $\frac{81}{100}x=8100\Rightarrow x=10000$	2p 2p 1p
5.	$\frac{MN}{\sin P}=\frac{NP}{\sin M}=2R$ $\frac{3}{1/2}=\frac{NP}{\sqrt{2}/2}=2R$ $NP=3\sqrt{2}, R=3$	2p 2p 1p
6.	$MN^2=40$ $NP^2=40$ $MN=NP\Rightarrow \Delta MNPis$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(-1.1)$, $A_2(-2,2)$ A_1A_2: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_{A_1} & y_{A_1} & 1\\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1\end{vmatrix}=0$ A_1A_2: $x=-y$	:2p 2p 1p
b)	$A_{AA2A3}=\frac{1}{2}\|\Delta\|, \Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1\\ x_{A_3} & y_{A_3} & 1\end{vmatrix}, A_2(-2,2), A_3(-3,3)$ $A_{AA2A3}=\frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$O(0,0)$, $A_n(-n,n)$, $A_{n+1}(-n-1,n+1)$	1p

	$\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{A_{n+1}} & y_{A_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} = 0$ Deci O, A_n, A_{n+1} coliniare	2p 2p
2. a)	$2014 \circ (-2014)=2014^{2014-2014}=$ $=2014^0=1$	5p
b)	$x^2 \circ 2x = 2014^{x^2+2x}$ $2014^{x^2+2x} = 2014^{-1}$ $x^2 + 2x = -1$ $(x+1)^2=0$ $x = -1$	3p 2p
c)	$x \circ y \circ z = 2014^{2014^{x+y}+z}$ $2014^{2014^{x+y}+z} = 2014^{z+2014}$ $2014^{x+y} + z = z + 2014, x + y = 1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{(2x-1)}{(x^2-2x+1)}\right)' = \frac{(2x-1)'(x^2-2x+1)-(2x-1)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2} =$ $\frac{2(x-1)^2-2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(2x-2-4x+2)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$	3p 2p

b)	$f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3}$ $f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=0$ $f'(x)\geq 0, x\in[0,1), f'(x)<0, x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ $x=1\min, f(1)=-1\Rightarrow f(x)\geq -1$	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty\Rightarrow x=1\ as.vert.la\ \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0\ as.oriz.la\ \pm\infty$ Fct admite as. verticală, as. orizontală și nu are as oblică	2p 2p 1p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$ $f(x)=-1$ $fcont.\Rightarrow fad.prim.$	1p 1p 1p 2p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x-1)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2+2x-1)\,dx=$ $=(x^2-x)\Big\rvert_{-1}^{0}+(x^3+x^2-x)\Big\rvert_{0}^{1}=$ $-2+1=-1$	2p 2p 1p
c)	$\int_{a}^{2} f(x)dx=\int_{a}^{2}(3x^2+2x-1)dx=x^3+x^2-x\Big\rvert_{a}^{2}$ $10-a^3-a^2+a=9$ $a^3+a^2-a-1=0$ $a=1, a=-1, a\geq 0\Rightarrow a=1$	2p 1p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{-}}\, x-3, x, x+1 \Rightarrow x^2=(x-3)(x+1)$ $2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$	3p 2p
2.	$x+1+\sqrt{x-3}=x+1, x\in[3,\infty)$ $\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow x=3\in[3,\infty)$	3p 2p
3.	$(f\circ f)(x)=f(f(x))=3(3x-2)-2=9x-8$ $(f\circ f)(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow 9x-8-(3x-2)=0$ $x=1$	2p 2p 1p
4.	nr dreptelor=C_{10}^2 $\frac{10!}{2!\,(10-2)!}=45$	2p 3p
5.	$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Rightarrow m_{AB}=2 \Rightarrow m_{mediat.}=-\frac{1}{2}$ $Mmij.[AB] \Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{5}{2},4\right)$ $ec.mediat: y-y_M=m_{mediat.}(x-x_M) \Rightarrow 2x+4y-21=0$	1p 2p 2p
6.	$4\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 4<0$ $5\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \Rightarrow \cos 5>0$ $\cos 4<\cos 5$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(n)=\begin{pmatrix} e^{\ln n} & \ln e \\ \ln 1 & \ln e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A(3)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}(4)=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A(3)A(4)=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow tr\left(A(3)A(4)\right)=13$	3p 2p
b)	$A(3)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3(3)=\begin{pmatrix} 27 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A^3(3)=27$	3p 2p
c)	$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3(1)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^n(1)=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$ Etapa de verificare $n=1, A^1(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Etapa de demonstratie$A^{n+1}(1)=\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{n+1}(1)=A^n(1)A(1)=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{2014}(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
2. a)	$g=0 \Rightarrow x^2+\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$ $x=\hat{3}$ $x=\hat{4}$	1p 2p 2p
b)	$g \mid f \Rightarrow f=g\cdot c \Rightarrow f(\hat{3})=\hat{0}, f(\hat{4})=\hat{0}$ $\hat{3}^4=\hat{1}, \hat{4}^4=1$ $\hat{1}+a=\hat{0} \Rightarrow a=\hat{4}$	2p 2p 1p
c)	$f=x^4+\hat{1}$ $\hat{a}^4\in\left\{\hat{0},\hat{1}\right\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5[x]$ $f(\hat{a})\in\left\{\hat{1},\hat{2}\right\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5[x]$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\frac{x+3}{x-3}\right)'=\frac{x-3-x-3}{(x-3)^2}=\frac{-6}{(x-3)^2}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{-6}{9}$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-3}\right)^x=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{6}\cdot\frac{6}{x-3}x}=e^6$	3p 2p
c)	$f'(x)=\frac{-6}{(x-3)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\Rightarrow f$strict descrescatoare pe $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1,\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}f(x)=-\infty,\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}f(x)=\infty$ Daca $m=1$ecuatia nu are solutii;daca $m\in(-\infty,1)$ ecuatia are o solutie $x_0\in(-\infty,3)$; daca $m\in(1,\infty)$ecuatia are o solutie $x_0\in(3,\infty)$	1p 2p 2p
2. a)	$I_n=\int_e^{e^2}e^{\ln x^n}\ln xdx=\int_e^{e^2}\mathrm{x}^n\ln xdx$ $I_1=\int_e^{e^2}\mathrm{x}\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{x}^2}{2}\frac{1}{x}dx=$ $e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\|_e^{e^2}=\frac{3e^4-e^2}{4}$	2p 2p 1p
b)	$I_n=\int_e^{e^2}\mathrm{x}^n\ln xdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big\|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{x}^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx=$ $\frac{2e^{2n+2}-e^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big\|_e^{e^2}=$ $\frac{(n+1)\left(2e^{2n+2}-e^{n+1}\right)-\left(e^{2n+2}-e^{n+1}\right)}{(n+1)^2}=\frac{(2n+1)e^{2n+2}-ne^{n+1}}{(n+1)^2}$	1p 1p 1p 2p
c)	$I_0=e^2,I_1=\frac{3e^4-e^2}{4},I_2=\frac{5e^6-2e^3}{9}$ $5e^2e^2+20e^2\frac{3e^4-e^2}{4}-6e^3=27\frac{5e^6-2e^3}{9}$ $5e^4+15e^6-5e^4-6e^3=15e^6-6e^3$	3p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Brabeceanu Silvia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Scriem media geometrică a celor trei numere $x^2+3x=\sqrt{2\cdot 8}$	1p
	$x^2+3x-4=0$	1p
	Rezolvarea ecuaţiei $\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-4$	3p
2.	Vârful parabolei $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$	1p
	Condiţia $\frac{-\Delta}{4a}=3m+1$	1p
	$24m=15\Rightarrow m=\frac{5}{8}$	2p
	Finalizare $V\left(\frac{3}{4},\frac{23}{8}\right)$	1p
3.	Ecuaţia $x^2+9=5x+15\Rightarrow x^2-5x-6=0$	1p
	Soluţiile $x_1=6,\ x_2=-1$	2p
	Verificare	2p
4.	$\overline{ab}$ - impar $\Rightarrow b\in\{1,7\}$	1p
	Pentru fiecare *b* impar sunt trei variante de alegere a lui *a* $\Rightarrow 2\cdot 3=6$ variante	2p
	Pentru $b=1\Rightarrow 21,\ 41,\ 71$	1p
	Pentru $b=7\Rightarrow 17,\ 27,\ 47$	1p

5.	$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{-3}{-1}=\frac{a-2}{4}$ Rezolvarea ecuaţiei cu soluţia $a=14$	2p 3p
6.	$2\cos x=\sqrt{3}$ $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Soluţia $x=\frac{\pi}{6}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$ $\det(A(1))=2-1=1$	2p 3p
b)	$A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}1-m & 3 & 1-m\\ m & m & m\\ -m-m^2 & 3m & m-m^2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1-m & 3 & 1-m\\ m & m & m\\ -m-m^2 & 3m & m-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow m=1$	3p 2p
c)	$A(1)+A(2)+\cdots A(10)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 10 & 0 & 0\\ 10 & 2 & 10\end{pmatrix}$ $A(1)+A(2)+\cdots A(10)=\begin{pmatrix}10 & 10 & 10\\ \frac{(1+10)10}{2} & 0 & 0\\ \frac{(1+10)10}{2} & 20 & \frac{(1+10)10}{2}\end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$3*4=24-18-24+21=3$ $(3*4)*(-3)=3*(-3)=3$	2p 3p

b)	$x*y=2xy-6x-6y+21=2xy-6x-6y+18+3$ $x*y=2xy-6x-6y+18+3=2x(y-3)-6(y-3)+3$ $x*y=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$	2p 2p 1p
c)	$x*x=2(x-3)^2+3$ $(x*x)*x=4(x-3)^3+3$ $4(x-3)^3+3=7\Rightarrow(x-3)^3=1\Rightarrow x=4$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'=\frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2}$ $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in(1,\infty)$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(2)=-1$ $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$	2p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei : $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $y_0=f(2)=3$ şi $f'(2)=-1$ tg: $x+y-5=0$	1p 2p 2p
2. a)	f este o primitivă a lui $g\Leftrightarrow f'(x)=g(x),\ \forall x\in(0,\infty)$ $f'(x)=(2\ln x-3x)'=\frac{2-3x}{x}=g(x)$	2p 3p
b)	$\int f(x)dx=\int(2\ln x-3x)dx=2\int\ln xdx-3\int xdx$ $\int\ln xdx=x\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx=x\cdot\ln x-x$	1p 2p

	$\int f(x)dx=\frac{4x\cdot\ln x-4x-3x^2}{2}+c$	2p
c)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx-3\int_1^e dx$ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\ln^2 x\Big\|_1^e-\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\left(\ln^2 e-\ln^2 1\right)=\frac{1}{2}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Brabeceanu Silvia

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\frac{3-2i}{1+i}+\frac{2+3i}{2-i}=\frac{5-25i+2+16i}{10}$ $z=\frac{7}{10}-\frac{9}{10}i \Rightarrow \overline{z}=\frac{7}{10}+\frac{9}{10}i$	3p 2p
2.	$f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=\frac{2\left(2^8-1\right)}{2-1}+\frac{(1+8)8}{2}$ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=512+34=546$	3p 2p
3.	Baza subunitară $\Rightarrow 7+5x<x^2+1$ $x^2-5x-6>0$	1p 1p 3p

	$x\in(-\infty,-1)\cup(6,\infty)$ şi $x\in\left[\frac{-5}{7},\infty\right)\Rightarrow x\in(6,\infty)$	
4.	Pentru $n\in\{1,4,5,6,7\}$ inegalitatea este verificată Probabilitatea $=\frac{cazuri\ favorabile}{cazuri\ posibile}=\frac{5}{7}$	4p 1p
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ $2\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+4\vec{j}$	2p 2p 1p
6.	$\sin 75^0+\cos 75^0-a=\sin 75^0-\sin 15^0+\cos 75^0+\cos 15^0$ $\sin 75^0-\sin 15^0=2\sin 30^0\cos 45^0$ $\cos 75^0+\cos 15^0=2\cos 45^0\cos 30^0$ $\sin 75^0+\cos 75^0-a=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}=O_3$	5p
b)	$A^n=O_3,\ n\geq 2$ $M=2\cdot A+2^2\cdot A^2+\cdots+2^{2014}\cdot A^{2014}=2A=2\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$X(m)\cdot X(n)=(mA+I_3)(nA+I_3)=mA+nA+I_3=(m+n)A+I_3=X(m+n)$ $X(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(X(m))\neq 0$ $\det(X(m))=m\begin{vmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{vmatrix}+I_3=\begin{vmatrix}m+1&-3m&2m\\m&-3m+1&2m\\m&-3m&2m+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+1&-3m&1\\m&-3m+1&1\\m&-3m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+1&-3m&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=1$	1p 1p 3p
2.	$f(1)=-a+3$	2p

a)	$f(-1)=-a-5$	2p
	$f(1)-f(-1)=-a+3+a+5=8$	1p
b)	$f(-1)=3$	1p
	$f(1)=-a+3$	1p
	$f(1)-f(-1)=8\Rightarrow 3-a-3=8\Rightarrow a=-8$	2p
	$f(1)=-a+3\Rightarrow f(1)=11\Rightarrow$ restul este 11	1p
c)	Relațiile lui Viete	2p
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=a^2-6$	2p
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=10\Rightarrow a^2-6=10\Rightarrow a=\pm 4$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x=0$ asimptotă verticală spre $+\infty$	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\infty\Rightarrow\nexists$ asimptotă orizontală	2p
	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow\nexists$ asimptotă oblică	2p
b)	Derivata de ordin I - $F'(x)$	1p
	Derivata de ordin II - $F''(x)$	2p
	Prin identificare din $F''(x)=f(x)\Rightarrow a=\frac{2}{3},\ b=-2$	2p
c)	$f'(x)=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$	1p
	$f''(x)=\frac{-x-3}{4x^2\sqrt{x}}$	1p
	$x^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt{x}-1\Rightarrow 4\sqrt{x}=3x+1\Rightarrow x_1=1,\ x_2=\frac{1}{9}$	3p

2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = 1 - \ln 2$ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]\Big\|_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$	2p 3p
b)	$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1}dx$ $I_{n+1} + I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$	3p 2p
c)	$nI_n = n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x^n}{x+1}dx = n\left[\frac{x^n}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\Big\|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2}dx\right]$ $nI_n = n\cdot\frac{1}{2n} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$	4p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Brabeceanu Silvia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2} = 3-\sqrt{7}$ $\sqrt{16+6\sqrt{7}} = \sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)^2} = 3+\sqrt{7}$	2p 2p

	$n=\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{16+6\sqrt{7}}=3-\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=6\in\mathbb{N}$	1p
2.	$f\left(g\left(1\right)\right)=7$	2p
	$g\left(f\left(1\right)\right)=1$	2p
	$f\left(g\left(1\right)\right)-g\left(f\left(1\right)\right)=7-1=6$	1p
3.	$2^{2x-1}+2^{2x-3}-2\cdot2^{2x-5}=\frac{2^{2x}}{2}+\frac{2^{2x}}{8}-2\cdot\frac{2^{2x}}{32}$	3p
	$\frac{9\cdot2^{2x}}{16}=9\Rightarrow2^{2x}=16\Rightarrow x=2$	2p
4.	x – preţul mărfii	1p
	$\frac{16}{100}\cdot x=256$	2p
	$x=1600$	2p
5.	$d_1:y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow m_1=\frac{3}{2}$	1p
	$d_2:y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\Rightarrow m_2=-\frac{2}{3}$	1p
	$\cos\alpha=\frac{1+m_1\cdot m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}=\frac{0}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}=0$	2p
	$d_1\perp d_2$	1p
6.	$M=\frac{\pi}{6},\ N=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\triangle MNP$ - dreptunghic în P	3p
	MN – ipotenuza $\Rightarrow R=\frac{MN}{2}=2$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det\left(M\right)=\begin{vmatrix}m & 2 & -3\\ m & m-3 & 3m-1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2m^2+2m-11$	5p

b)	ABC este triunghi $\Leftrightarrow A,B,C$ nu sunt coliniare $-2m^2+2m-11=0$ $\Delta=-84 \Rightarrow m\notin\mathbb{R} \Rightarrow \det(ABC)\neq 0$ finalizare	1p 2p 1p 1p
c)	Pentru $m=4 \Rightarrow \det(ABC)=-35$ $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\det(ABC)\rvert=\frac{1}{2}\cdot\lvert-35\rvert=\frac{35}{2}$	3p 2p
2. a)	$f=X^4-14X^2+48=X^4-14X^2+49-1$ $X^4-14X^2+49=\left(X^2-7\right)^2$ $f=\left(X^2-7\right)^2-1$	2p 2p 1p
b)	$f(x)=0 \Rightarrow \left(x^2-7\right)^2-1=\left(x^2-8\right)\left(x^2-6\right)=0$ $\left(x^2-8\right)=0 \Rightarrow x_1=2\sqrt{2},\ x_2=-2\sqrt{2}$ nu sunt numere întregi $\left(x^2-6\right)=0 \Rightarrow x_3=\sqrt{6},\ x_4=-\sqrt{6}$ nu sunt numere întregi	1p 2p 2p
c)	Rădăcinile reale ale polinomului sunt cele găsite la pct. b). $f=\left(X-2\sqrt{2}\right)\left(X+2\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{6}\right)\left(X+\sqrt{6}\right)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+3}}\cdot\left(x^2+x+3\right)'$ $f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+3}=\infty \Rightarrow \nexists$ asimptotă orizontală	1p 1p

	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)=\frac{1}{2}$ $y=x+\frac{1}{2}$ asimptotă oblică	2p 1p
c)	$f'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$ Tabloul de valori Intervale de monotonie $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$ și $\left(\frac{-1}{2},\infty\right)$	1p 2p 2p
2. a)	$\int\limits_0^1 (x+3)f(x)dx=\int\limits_0^1\left[(x+3)^2+1\right]dx$ $\int\limits_0^1\left[(x+3)^2+1\right]dx=\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+10x\Big\vert_0^1$ $\int\limits_0^1 (x+3)f(x)dx=\frac{40}{3}$	2p 2p 1p
b)	F este o primitivă a lui $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in(-3,\infty)$ $F'(x)=\left[\frac{x^2}{2}+3x+\ln(x+3)\right]'$ $F'(x)=x+3+\frac{1}{x+3}=f(x)$	1p 2p 2p
c)	$\int\limits_{-2}^{0}F(x)\cdot f(x)dx=\int\limits_{-2}^{0}F(x)\cdot F'(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big\vert_{-2}^{0}$ $\int\limits_{-2}^{0}F(x)\cdot f(x)dx=\frac{\ln^2 x}{2}-8$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Re z = 4, Im z = 3i, deci z = 4+ 3i. Conjugatul numărului complex $\overline{z}$ = 4 - 3i.	3p 2p
2.	$f(x)=g(x) \leftrightarrow x^2+3x-8 = -x-3$. Obţine ecuaţia $x^2+4x-5=0$, calculează $\Delta = 4^2-4(-5)=36$ şi obţine $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. Calculează $f(1) = -4$, $f(-5) = 2$ şi obţine $G_f \cap G_g = \{A, B\}$, A(1, -4), B(-5, 2).	1p 2p 2p
3.	$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = (x+1)^3$. $2x+1 = x^3+3x^2+3x+1 \leftrightarrow x^3+3x^2+x=0$ $x(x^2+3x+1)=0$ de unde $x_1=0$, $x_{2,3} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2-4ac = 5$, $x_{2,3} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, deci $S = \{0, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\}$.	1p 2p 2p
4.	Numărul numerelor naturale de două cifre este 90. Numerele divizibile cu 6 din mulţimea numerelor naturale de două cifre sunt: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96; numărul lor este 15. p = $\frac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \vec{i} - 2\vec{j}$. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2(\vec{i} - 2\vec{j}) = 5\vec{i} - 2\vec{j}$.	2p 3p

6.	Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$	2p
	$AB=c=8,\ sin\ C=sin\ \frac{\pi}{3}$.	1p
	După înlocuiri şi calcule $\frac{c}{\sin C}=2R$, $\frac{8}{\sin\frac{\pi}{3}}=8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_0=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}$, $A^t_2=\begin{pmatrix}1&6&7\\3&3&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}$	2p
	$A_0+A^t_2=\begin{pmatrix}2&7&5\\3&4&-1\\3&-1&-6\end{pmatrix}$, Tr $(A_0+A^t_2)=2+4-6=0$	3p
b)	$CA_0=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&6\\-3&0&1\\2&3&-6\end{pmatrix}$. Primele două puncte se acordă pentru calculul elementelor primei linii iar celelalte trei puncte se acordă pentru calculul elementelor celorlalte două linii.	2p 3p
c)	$A_p-B_p=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2p&1&0\\p+3&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot1&1&0\\1+3&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot2&1&0\\2+3&1&1\end{pmatrix}+....+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot n&1&0\\n+3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\2\sum_{p=1}^{n}p&n&0\\\sum_{p=1}^{n}p+3n&n&n\end{pmatrix}$	2p
	cu $\sum_{p=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}$, deci $\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\n(n+1)&n&0\\n(n+7)/2&n&n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}0&1&-2\\n+1&1&0\\(n+7)/2&1&1\end{pmatrix}$	2p

2. a)	$f(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + a$ $f(-2) = -8 + 4a - 2 + a = 5a - 10.$ $f(-2) = 5(a - 2).$	1p 3p 1p
b)	Pentru $a = 2$, plinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + 2$. După gruparea termenilor și scoterea factorului comun, f devine: $(X^2 + 1)(X + 2)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2} = \pm i, x_3 = -2 \Rightarrow S = \{-2, \pm i\}$.	1p 2p 2p
c)	Dacă x_k este o rădăcină a polinomului f, $x_k^3 = -a x_k^2 - x_k - a$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3a.$ Din relaţiile lui Viète $(x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 1,\ x_1 x_2 x_3 = -a)$ $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = a^2 - 2.$ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(a^2 - 2) + a - 3a = -a^3.$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Formula: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$. $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 4})' = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$. $f'(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.	2p 2p 1p
b)	Ecuaţia asimptotei oblice este $y = mx + n$. $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = \pm 1 \Rightarrow n_1 = \lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 + 4} - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0,$ $n_2 = \lim_{x \to -\infty}(\sqrt{x^2 + 4} + x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = 0.$ $y = \pm x$ la $\pm \infty$.	1p 3p 1p
c)	$f“ > 0 \Rightarrow f$ convexă, $f“ < 0 \Rightarrow f$ concavă.	1p

	Formula $(\frac{f}{g})^{'} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Din subpunctul a) $\Rightarrow f''(x) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+4}})' = \frac{\sqrt{x^2+4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$. După calcule se obține $f''(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} > 0 \Rightarrow f$ convexă.	1p 3p
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\|_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{6}$.	2p 2p 1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$. $I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$. $I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\ I_{n-1},\ n \in \mathbf{N}^*$ Pentru $n = 2$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2\ I_1$, din punctul a) $I_1 = \int f_1(x)dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.	1p 1p 1p 2p
c)	$L_n = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim_{x\to\infty}[-x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt] = n\ L_{n-1}$. $L_n = n\ L_{n-1} = n(n-1)\ L_{n-2} = n(n-1)(n-2)\ L_{n-3} = ... = n!\ L_1$ $L_1 = \lim_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\|_0^x) = \lim_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x}+1) = 1 \Rightarrow L_n = n!$	2p 1p 2p

Varianta 2

Prof: Ciocănaru Viorica

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(x+1)^2 = 3\cdot 12 \leftrightarrow x+1 = \pm 6 \Rightarrow x = 5$ deoarece termenii progresiei sunt pozitivi. Termenii sunt 3, 6, 12 și suma lor este 21.	3p 2p
2.	Coordonatele vârfului $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. $\frac{-b}{2a} = 1 \leftrightarrow -b = 2a$, $\frac{-\Delta}{4a} = 2 \leftrightarrow -b^2 + 4ac = 8a$ de unde după înlocuiri $\Rightarrow -b^2 + 2b = 0 \leftrightarrow b(2-b) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$, $b_2 = 2$. Se reţine $b = 2$ deoarece b este nenul și atunci $a = -1$.	1p 3p 1p
3.	$2^{\sqrt{x^2-4}} = 2^{x-2} \leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = x-2$. Condiţii de existenţă: $x^2 - 4 \geq 0$, $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. $(\sqrt{x^2-4})^2 = (x-2)^2 \leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \leftrightarrow 4x = 8 \leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$.	1p 2p 2p
4.	$\overline{ab}$ par $\Rightarrow b \in \{4, 6\}$. Numerele care îndeplinesc condiţia: 44, 46, 54, 56, 64, 66, 74, 76.	2p 3p
5.	Distanţa de la punctul M la dreapta d se calculează după relaţia: $\frac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $y = \frac{-4x+1}{7} \leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0$, ecuaţia dreptei. $d(M, d) = \frac{\lvert 4(-2) + 7(-1) - 1\rvert}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{\lvert -16\rvert}{\sqrt{65}} = \frac{16\sqrt{65}}{65}$.	2p 1p 2p
6.	Formula: $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$. $E(a) = \sin a - \sin 5a = 2\sin\frac{a-5a}{2}\cos\frac{a+5a}{2} = 2\sin(-2a)\cos 3a = -2\sin 2a\cos 3a$.	1p 2p

	$E(\frac{\pi}{6}) = -2\sin 2\frac{\pi}{6}\cos 3\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$ $A^2 = 3p\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = 3pA.$	2p 2p 1p
b)	$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} p-1 & p & p \\ p & p-1 & p \\ p & p & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p-1)$ $\det(A + I_3) = \begin{vmatrix} p+1 & p & p \\ p & p+1 & p \\ p & p & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p+1)$ $\det(A - I_3) = 3p - 1$, $\det(A + I_3) = 3p + 1 \Rightarrow \det(A - I_3)\det(A + I_3) = (3p)^2 - 1$	3p 2p
c)	$n = 1 \Rightarrow A = (3p)^{1-1} \cdot A$ Prin inducţie, se presupune $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot 3p \cdot A = (3p)^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall p \in \mathbf{R}$. Pentru $n = 2014$, $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ se obţine $A^{2014} = (3p)^{2013} \cdot A$	1p 2p 2p
2. a)	$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + m = -2\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} + m = m - (4+\sqrt{2}).$ $f(-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m - (4+\sqrt{2}) = 0 \leftrightarrow m = 4+\sqrt{2}.$	2p 3p
b)	$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 5 - 1 = 0 \leftrightarrow (x^4 - 1) - 5x^2(x - 1) + 5(x - 1) = 0 \leftrightarrow$ $(x - 1)[(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5] = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ şi $(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5 = 0 \leftrightarrow (x + 1)[x^2 + 1 - 5(x - 1)] = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ şi $x^2 - 5x - 6 = 0$	2p 2p

	Deci $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \frac{5\pm1}{2} \Rightarrow S = \{\pm1, 2, 3\}$.	1p
c)	$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (1^3 - 2\cdot1^2 - 1 + m) + [(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + m] + (2^3 - 2\cdot2^2 - 2 + m)\ (3^3 - 2\cdot3^2 - 3 + m)$. $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (m - 2) + (m - 2) + (m - 2) + ((m + 6) = 4m$.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\frac{x+3}{x-3} > 0 \Rightarrow x\in(-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-3, 3]$. $f(-x) = \ln\frac{-x+3}{-x-3} = \ln\frac{x-3}{x+3} = -\ln\frac{x+3}{x-3} = -f(x)$, $\forall x\in \mathbf{R} - [-3, 3]$ deci f impară. $\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \ln\frac{x+3}{x-3} = +\infty \Rightarrow x = 3$ ecuaţia asimptotei verticale la dreapta lui 3 şi analog $x = -3$ ecuaţia asimptotei verticale la stânga lui – 3.	2p 2p 1p
b)	Formulele $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ și $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. $f'(x) = (\ln\frac{x+3}{x-3})' = \frac{(\frac{x+3}{x-3})'}{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2}\cdot\frac{x-3}{x+3} = \frac{-6}{x^2-9}$.	2p 3p
c)	$L = \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+3}{x-3}$, $\lim_{x\to\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+3}{x-3} = 0 \Rightarrow$ nedeterminarea $+\infty\,0$ $L = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+3}{x-3}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow$ nedeterminarea $\frac{0}{0}$ Cu regula lui l'Hospital și folosind rezultatul de la b) $\Rightarrow$ $L = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln\frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-6}{x^2-9}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2-9} = 6$.	2p 1p 2p

2. a)	$\int f^2(x)dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos 2x+1}{2}dx$. $\int \frac{\cos 2x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx = \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2}+x)$ + c.	2p 3p
b)	$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{g(x)}{f(x)})^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{2^{tgx}}{\cos x})^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4^{tgx}}{\cos^2 x}dx$. Cu schimbarea de variabilă $tg\, x = t$, $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow t \in [0, 1]$, $V = \pi\int_0^1 4^t dt = \pi\frac{4^t}{\ln 4}\Big\|_0^1 = \pi\frac{4-1}{\ln 4} = \frac{3\pi}{\ln 4}$.	2p 1p 2p
c)	$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^n xdx$. Integrând prin părţi se obţine: $nI_n = cos^{n-1} x \sin x \Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + (n-1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2} xdx$, $I_{n-2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2} xdx \Rightarrow$ $nI_n - (n-1)I_{n-2} = cos^{n-1} x \sin x\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}\frac{1}{2} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} =$ $\frac{(\sqrt{2})^n - (\sqrt{3})^{n-1}}{2^n}$.	1p 2p 2p

---

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{5}{2})^{2-3x} \leftrightarrow (\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{2}{5})^{-(2-3x)} \leftrightarrow 4x-3 < -(2-3x)$ deoarece $\frac{2}{5} < 1$. $4x-3 < -(2-3x) \leftrightarrow 4x-3 < 3x-2 \leftrightarrow x < 1 \Rightarrow S = (-\infty, 1)$.	3p 2p
2.	Condiţii de existenţă: $x+1 > 0$, $\log_{0,5}(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1, x+1 < 1 \Rightarrow (-1, 0)$ **(1)** $\log_2(\log_{0,5}(x+1)) > 1 \leftrightarrow \log_{0,5}(x+1) > 2 \leftrightarrow x+1 < (0,5)^2 \leftrightarrow x < -\frac{3}{4}$ **(2)** Din (1) şi (2) $\Rightarrow x \in (-1, -\frac{3}{4})$.	2p 2p 1p
3.	$z^3 + 64 = (z+4)(z^2 - 4z + 16)$. $(z+4)(z^2-4z+16) = 0 \Rightarrow z_1 = -4$, $z^2 - 4z + 16 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 16 = -48$, $z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 2(1 \pm i\sqrt{3}) \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. $S = \{-4, 2(1 \pm i\sqrt{3})\}$	1p 3p 1p
4.	$\div C_n^3, A_n^2, A_{n+1}^2 \leftrightarrow 2A_n^2 = C_n^3 + A_{n+1}^2$, $n \geq 3$ Formule $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $0 \leq k \leq n \Rightarrow 2\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ După simplificări, eliminarea numitorului şi reducerea termenilor asemenea ecuaţia devine $n^2 - 9n + 20 = 0$ cu soluţiile $n_1 = 4$, $n_2 = 5$.	2p 3p
5.	$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ $4 = \frac{3+(-2)+x_3}{3} \leftrightarrow x_3 = 11$, $3 = \frac{6+(-3)+y_3}{3} \leftrightarrow y_3 = 6 \Rightarrow$ $C(11, 6)$	1p 3p 1p
6.	Din formula fundamentală $\Rightarrow \cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a}$, $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$,	2p 2p

	$\cos b=-\sqrt{1-\sin^2 b}$, $b\in(\pi,\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \cos b=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$ $\Rightarrow \cos a-\cos b=-\frac{4}{5}-(-\frac{3}{5})=-\frac{1}{5}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dezvoltnd după prima linie se obţine: $d_1=(a+b)[(a+b)^2-a^2]-b^2(a+b-a)+ab(a-a-b)$ În urma calculelor algebrice se obţine: $d_1=2ab(a+b)$.	3p 2p
b)	Cu una din regulile de calcul ale determinantului de ordinul 3 se obţine: $d_2(0)=\begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}$ $d_2(0)=48+64+135-(96+40+108)=3$.	2p 3p
c)	$d_2(x)=\begin{vmatrix}1+4x&9&x+4\\2+5x&8&2x+5\\3+6x&8&3x+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&9&x+4\\2&8&2x+5\\3&8&3x+6\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}4&9&x+4\\5&8&2x+5\\6&8&3x+6\end{vmatrix}=d_2^1(x)+x\,d_2^2(x)$ **(1)** $d_2^1(x)=\begin{vmatrix}1&9&x+4\\2&8&2x+5\\3&8&3x+6\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&9&1\\2&8&2\\3&8&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}$ **(2)** $d_2^2(x)=\begin{vmatrix}4&9&x+4\\5&8&2x+5\\6&8&3x+6\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}4&9&1\\5&8&2\\6&8&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&9&4\\5&8&5\\6&8&6\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}4&9&1\\5&8&2\\6&8&3\end{vmatrix}$ **(3)** Din **(1)**+ **(2)**+ **(3)** $\Rightarrow \begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix}4&9&1\\5&8&2\\6&8&3\end{vmatrix}=0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1&9&4\\2&8&5\\3&8&6\end{vmatrix}=0 \Rightarrow x^2=1$ $x\in\{\pm1\}$.	1p 2p 2p
2. a)	$A_x, A_y\in M \Rightarrow A_x\cdot A_y\in M$ $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\x+y&1\end{pmatrix}=A_{x+y}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.	1p 3p

	$A_x \cdot A_x = A_{x+y} \in M$	1p
b)	$\forall\ A_x, A_y, A_z \in M,\ (A_x \cdot A_y)\cdot A_z = A_x \cdot (A_y \cdot A_z)$	3p
	$(A_x \cdot A_y)\cdot A_z = A_{x+y}\cdot A_z = A_{x+y+z}$, $A_x \cdot (A_y \cdot A_z) = A_x \cdot A_{y+z} = A_{x+y+z}$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.	
	$A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \ldots \cdot A_{n^2} = A_{1+4+\ldots n^2}$, $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $A_{1+4+\ldots n^2} = A_{55} \Rightarrow$	2p
	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55 \leftrightarrow n(n+1)(2n+1) = 5\cdot 6\cdot 11 \Rightarrow n = 5$	
c)	$\forall\ A_x \in M,\ \exists\ A_{x'} \in M \quad A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e$ **(1)** unde e este elementul neutru	2p
	$\exists\ A_e \in M,\ A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x \quad \forall\ A_x \in M$, din punctul a) $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0$ **(2)**	
	În relaţia **(1)** înlocuind e cu valoarea din relaţia **(2)** $\Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \leftrightarrow x' + x = 0 \leftrightarrow x' = -x$	2p
	$A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $\quad y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	2p
	$f'(x) = \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)' = \frac{(2x-2)(x^2-3x+2)-(x^2-2x+3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$.	2p
	$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.	1p
b)	Pentru D , $f(x) \in [-1, 1]$.	1p
	$-1 \leq \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \leq 1$ **(1)** şi $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \geq -1$ **(2)** .	2p
	(1) $\leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$.	
	(2) $\leftrightarrow \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$	2p

	$g(-1) = arcsin\ f(-1) = arcsin\ 1 = \frac{\pi}{2}$.	
c)	L= $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)} = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}}$. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = 1$, $\lim_{x\to\infty}(3x-\frac{\pi}{2}) = +\infty$. Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}]^{\frac{(3x-\frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2-3x+2}} =$ $e^3 \Rightarrow \text{L} = e^3$.	1p 2p 2p
2. a)	$\int\frac{f_n(x)}{x^n}dx = \int\frac{x^n\ln x}{x^n}dx = \int\ln x dx$. Integrând prin părţi, se obţine: $\int\ln x dx = x\ ln\ x - \int dx = x\ ln\ x - x + \text{c}$.	2p 3p
b)	$\int_e^{e^2}\frac{1}{f_1(x)}dx = \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$. Se folosește schimbarea de variabilă $ln\ x = t$, $(ln\ x)' = 1/x$, $x\in[e, e^2] \Rightarrow t\in[1, 2]$. $\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_1^2\frac{1}{t}dt = ln\ t\Big\vert_1^2 = ln\ 2 - ln\ 1 = ln\ 2$	1p 2p 2p
c)	$V = \pi\int_1^2 g^2(x)dx = \pi\int_1^2(\frac{f_n(x)}{x^n})^2dx = \pi\int_1^2\ln^2 xdx$. Integrând prin părţi, se obţine: $V = \pi\int_1^2\ln^2 xdx = \pi(x\ ln^2\ x\Big\vert_1^2 - 2\int_1^2\ln xdx) = \pi(x\ ln^2\ x - 2x\ ln\ x$ $+2x)\Big\vert_1^2$. S-a folosit rezultatul de la subpunctul a). $V = \pi(2\ ln^2\ 2 - 4\ ln\ 2 + 4) - \pi(ln^2\ 1 - 2\ ln\ 1 + 2) = 2\pi(\ ln^2\ 2 - 2\ ln\ 2 + 2)$.	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Numerele care îndeplinesc condiţia din enunţ sunt în progresie aritmetică având $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $a_1 = 14$, $r = 7$, $a_n = 98$ deci $98 = 14 + (n-1)7 \leftrightarrow n = 13$. Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, $S_{13} = \frac{(14+98)13}{2} = 728$.	3p 2p
2.	$G_f \cap Ox = \{A, B\}$, $A \neq B$ dacă $\Delta > 0$. Când $m = 1$ funcţia este de gradul I. $\Delta = b^2 - 4ac = (3(m+1))^2 - 8(m^2 - 1) = (m+1)(9m + 9 - 8m + 8) = (m+1)(m+17)$ $\Delta = 0$ conduce la soluţiile $m_1 = -1$, $m_2 = -17$. Pentru $\Delta > 0$, $m \in (-\infty, -17) \cup (-1, +\infty) - \{1\}$.	1p 2p 2p
3.	$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = (x+1)^3$. $2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x = 0$ $x(x^2 + 3x + 1) = 0$ de unde $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac = 5$, $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, deci $S = \{0, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.	1p 2p 2p
4.	Formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$, $C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!}$, $6 \le n$. $\frac{n!}{3!(n-3)!} > \frac{n!}{6!(n-6)!}$ de unde se obţine după simplificări $\frac{1}{(n-3)(n-4)(n-5)} > \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}$, $n < 9$ de unde $S = \{6, 7, 8\}$.	2p 3p

5.	Condiţia de coliniaritate a doi vectori $\vec{t} = a\vec{i} + b\vec{j}$ şi $\vec{r} = c\vec{i} + d\vec{j}$ este $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	2p
	$\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{3} = \frac{a+2}{a-3} \leftrightarrow 2(a-3) = 3(a+2) \leftrightarrow a = -12$.	3p
6.	Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	2p
	$AB = c = 8$, $\sin C = \sin\frac{\pi}{3}$.	1p
	După înlocuiri şi calcule $\frac{c}{\sin C} = 2R$, $\frac{8}{\sin\frac{\pi}{3}} = 8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $p = 0$ $\det A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A_0$ este inversabilă.	2p
	Pentru $p = 1$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_0 + A_1^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$	2p
	$\mathrm{Tr}\,(A_0 + A_1^t) = 2 + 3 - 6 = -1$.	1p
b)	Din punctul a) $\det A_0 = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* matricea complemenţilor algebrici ai lui A_0^t, $A_0^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	3p
	Complemenţii algebrici sunt $A_{11} = -1$, $A_{12} = 1$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = -6$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 2$, $A_{33} = 1$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	2p

c)	$\sum_{p=1}^{n} A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 1-2 \\ 3\cdot 1 & 1+1 & -2 \\ 2\cdot 1+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2+1 & 2-2 \\ 3\cdot 2 & 2+1 & -2 \\ 2\cdot 2+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} +\ldots + \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n-2 \\ 3n & n+1 & -2 \\ 2n+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\sum_{p=1}^{n} A_p = \begin{pmatrix} n & \sum_{p=1}^{n} p+n & \sum_{p=1}^{n} p-2n \\ 3\sum_{p=1}^{n} p & \sum_{p=1}^{n} p+n & -2n \\ 2\sum_{p=1}^{n} p+3n & n & -3n \end{pmatrix}$ cu $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} A_p = n\begin{pmatrix} 1 & \frac{n+3}{2} & \frac{n-3}{2} \\ \frac{3(n+1)}{2} & \frac{n+3}{2} & -2 \\ n+4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$f(1)= 1 + a + b + 3 + 1$ **(1)**, $f(-1)= 1 - a + b – 3 + 1$ **(2)**. Din relaţiile **(1)** , **(2)**, $f(1) = 7$, $f(-1) = 5$ ⇒ $a + b = 2$, $-a + b = 6$ deci $a = -2$, $b = 4$. $f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.	1p 3p 1p
b)	$g\|f$ dacă r din relaţia $f = gq + r$ este zero unde $f, g, q, r\in \mathbf{R}[X]$, grad $q = 2$, grad $r =1$ $X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 + X +1)q + r$ ⇒restul este $(4 – b)x +1 - b + a = 0$ deci $a =3$, $b = 4$ ⇒ $f = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$	3p 2p
c)	$x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}$, $f(1\pm\sqrt{2}) = (1\pm\sqrt{2})^4 + a(1\pm\sqrt{2})^3 + b(1\pm\sqrt{2})^2 + 3(1\pm\sqrt{2}) + 1 = 0$, f divizibil cu $(X- x_1)(X- x_2)$ ⇒ $(X- x_1)(X- x_2) = (X- 1-\sqrt{2})(X- 1+\sqrt{2}) = X^2 -2X -1$, $X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)q$ ⇒ $(5a + 2b +15)x + 2a + b + 6 = 0$ ⇒ $a = -3$, $b =0$ ⇒ $X^4 - 3X^3 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - X – 1)$ ⇒ $x_{3,4} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	2p

	$f'(x) = (\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})' = \frac{(2x-2)(x^2-3x+2)-(x^2-2x+3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$.	2p
	$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.	1p
b)	Pentru D , $f(x) \in [-1, 1]$.	1p
	$-1 \leq \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \leq 1$ **(1)** şi $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \geq -1$ **(2)** .	1p
	(1) $\leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$.	1p
	(2) $\leftrightarrow \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$	2p
	$g(-1) = arcsin\ f(-1) = arcsin\ 1 = \frac{\pi}{2}$.	
c)	L= $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)} = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}}$.	1p
	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = 1$, $\lim_{x\to\infty}(3x-\frac{\pi}{2}) = +\infty$.	1p
	Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.	1p
	$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}]^{\frac{(3x-\frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2-3x+2}} =$ $e^3 \Rightarrow L = e^3$.	2p
2. a)	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ f, g derivabile cu derivatele continue **(1)**	2p
	$\int_1^e xf(x)dx = \int_1^e x\ln x dx = (\frac{x^2}{2}\ln x\|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx) = (\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4})\|_1^e$.	2p
	$\int_1^e xf(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$.	1p

b)	$V = \pi \int_1^{e^2} g^2(x)dx$, $g(x) = f(x) = \ln x$ $V = \pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx$, cu relaţia **(1)** din punctul a) $\Rightarrow$ $V = \pi [\, x(\ln x)^2 \,\|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \ln x dx \,] \Rightarrow$ $V = \pi [\, x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)\,]\|_1^{e^2} = e - 2$.	1p 1p 1p 2p
c)	cu relaţia **(1)** din punctul a) $\Rightarrow$ $I_n = t(\ln t)^n \|_1^x - n\int_1^x (\ln t)^{n-1} dt$. $I_{n-1} = \int_1^x (\ln t)^{n-1} dt \Rightarrow I_n = x(\ln x)^n - n\, I_{n-1}$. Inducţie după $n \Rightarrow I_1 = x\ln x - I_0 = x\ln x - x + 1$ $I_{n+1} = x(\ln x)^{n+1} - (n+1)\, I_n$, $x > 1$, $n \in$ **N***.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z \in$ **C**, $z = a + bi$, modulul lui $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, conjugatul lui z $\bar{z} = a + bi$. $z = \frac{3+2i}{1-3i} = \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-3+11i}{10}$ de unde $\|z\| = \sqrt{(-\frac{3}{10})^2 + (\frac{11}{10})^2} = \frac{\sqrt{130}}{10}$.	3p 2p

2.	$f(f(x)) = 2f(x) - 1$ $f(f(x)) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$, S = $f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots f(f(12)) = 4(1 + 2 + 3 + \ldots 12) - 3\cdot 12$ S = $4\cdot 6\cdot 13 - 3\cdot 12 = 276$ sau $f(f(1)) = 1$, $f(f(2)) = 5$, $f(f(3)) = 9, \ldots f(f(12)) = 45$ deci termeni în progresie aritmetică.	1p 2p 2p
3.	Condiţii pentru radicalii de ordin par $x \ge 0$, $x \le 3$ $(\sqrt{x} + \sqrt{3-x})^2 = 2^2$ de unde rezultă $3 + 2\sqrt{x(3-x)} = 4 \leftrightarrow 2\sqrt{x(3-x)} = 1$ $x(3 - x) = \frac{1}{4} \leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-1}}{2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2} \in [0, 3]$ de unde $S = \{\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}\}$.	1p 2p 2p
4.	Mulţimea numerelor naturale impare de două cifre A = {11, 13, ... 99}, card A = 45. Mulţimea multiplilor lui 3 B = {15, 21, 27, … 99}, card B = 15 Probabilitatea ca numărul impar de două cifre să fie divizibil cu 3, $p = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.	2p 3p
5.	Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ şi are panta cunoscută $y - y_0 = m(x - x_0)$, dreptele paralele au pantele egale. $m_d = \frac{2}{3}$ atunci ecuaţia paralelei la d care trece prin A(2, 1) este $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \leftrightarrow$ $2x - 3y - 1 = 0$.	2p 3p
6.	Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos a < 0$, $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{4}{5}$. $ctg\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}$ $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, $\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1$, $\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1}{10}$ de unde $ctg\frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5\cdot 2}} = \frac{1}{3}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$d=\begin{vmatrix}1&m&2\\1&2m-1&3\\1&m&m-3\end{vmatrix}\overset{l_3-l_1}{=}\begin{vmatrix}1&m&2\\1&2m-1&3\\0&0&m-5\end{vmatrix}=(m-5)(m-1)$. $d=0\Rightarrow\ m=5,\ m=1$. $d\neq 0\ \ \forall m\in\mathbf{R}-\{1,5\}$.	2p 2p 1p
b)	Pentru $m=2$ $\begin{cases}x+2y+2z=1\\x+3y+3z=1\\x+2y-z=1\end{cases}$ $d=-3$ cu metoda lui Cramer $D_x=-3$, $D_y=0$, $D_x=0$, sistem compatibil determinat cu S = {(1, 0, 0)}. Pentru $m=5$ $\begin{cases}x+5y+2z=1\\x+9y+3z=1\\x+5y+2z=9\end{cases}$ sistem incompatibil.	3p 2p
c)	Pentru $m=1$ $\begin{cases}x+y+2z=1\\x+y+3z=1\\x+y-2z=1\end{cases}$ Din punctul a) $d=0$ $\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$, necunoscute principale y şi z, necunoscută secundară $x=\lambda$ $\Rightarrow\begin{cases}y+2z=1-\lambda\\y+3z=1-\lambda\end{cases}$ $D_y=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1-\lambda&3\end{vmatrix}=1-\lambda$, $D_z=\begin{vmatrix}1&1-\lambda\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$, $y=\frac{D_y}{\Delta_p}$, $z=\frac{D_z}{\Delta_p}$, sistemul este simplu nedeterminat cu S = $\{(\lambda,1-\lambda,0)\}$, $\lambda\in\mathbf{R}$.	1p 2p 2p
2. a)	$A_x, A_y\in M\Rightarrow A_x\cdot A_y\in M$ $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\x+y&1\end{pmatrix}=A_{x+y}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$. $A_x\cdot A_x=A_{x+y}\in M$	1p 3p 1p
b)	$\forall\ A_x, A_y, A_z\in M$, $(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_x\cdot(A_y\cdot A_z)$ $(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_{x+y}\cdot A_z=A_{x+y+z}$, $A_x\cdot(A_y\cdot A_z)=A_x\cdot A_{y+z}=A_{x+y+z}$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$. $A_1\cdot A_4\cdot A_9\ldots\cdot A_{n^2}=A_{1+4+\ldots n^2}$, $\sum_{p=1}^{n}p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $A_{1+4+\ldots n^2}=A_{55}\Rightarrow$	3p 2p

	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55 \leftrightarrow n(n+1)(2n+1) = 5\cdot 6\cdot 11 \Rightarrow n = 5$	
c)	$\forall\ A_x \in M,\ \exists\ A_{x'} \in M \quad A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e$ **(1)** unde e este elementul neutru $\exists\ A_e \in M,\ A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x \quad \forall\ A_x \in M$, din punctul a) $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0$ **(2)** În relaţia **(1)** înlocuind e cu valoarea din relaţia **(2)** $\Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \leftrightarrow x' + x = 0 \leftrightarrow x' = -x$ $A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-1, 1]$ $f(-x) = \ln\frac{-x+1}{-x-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} = -\ln\frac{x+1}{x-1} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R} - [-1, 1]$ deci f impară $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0$ ecuaţia asimptotei orizontale la $\pm\infty$. $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln\frac{x+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ ecuaţia asimptotei verticale la dreapta lui 1 şi analog $x = -1$ ecuaţia asimptotei verticale la stânga lui – 1.	2p 2p 1p
b)	$S_n = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = \ln\frac{2+1}{2-1} + \ln\frac{3+1}{3-1} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n-1}$. $S_n = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-2} + \ln\frac{n+1}{n-1}$. $\sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln \prod_{k=1}^{n} a_k$, $a_k > 0$. $S_n = \ln\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\ldots\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \ln\frac{n(n+1)}{2}$, $\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.	1p 1p 1p 2p
c)	L= $\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln\frac{x+1}{x-1}$, $\lim_{x\to\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow$ nedeterminarea $+\infty\, 0$	1p 1p

	L = $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}$ ⇒ nedeterminarea $\frac{0}{0}$	1p
	Formulele $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.	2p
	Cu regula lui l'Hopital ⇒ L = $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln\frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = 2.$	
2. a)	$f(x) = \sin x$, $g(x) = \int_0^x f(t^2)dt = \int_0^x \sin t^2 dt$, g continuă ⇒ $g(x) = G(t)\,\vert_0^x = G(x) - G(0)$.	2p
	L = $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{G(x)-G(0)}{x^3}$, nedeterminarea $\frac{0}{0}$ ⇒ L = $\lim_{x\to0}\frac{(G(x)-G(0))'}{(x^3)'}$	2p
	L = $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to0}\frac{2x\cos x^2}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x^2}{3} = \frac{1}{3}$	1p
b)	$h(x) = e^{f(x)}\cos x = e^{\sin x}\cos x$	1p
	$\int h(x)dx = \int e^{\sin x}\cos x dx$ **(1)**	1p
	$(\sin x)' = \cos x$ deci $\sin x = t$ **(2)**	1p
	Din **(1)** şi **(2)** ⇒ $\int e^t dt = e^t + c$ ⇒ $\int h(x)dx = e^{\sin x} + c$	2p
c)	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = [-x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x)]\,\vert_0^{\frac{\pi}{2}}$ ⇒ $I_2 = \pi - 2$.	2p
	Cu integrare prin părţi ⇒ $I_n = -x^n\cos x\,\vert_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x dx$ ⇒	1p
	$I_n = -x^n\cos x\,\vert_0^{\frac{\pi}{2}} + n[x^{n-1}\sin x\,\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx]$, $I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx$ ⇒	2p

	$I_n = n[(\frac{\pi}{2})^{n-1} - (n-1)\ I_{n-2}],\ n \in \mathbf{N}^*$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1 + i)^{12} = ((1 + i)^2)^6 = (2i)^6 = -2^6,\ i^2 = -1,\ i^{2012} = (i^4)^{503} = 1.$ $\Rightarrow z = \frac{(1+i)^{12}}{i^{2012}} = -2^6 \in \mathbf{Z},\ \bar{z} = z = -2^6\ \Rightarrow z, \bar{z} \in \mathbf{Z}.$	3p 2p
2.	$S = x_1 + x_2 = -a,\ P = x_1 x_2 = b,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2).$ $x_1^3 + x_2^3 = (-a)^3 - 3b(-a) = -a^3 + 3ab \in \mathbf{Z},\ \forall a, b \in \mathbf{Z}.$	1p 2p 2p
3.	$2^{2x+1} + 2^{x-1} = 132 \leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + \frac{2^x}{2} = 132.$ $2^x = t, t > 0\quad 2 \cdot t^2 + \frac{t}{2} = 132 \leftrightarrow 4 \cdot t^2 + t - 264 = 0 \leftrightarrow t^2 + \frac{t}{4} - 66 = 0 \leftrightarrow (t-8)(t + \frac{33}{4}) = 0.$ $\Rightarrow t_1 = 8,\ t_2 = -\frac{33}{4} < 0\ \Rightarrow 2^x = 8 \leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}.$	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ T_{k+1} = \frac{165}{2^{11}},\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k + 1 = 9,\ n = 11,\ b = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$	2p

	$C_{11}^{8}\, a^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^8=\frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow \frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3}a^3\frac{1}{2^8\cdot2^4}=\frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow a^3=2$, $a\in\mathbf{R} \Rightarrow a\in\{\sqrt[3]{2}\}$.	3p
5.	$d\perp AB \Rightarrow m_d\cdot m_{AB}=-1$, d: $y-y_M=m_d(x-x_M)$ $d\cap AB=\{M\}$, $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{2}{5}$, $\Rightarrow m_d=\frac{5}{2}$, $M\left(\frac{1}{2},3\right)$ $\Rightarrow d$: $y-3=\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d$: $10x-4y+7=0$.	2p 3p
6.	$tg^2a=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}-1 \Rightarrow \cos^2 a=\frac{1}{tg^2a+1}$. $\cos 2a=2\cos^2 a-1$. $\Rightarrow \cos^2 a=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2a=2\cdot\frac{1}{3}-1 \leftrightarrow \cos 2a=-\frac{1}{3}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p\\ p & p & p\\ p & p & p\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}3p^2&3p^2&3p^2\\3p^2&3p^2&3p^2\\3p^2&3p^2&3p^2\end{pmatrix}$ $A^2=3p\begin{pmatrix}p&p&p\\p&p&p\\p&p&p\end{pmatrix}=3pA$.	2p 2p 1p
b)	$\det(A-I_3)=\begin{vmatrix}p-1&p&p\\p&p-1&p\\p&p&p-1\end{vmatrix}=(p-1)^3+2p^3-3p^2(p-1)$ $\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}p+1&p&p\\p&p+1&p\\p&p&p+1\end{vmatrix}=(p+1)^3+2p^3-3p^2(p+1)$	3p

	det $(A - I_3) = 3p - 1$, det $(A + I_3) = 3p + 1 \Rightarrow$ det $(A - I_3)$ det $(A + I_3) = (3p)^2 - 1$	2p
c)	$n = 1 \Rightarrow A = (3p)^{1-1} \cdot A$ Prin inducţie, se presupune $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot 3p \cdot A = (3p)^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall p \in \mathbf{R}$. Pentru $n = 2012$, $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ se obţine $A^{2012} = (3p)^{2011} \cdot A$	1p 2p 2p
2. a)	$\exists e \in \mathbf{Z}, x \circ e = e \circ x = x, \ \forall x \in \mathbf{Z}$. Pentru $n = 2$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$ şi $x \circ e = xe - 2(x + e) + 6$ de unde $xe - 2(x + e) + 6 = x \leftrightarrow e(x - 2) = 3x - 6 \leftrightarrow e = 3$. S = {3} $\forall x \in \mathbf{Z}$.	1p 3p 1p
b)	$\begin{cases} x * y = x + y - n \\ x \circ y = xy - n(x+y) + n(n+1) \end{cases}$ devine $\begin{cases} x + y - n = 1 \\ xy - n(x+y) + n(n+1) = n \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y = n + 1 \\ xy = n \end{cases}$ **(1)**. Sistemul **(1)** este simetric deci S = $\{(1, n), (n, 1)\}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.	3p 2p
c)	$\forall x, y \in \mathbf{Z}$ $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $f(x * y) = a(x + y - n) + b$, $f(x) + f(y) = a(x + y) + 2b \Rightarrow$ $- an = b$ **(1)**. $\forall x, y \in \mathbf{Z}$ $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $f(x \circ y) = a(xy - n(x + y) + n(n + 1)) + b$, $f(x) \cdot f(y) = (ax + b)(ay + b) \Rightarrow a = a^2$ **(2)**, $an(n + 1) + b = b^2$ **(3)**. Din **(1)**, **(2)** şi **(3)** $\Rightarrow a = 1, b = - n$ deci $f(x) = x - n$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(1) = \ln(3 - 2) = 0$, $h(1) = 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(3x-2)}{2x^2 + x - 3}$ este în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ Cu regula lui l'Hopital , $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{h'(x)}$, $f'(x) = (\ln(3x - 2))' = \frac{3}{3x-2}$, $h'(x) = (2x^2 + x - 3)' = 4x + 1$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{3}{3x-2}}{4x+1} = \frac{3}{5}$. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{3}{5}$.	2p 2p 1p

b)	Formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ şi $k(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$.	1p
	$D = (\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$.	1p
	$k'(x) = (\frac{\ln(3x-2)}{2x^2+x-3})' = \frac{(\ln(3x-2))'(2x^2+x-3)-(2x^2+x-3)'\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2}$	1p
	$k'(x) = \frac{\frac{3}{3x-2}(2x^2+x-3)-(4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2} = \frac{3(2x^2+x-3)-(3x-2)(4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2(3x-2)}$	2p
	domeniul de derivabilitate este $(\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$.	
c)	$g(x) = log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, $x > 1$.	1p
	Cu formula de la punctul b) $g'(x) = (\frac{\ln(x+1)}{\ln x})'$, $(ln\ x)' = \frac{1}{x}$ şi $(ln\ (x+1))' = \frac{1}{x+1}$.	1p
	$g'(x) = \frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$, numitorul este pozitiv, $xlnx$ este strict crescătoare pentru $x > 1$	1p
	iar $\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0$ deci g este descrescătoare pentru $x > 1$.	
	$g(x) = log_x(x+1) \Rightarrow g(5) = log_5 6$, $g(3) = log_3 4$, $g(5) < g(3)$ cu $3 < 5$.	2p
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\Big\vert_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{6}$.	1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$.	1p
	$I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$.	1p
	$I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\ I_{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$	1p

	Pentru $n = 2$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2\,I_1$, cu din punctul a) $I_1 = \int f_1(x)dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.	2p
c)	$L_n = \lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty}[-x^ne^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt] = n\,L_{n-1}$. $L_n = n\,L_{n-1} = n(n-1)\,L_{n-2} = n(n-1)(n-2)\,L_{n-3} = ... = n!\,L_1$ $L_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = \lim\limits_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\vert_0^x) = \lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x} + 1) = 1 \Rightarrow L_n = n!$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Cristea Maria

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2^{1005}}(1+i)^{2010}=\frac{1}{2^{1005}}[(1+i)^2]^{1005}=i^{1005}$ $i^{1005}=(i^2)^{502}\cdot i=(-1)^{502}\cdot i=i$	3p 2p
2.	Condiţii de existenţă: $x-2\geq 0$, $x-3\geq 0$, $3x-5\geq 0$ Domeniul de definiţie: $D=[3,\infty)$ $1+\sqrt{x-2}=\frac{\sqrt{x-3}+2+\sqrt{3x-5}}{2}$ $2\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-5}$ $4(x-2)=x-3+3x-5+2\sqrt{(x-2)(3x-5)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(3x-5)}=0$ $x-3=0\Rightarrow x=3\epsilon D$ sau $3x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}\notin D$ $S=\{3\}$.	1p 1p 1p 2p
3.	$4^x-2^x-12=0\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-12=0$ Notăm $2^x=a$ Ecuaţia devine: $a^2-a-12=0\Rightarrow a_1=4,\ a_2=-3$ $2^x=4\Leftrightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2$ $2^x=-3$ imposibil	1p 2p 2p

	$S=\{2\}$.	
4.	Mulţimea A are 7 elemente, deci numărul de submulţimi ale mulţimii A este: $C_7^0+C_7^1+\cdots+C_7^7=2^7=128$. Prin urmare mulţimea A posedă $128-C_7^0=127$ submulţimi nevide. Submulţimile care au toate elementele pare sunt submulţimi ale mulţimii $B=\{2,4,6\}$. Deoarece mulţimea B are 3 elemente , va avea $2^3-1=7$ submulţimi nevide. Probabilitatea cerută este $P=\frac{7}{127}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4$ şi $\vec{v}=8\vec{i}-(15-m)\vec{j}$ sunt perpendiculari dacă are loc relaţia: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ Prin urmare $(m-3)\cdot 8+4(m-15)=0$, adică $12m=84$ cu soluţia $m=7$.	2p 2p 1p
6.	Se observă că numerele 6, 8 şi 10 sunt pitagorice. $10^2=6^2+8^2$, deci triunghiul este dreptunghic. În acest caz lungimea razei cercului circumscris este egală cu jumatate din lungimea ipotenuzei, adică $R=\frac{10}{2}=5$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Legea de compoziţie “ $*$” este bine definită dacă $\forall x,y\in G \Rightarrow x*y\epsilon G$. $x,y\in G \Leftrightarrow x,y\in(1,2)\cup(2,\infty) \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$ are sens şi că $(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}>0$.Deci $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}>1$. Pentru a arăta că $x*y\neq 2$ presupunem contrariu. Din $x*y=2 \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}=1$, relaţie adevărată doar dacă $x-1=1$ sau $\ln\sqrt{y-1}=0$, de unde $x=2$ sau $y=2$. Deoarece $x,y\in(1,2)\cup(2,\infty)$, rezultă că presupunerea facută este falsă, deci $x*y\neq 2$. Prin urmare legea de compoziţie “ $*$” este bine definită.	2p 2p 1p

b)	Legea de compoziţie “ $*$”este comutativă dacă $x*y=y*x, \forall x\ , y \epsilon G=(1,2)\cup(2,\infty)$. Se observă că : $x*y-1=(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$, oricare ar fi $x,y\in G$. $y*x-1=(y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$ oricare ar fi $x,y\in G$. Pentru a demonstra comutativitatea logaritmăm expresiile de mai sus. $\ln(x*y-1)=\ln\sqrt{y-1}\ln(x-1)=\frac{1}{2}\ln(y-1)\ln(x-1)$, iar $\ln(y*x-1)=\ln\sqrt{x-1}\ln(y-1)=\frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1)$, ceea ce conduce la $x*y=y*x$, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$. Deci, legea de compoziţie “ $*$”este comutativă.	1p 1p 2p 1p
c)	Pentru a rezolva ecuaţia ecuaţia $x*e_1=2$, aflăm mai întâi elemtul neutru e_1. $\exists e_1$ astfel încât $x*e_1=e_1*x=x, \forall x\in G$. Întrucât legea “ $*$”este comutativă vom considera doar $x*e_1=x\Leftrightarrow$ $1+(x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}}=x\Leftrightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}}=x-1$, cum $x-1\neq1\Rightarrow\ln\sqrt{e_1-1}=1$ de unde $e_1=x^2+1\epsilon G$. $x*e_1-1=2\Leftrightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{e^2}}=2\Rightarrow x-1=2\Rightarrow x=3$.	1p 2p 2p
2. a)	Funcţia polinomială $f(x)=x^4-4x^2+9=(x^2+3)^2-10x^2=\left(x^2-\sqrt{10}x+3\right)\left(x^2+\sqrt{10}x+3\right)$ $f(x)=0\Rightarrow x^2-\sqrt{10}x+3=0$ cu soluţiile $x_{1,2}=\frac{\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$ şi $x^2+\sqrt{10}x+3=0$ cu soluţiile $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare $a=\frac{\sqrt{10}-i\sqrt{2}}{2}$ este una dintre soluţiile lui $f(x)\Rightarrow f(a)=0$.	1p 3p 1p
b)	Din punctul anterior se observă că funcţia $f(x)=0$ are soluţiile $x_{1,2}=\frac{\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$ şi $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$. Putem descompune $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, cu $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ \epsilon\mathbb{C}$ stabilite anterior. Deci polinomul f este reductibil peste $\mathbb{C}_{[x]}$.	2p

	Dar funţia $f(x)$ poate fi descompusă şi astfel $f(x) = x^4 - 4x^2 + 9 = (x^2+3)^2 - 10x^2 = \left(x^2 - \sqrt{10}x + 3\right)\left(x^2 + \sqrt{10}x + 3\right)$. Deoarece coeficienţii aparţin mulţimii $\mathbb{R}$ rezultă că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{R}_{[x]}$. Din cele stabilite anterior se observă cu uşurinţă că polinomul f nu este reductibil peste $\mathbb{Q}_{[x]}$.	2p 1p
c)	Notăm cu $S_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. a_1 soluţie a funcţiei $f(x) \Rightarrow a_1^4 - 4a_1^2 + 9 = 0$ a_2 soluţie a funcţiei $f(x) \Rightarrow a_2^4 - 4a_2^2 + 9 = 0$ a_3 soluţie a funcţiei $f(x) \Rightarrow a_3^4 - 4a_3^2 + 9 = 0$ a_4 soluţie a funcţiei $f(x) \Rightarrow a_4^4 - 4a_3^2 + 9 = 0$ Prin adunarea acestor relaţii se obţine: $(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) - 4\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + 36 = 0 \Leftrightarrow S_4 - 4S_2 + 36 = 0$ Deoarece $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a} = 8 \Rightarrow S_4 = -36 + 4\cdot 8 = -4$ Se deduce că $S_6 - 4S_4 + 36S_2 = 0 \Rightarrow S_6 = 4\cdot(-4) - 36\cdot 8 = -304$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Se verifică prin calcul. $f'(x) = [\ln(1+x) - x]' = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$ $g'(x) = \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'_{(x)} > 0, \forall x \in (-1,0)$ şi $f'(x) < 0, \forall x \in [0,\infty) \Rightarrow x = 0$ este punct de maxim, deci $f(0)$ este valoare maximă, prin urmare $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0, \forall \epsilon(-1,\infty)$ $g'(x) > 0$, $\forall x \in (-1,0)$ şi $g'(x) > 0$, $\forall x \in [0,\infty) \Rightarrow x = 0$ este punct de minim, deci $g(x) > 0$ este valoare minimă, prin urmare $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$, $\forall x \in (0,\infty)$.	2p 2p

	Deci $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x > 0$.	1p
c)	Din punctul anterior avem $\ln(1+x) - x < 0 < \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -x < -\ln(1+x) < -x + \frac{x^2}{2}$ $\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0$. Vom avea $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$ $\frac{3}{n^2} - \frac{3^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{3}{n^4}\right) < \frac{3}{n^2}$ .... $\frac{2n-1}{n^2} - \frac{(2n-1)^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{2n-1}{n^2}$ Adunând aceste inegalităţile de mai sus obţinem: $\frac{1}{n^2}(1+3+\dots+2n-1) - \frac{1}{2n^4}(1+3^2+\dots+(2n-1)^2) < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) +$ $+\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}(1+3+\dots+2n-1) \Leftrightarrow$ $1 - \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < 1$.Trecând la limită şi aplicând teorema cleştelui , obţinem $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) = 1$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{6n^3} = 0$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	Avem $f(1) = 1 + 1 + \dots + 1 =$ $=2003$.	3p 2p
b)	$F'_{(x)} = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)' = \left(F_{(t)}\Big\|_0^x\right)' = \left(F_{(x)} - F_{(0)}\right)' =$ $= f(x) - 0 = f(x)$.	3p 2p
c)	Pentru a calcula $\int_0^a g(x)\,dx$, ştiind că funcţia $g(x) = F^{-1}_{(x)}$ facem schimbarea de variabilă $g(x) = t \Rightarrow x = F_{(t)}$ şi $dx = f(t)\,dt$ Pentru $x = 0$ avem $F_{(t)} = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F_{(t)} = a = F_{(1)}$, adică $t = 1$, deoarece $F_{(x)} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2003}}{2003}$. Deci	2p 1p

	$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(t+t^2+t^3+\dots+t^{2003})\,\mathrm{d}t\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots+\frac{t^{2004}}{20}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2004}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Cristea Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+2i}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)$ $\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}=1$	3p 2p
2.	Tripletul $3x-1$, $x+3$, $9-x$ constituie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice dacă are loc relaţia: $x+3=\sqrt{(3x-1)(9-x)}$, Condiţii de existenţă: $(3x-1)(9-x)\geq 0$ $\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3};9\right]$ $(x+3)^2=(3x-1)(9-x)$, adică $4x^2-22x+18=0\Leftrightarrow 2x^2-11x+9=0$ cu soluţiile $x_1=\frac{9}{2}$ şi $x_2=1$, ambele aparţinând intervalului $\left[\frac{1}{3};9\right]$. $S=\left\{\frac{9}{2};1\right\}$.	1p 2p 1p
3.	$10^x+4^x-2\cdot 25^x=0\Leftrightarrow 2^x\cdot 5^x+(2^x)^2-2\cdot(5^x)^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]^2-2=0$, s-au împărțit ambii membrii ai ecuației cu $5^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ Notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$. Se obţine ecuaţia: $t^2+t-2=0$ cu soluţiile $t_1=-2$ şi $t_2=1$.	1p 2p

	Înlocuind $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0$ Ecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -2$ nu are soluție. Deci $S = \{0\}$.	2p
4.	Mulţimea A are 6 elemente, deci numărul de submulţimi nevide ale mulţimii A este: $2^6 - 1 = 63$. Dintre submulţimile nevide ale mulţimii A există $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - (C_6^0 + C_6^1 + C_6^2) = 42$ submulţimi care au cel puţin trei elemente. Probabilitatea cerută este: $P = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt coliniari dacă are loc relaţia: $\frac{m-3}{8} = \frac{4}{-(15-m)} \Leftrightarrow (m-3)(m-15) = 32 \Leftrightarrow m^2 - 18m + 13 = 0$ cu soluţiile $m_1 = 9 + 2\sqrt{17}$ şi $m_2 = 9 - 2\sqrt{17}$	2p 3p
6.	Raza cercului circumscris este $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$, unde a, b şi c sunt laturile triunghiului iar A aria acestuia. Din formula lui Heron $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+6}{2} = 9$, deci $A = \sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$. Prin urmare $R = \frac{5 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$x, y \in (-1, \infty) \Rightarrow x + 1 > 0$ şi $y + 1 > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) - 1 > -1 \Rightarrow$ $xTy = (x+1)(y+1) - 1 > -1$, adică $xTy \in G = (-1, \infty)$, $\forall x, y \in G$. Deci, legea de compoziţie "T " este corect definită. $x, y \in (1, \infty) \Rightarrow x - 1 > 0$ şi $y - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 > 1 \Rightarrow$ $x * y = (x-1)(y-1) + 1 > 1$, adică $x * y \in G' = (1, \infty)$, $\forall x, y \in G'$.	2p 2p

	Deci, legea de compoziţie “$*$” este corect definită.	1p
b)	$\exists e_1 \in G$ astfel încât $e_1 T x = x T e_1 = x$, $\forall x \in G$. Evident legea “T” este comutativă, deci pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_1 T x = x \Leftrightarrow (e_1 + 1)(x + 1) - 1 = x \Leftrightarrow$ $(x+1) \cdot e_1 = 0$, deoarece $x + 1 \neq 0 \Rightarrow e_1 = 0 \, \epsilon G$, deci 0 este element neutru. $\exists e_2 \in G'$ astfel încât $e_2 * x = x * e_2 = x$, $\forall x \in G'$.Evident legea „$*$” este comutativă, deci pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_2 * x = x \Leftrightarrow (e_2 - 1)(x - 1) + 1 = x \Leftrightarrow$ $(x-1)(e_2 - 2) = 0$, deoarece $x - 1 \neq 0 \Rightarrow e_2 = 2 \in G'$. Prin urmare $(e_1 T e_2) * (e_1 * e_2)$=$2 * 0 = 0$.	2p 2p 1p
c)	Funcţia $f(x)\colon G \to G'$ este izomorfism dacă : $a)$ $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$. $a)$ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci $f(x)$ este injectivă. $\forall y \in G'$, există cel puțin un element $x \in G$, astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x = y - 2$ (adevărat deoarece $\forall y > 1$, există cel puțin un $x = y - 2 > -1$ astfel încât $f(x) = y$) , deci $f(x)$ este surjectivă. Prin urmare, din cele stabilite anterior, rezultă că $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = xTy + 2 = xy + x + y + 2$, iar $f(x) * f(y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 =$ $=(x+2)(y+2) - (x+2) - (y+2) + 2 = xy + x + y + 2$, deducem că $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$, ceea ce arată că $f(x)$ este morfism de grupuri. Drept urmare, $f(x)$ este izomorfism de grupuri.	1p 1p 2p 1p
2. a)	Metoda 1. $1 - i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(x)$ se divide cu $x - 1 + i$, dar și $1 + i$ este rădăcină a funcţiei $f(x)$, deci $f(x)$ se divide cu $x - 1 - i$. Prin urmare $f(x)$ se divide cu $(x - 1 + i)(x - 1 - i)$=$x^2 - 2x + 2$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$=$(x^2 - 2x + 2)(x + 3)$+$(a + 4)x + b - 6$, și punând condiția $(a + 4)x + b - 6 = 0 \Rightarrow a = -4$ și $b = 6$.	1p 3p 1p

	Metoda 2. $1-i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(1-i)=0 \Leftrightarrow (-4-a)i+a+b-2=0 \Rightarrow$ $-4-a=0$ şi $a+b-2=0 \Rightarrow a=-4$ şi $b=6$.	
b)	Deoarece $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcţiei $f(x)$, rezultă că şi conjugata $1-\sqrt{2}$ este rădăcină a funcţiei $f(x)$. Pentru a afla a treia rădăcină este necesar sa determinăm valorile parametrilor a şi b. $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(1+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow (7+a)\sqrt{2}+10+a+b=0 \Rightarrow$ $7+a=0$ şi $10+a+b=0 \Rightarrow a=-7$ şi $b=-3$. Deducem că $f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})\cdot(x+3)=(x^2-2x-1)(x+3)$ rezultă din $f(x)=0$ că $x+3=0$, deci a treia rădăcină este -3.	1p 2p 2p
c)	Funcţia $f(x)$ are o rădăcină triplă $\Rightarrow f(x)=0$, $f'(x)=0$ şi $f''(x)=0$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+a=0 \Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \epsilon \mathbb{Q}$. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2+ax+b=0 \Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0 \Rightarrow b=\frac{1}{27} \epsilon \mathbb{Q}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_1(x)=(x\cdot e^x)'=e^x+xe^x$, $f_2(x)=(e^x+x\cdot e^x)'=e^x+e^x+x\cdot e^x=e^x(2+x)$ $f_2(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x+2)=0$, deoarece $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$	3p 2p
b)	Pentru a calcula limita cerută aflăm $f_n(x)$ şi $f_{n+1}(x)$. Obervăm că $f_1(x)=e^x(1+x)$ $f_2(x)=e^x(2+x)$....... Intuim că $f_n(x)=e^x(n+x)$ şi demonstrăm această relaţie prin inducţie. Fie $P_n : f_n(x)=e^x(n+x)$ Etapa de verificare. $P_{(1)}: f_1(x)=e^x(1+x)$, adevărat.	1p 2p

	Etapa de demonstrație.Presupunem adevărată propoziția $P_{(k)}: f_k(x) = e^x(k+x)$ şi demonstrăm adevărată propoziția $P_{k+1}: f_{k+1}(x) = e^x(k+1+x)$. Dar $f_{k+1}(x) = f_k'(x) = (e^x(k+x))' = e^x(k+1+x)$, ceea ce trebuia demonstrat. Prin urmare P_1 adevărată, $P_k \Rightarrow P_{k+1} \Rightarrow P_n$ este adevărată. Prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^x(n+1+x)}{e^x(n+x)} = 1$.	2p
c)	Studiem întâi existența asimptotei orizontale. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^x = [-\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$ (am folosit teorema lui l'Hospital). Deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f_0 către $-\infty$. Deoarece graficul funcţiei $f_0(x)$ are asimptotă orizontală nu mai are asimptotă oblică, prin urmare pe aceasta nu o mai studiem.	2p 2p 1p
2. a)	$f'(x) = (\ln(1+x) - x)' =$ $= \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$, $\forall x > -1$.	3p 2p
b)	$I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{2004+x^n}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^1 (\ln(2004+x^n))' \cdot x \,\mathrm{d}x =$ $\frac{1}{n} \ln(2004+x^n) \cdot x\vert_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(2004+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \ln \frac{2005}{2004} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(2004+x^n)\,\mathrm{d}x$.	2p 3p
c)	Se arată că $J_n = \frac{1}{n} x\ln(1+x^n)\vert_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$, deci $n \cdot J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$. Cum $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, $\forall x > 0$, rezultă că $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$ (s-a aplicat teorema cleștelui) și atunci $\lim\limits_{m\to\infty} nJ_n = \ln 2$.	1p 1p 1p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Cristea Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\ln\frac{n(n+1)}{1+2+3+\cdots+n}=\ln\frac{n(n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\ln\frac{n(n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}=\ln n(n+1)\cdot\frac{2}{n(n+1)}=\ln 2$	3p 2p
2.	Funcția $f(x)=mx^2-mx+2$ admite valoare minimă dacă $m>0$. Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{m^2-8m}{4m}=1\Leftrightarrow -m^2+8m=4m$ $-m^2+4m=m(-m+4)=0$ cu soluțiile $m_1=0$ și $m_2=4$ Deoarece $m\in\mathbb{R}^*$ doar $m=4$ se admite .	1p 2p 2p
3.	Ecuația $\log_3^2 x^2-\log_{\frac{1}{3}} x=5$ are sens pentru $x>0$. Ecuația este echivalentă cu $4\log_3^2 x-\log_{3^{-1}} x-5=0\Leftrightarrow(2\log_3 x)^2+\log_3 x-5=0$ Notând $\log_3^2 x=t$ se obține ecuația $4t^2+t-5=0$ cu soluțiile $t_1=-\frac{5}{4}$ și $t_2=1$ care conduc la ecuațiile $\log_3 x=1$ cu soluția $x=3$ și $\log_3 x=-\frac{5}{4}$ cu soluția $x=3^{-\frac{5}{4}}$, ambele numere sunt soluții ale ecuației inițiale deoarece sunt mai mare decât 0.	1p 2p 1p 1p
4.	Mulţimea A are 6 elemente, deci numărul de submulţimi nevide ale mulţimii A este: $2^6-1=63$. Dintre submulţimile nevide ale mulţimii A există $C_6^4=\frac{6!}{4!(6-2)!}=15$ submulţimi care au	2p 2p

	exact 4 elemente. Probabilitatea cerută este: $P=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$.	1p
5.	Vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+(m-3)\vec{j}$ și $\vec{u}=(m-8)\,\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{m-8}=\frac{m-3}{-3}$, relație echivalentă cu $m^2-11m+24=-6 \Leftrightarrow m^2-11m+30=0$ cu soluțiile $m_1=6$ și $m_2=5$.	2p 3p
6.	Din teorema sinusului avem relația : $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2\cdot R \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^0}=\frac{AB}{\sin 75^0}$.	1p
	$\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ iar $\sin 75^0=\sin 15^0=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	1p
	Deoarece, $\sin^2 15^0=\frac{1-\cos 30^0}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	
	Deci, $\frac{5}{\sin 45^0}=\frac{AB}{\sin 75^0} \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} \Rightarrow AB=5\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ cm.	2p
	Din $\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\cdot R \Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Legea “ $*$” este bine definită dacă $\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow x*y\epsilon\mathbb{R}$.	2p
	Dacă $x,y\in\mathbb{R}$ este evident că $3xy-6x-6y+14\epsilon\mathbb{R}$, deci $x*y\epsilon\mathbb{R}$, prin urmare legea “ $*$” este bine definită.	3p
b)	Legea “ $*$” se numeşte monoid comutativ dacă: $a)$ $\forall x,y\in\mathbb{R}\ x*y=y*x$. $b)$ $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\ (x*y)*z=x*(y*z)$. $c)$ $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $e*x=x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.	1p
	a) Se observă că: $x*y=3xy-6x-6y+14=3x(y-2)-6(x-2)+2=3(x-2)(y-2)+2$, prin urmare	1p

	$3(x-2)(y-2)+2$=$3(y-2)(z-2)+2$⇒$x*y=y*x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ deci legea " *" este comutativă. b) Deducem că $(x*y)*z=[3(x-2)(y-2)+2]*z$=$3^2(x-2)(y-2)(z-2)+2$ $\forall x$, y, $z\in\mathbb{R}$, iar $x*(y*z)=x*[3(y-2)(z-2)+2]$=$3^2(x-2)(y-2)(z-2)$+2, $\forall x$, y, $z\in\mathbb{R}$, prin urmare $(x*y)*z=x*(y*z)$⇒ legea " *" este asociativă. c) Deoarece legea " *" este comutativă prin urmare pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $3(e-2)(x-2)+2=x\Leftrightarrow 3(e-2)(x-2)-(x-2)=0\Leftrightarrow(x-2)(3e-6-1)=0$. Cum ultima egalitate trebuie să aibă loc oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $3e-7=0\Rightarrow e=\frac{7}{3}\in\mathbb{R}$. Deducem că $e=\frac{7}{3}$ este elementul neutru. Ca urmare a celor stabilite anterior, $(\mathbb{R},*)$ este monoid comutativ.	1p 2p
c)	Se deduce cu usurință, deoarece legea " *" este asociativă, că : $x*x*x=3^2(x-2)^2+2$ Ecuația $x*x*x=11$ este echivalentă cu $3^2(x-2)^2+2=11\Leftrightarrow 3^2(x-2)^2=9\Leftrightarrow$ $(x-2)^2=1\Leftrightarrow x-2=1$ sau $x-2=-1$, adică $x=3$ sau $x=1$. Deci $S=\{1;3\}$.	1p 2p 2p
2. a)	Fie $g(x)$ câtul și $r(x)$ restul împărțirii lui $f(x)$ la x^2-5x+6 . Deoarece grad (x^2-5x+6)=2, rezultă că grad$r(x)\le 1$, de unde$r(x)$=$ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Drept urmare $f(x)$=$x^n=g(x)\cdot(x^2-5x+6)+r(x)$. $f(x)$=$x^n=g(x)\cdot(x-3)(x-2)+ax+b$, din $f(3)=0$ și $f(2)=0$ se obține $3a+b=3^n$ și $2a+b=2^n$ cu soluțiile $a=3^n-2^n$ și $b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$. Deci $r(x)=(3^n-2^n)\cdot x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$, iar $f(x)=(x^2-5x+6)\cdot g(x)+(3^n-2^n)\cdot x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$.	1p 3p 1p
b)	Remarcăm că A^2-(tr A)+det $(A)I_2=O_2$, iar (tr A) $=5$ și det (A)=6, deducem că $A^2-5A+6I_2=O_2$.	3p 2p
c)	Din cele stabilite anterior, deducem că $A^n=(A^2-5A+6)\cdot g(A)$+$(3^n-2^n)A$+$(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)I_2$ $=(3^n-2^n)\cdot\begin{pmatrix}-2&5\\-4&7\end{pmatrix}+(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)I_2=$	2p 2p 1p

	$=\begin{pmatrix} 5\cdot 2^n-4\cdot 3^n & 5\cdot(3^n-2^n) \\ 2^{n+2}-4\cdot 3^n & 5\cdot 3^n-2^{n+2} \end{pmatrix}.$	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=$ $=x^n+x^{n-1}+\dots+x^3+x^2+x+1, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$	3p 2p
b)	Se remarcă că $f'_{(x)}=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=$ $=\frac{nx^{n+1}-nx^n+x^{n+1}-x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$	3p 2p
c)	În egalitatea de la punctul anterior înlocuind $x=\frac{1}{3}$ deducem $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\dots+\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{\frac{n}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}+1}{\frac{4}{9}}=\frac{n-3n-3+3^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^2}{4}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{3^{n-1}.4}$, deci $S_n=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^{n-1}}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\left(9-\frac{2n+3}{3^{n-1}}\right)}{4\cdot 3^{n-1}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9-\frac{2n+3}{3^{n-1}}}{4}=\frac{9}{4}.$	1 p 1 p 1 p 2 p
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(x+1)\vert_0^1=$ $=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$	3 p 2 p
b)	$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}\cdot\left(\frac{x^n}{n}\right)'dx=\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x^n}{n}\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'dx$ $\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ Cum $I_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$, deci $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx.$	2 p 1 p 2 p

c)	Putem observa că $0 \leq x \leq 1 / (+1) \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1$	1 p
	Prin îmulţirea cu $x^n \geq 0$ şi integrând de la 0 la 1 ultimă inegalitate se obţine $\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = 0$ (s-a folosit teorema cleştelui).	2 p
	Trecând la limită în relația $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} nI_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$.	2 p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x+3\neq 0$ şi $2x-1\neq 0 \Rightarrow x\in \mathbf{R}-\{1/2,-3\}$ $9x^2-12x+4=0$ $x_1=x_2=\frac{2}{3}$	**1p** **3p** **1p**
2.	Termenul din mijlocul dezvoltării este T_7 $T_7 = C_{12}^{6}a$ $a = 503/231$	**1p** **2p** **2p**
3.	Fie M mijl [BC] $\Rightarrow$ M(2,-2) AM: $3x-y-4=0$	**2p** **3p**
4.	$tg\alpha\cdot tg(90^0-\alpha)=1,\forall\alpha\in(0^0,90^0)$ $tg1^0\,tg2^0\cdots tg89^0=1$	**3p** **2p**
5.	f bijectivă $\Rightarrow S = f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3) = -3-2-1+0+1+2+3$ S = 0	**4p** **1p**
6.	$x>0$ $(\lg x+3)(\lg x-10)=0$ $x_1=10^{-3}; x_2=1$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	detA = $-2x,\forall x\in\mathbf{R}$ $x=-1006$	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&x^2\end{pmatrix},\forall x\in\mathbf{R}$ $x=\sqrt{2}\Rightarrow A^2=2I_3$ $A^{2k}=2^kI_3,\forall k\in\mathbf{N}^*$; $A^{2k+1}=2^kA,\forall k\in\mathbf{N}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	$\det(t^2A) = -2xt^6,\ \forall x\in\mathbf{R}$ $t^2(t^4-1)=0$ $t_1=0,\ t_2=-1,\ t_3=1$	**2p** **1p** **2p**
2. **a)**	$f\in\mathbb{R}[X]$ şi $x=i$ rădăcină $\Rightarrow f(i)=0$ $a=0$; $b=7$	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=9/2$ $(x_1-3/2)^2+(x_2-3/2)^2+(x_3-3/2)^2+(x_4-3/2)^2=0$	**1p** **1p** **3p**
c)	$x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}$ atunci, folosind punctul **b)**, obţinem $x_1=x_2=x_3=x_4=3/2$ $a=-27$; $b=81/8$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3+3x-4}=\pm\infty \Rightarrow G_f$ nu are AO $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=1$; y = x + 1 , asmptotă oblică; f cotinuă pe **R** $\Rightarrow G_f$ nu are AV	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
b)	$x^3+3x^2-4=0 \Rightarrow$ f derivabilă pe **R**\{-2,1} $f'(x)=\frac{3x^2+6x}{3\sqrt[3]{(x^3+3x^2-4)^2}}, \forall x\in$ **R**\{-2,1} $f^2(x)\, f'(x)=x^2+2x$, x∈ ∀x∈	**1p** **2p** **2p**
c)	$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$, $\forall x\in$ **R**\{-2} $f_s'(-2)=\lim\limits_{x\nearrow -2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}=+\infty$ $f_d'(-2)=\lim\limits_{x\searrow -2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}=-\infty$	**3p** **1p** **1p**
2. a)	$I=\int_2^3\frac{f(x)}{x-1}dx=\int_2^3(x^2+x-2)dx=(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x)\Big\vert_2^3$ $I=\frac{41}{3}$	**3p** **2p**
b)	$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ $\frac{x^2-13}{f(x)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{(x-1)^2},\forall x\in[-1,0]$ $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-13}{f(x)}dx=-3\ln 2-6$	**1p** **2p** **2p**
c)	$f'(x)=3x^2-3,\forall x\in\mathbf{R}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$ $f_{min}=f(1)=0$ $f_{max}=f(-1)=4$	**2p** **1p** **1p** **1p**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^4=-4$	**2p**

	$(1-i)^4 = -4$ $(1+i)^{2012} - (1-i)^{2012} = 0$	**2p** **1p**
2.	$11x + 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{-4}{11}$ $x^2 - 7x = 0$ $x_1 = 0; x_2 = 7$	**1p** **2p** **2p**
3.	$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ cosx = ½ şi $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi/3$ şi $x = \frac{5\pi}{3}$ cosx = -1 şi $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi$	**1p** **2p** **2p**
4.	f strict crescătoare ⇒ f este injectivă f({1,2,3,4}) are 4 elemente Numărul funcţiilor = C_6^4 = 15	**2p** **3p**
5.	Fie M mijl.segmentului [A,B] ⇒ M(-1,1) m′ = - 4/3 AM: 4x + 3y – 1 = 0	**1p** **2p** **2p**
6.	$a_3 = a_6 - 3r$ $a_{19} = a_{16} + 3r$ $a_3 + a_{19} = 2012$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{rang}M \ge 2, \forall m \in \mathbf{R}$ detM = $m^2 - 6m + 5$ rangM = 2 ⇒ $m_1 = 1; m_2 = 5$	**1p** **2p** **2p**
b)	A,B,C necoliniare ⇔ detM ≠ 0 $m \in \mathbf{R} \setminus \{1, 5\}$	**3p** **2p**
c)	$A_{ABC} = \frac{1}{2} \lvert m^2 - 6m + 5 \rvert$ $m^2 - 6m + 5 = (m-3)^2 - 4$ Pentru $m \in [1,5]$, triunghiul ABC are aria maximă dacă m = 3 ⇒ Aria max = 2	**1p** **2p** **2p**
2. **a)**	$x,y \in G \Rightarrow 1 + xy > 0$ $x,y \in G \Rightarrow \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 \Leftrightarrow x * y > -1$ $x,y \in G \Rightarrow \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} < 0 \Leftrightarrow x * y > -1$ x,y ∈ G ⇒ x ∗ y ∈ G ⇔ G parte stabilă	**1p** **1p** **1p** **2p**
b)	$f(x * y) = \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}, \ \forall x,y \in G$ $f(x) \cdot f(y) = \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}, \forall x, y \in G$ $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x,y \in G$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f(\frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n+1}, \forall n \ge 1$ $f(y) = f(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{9}) = f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{3}) \cdot \cdots \cdot f(\frac{1}{9}) =$ 1/45 $\frac{1-y}{1+y} = \frac{1}{45}$	**1p** **2p** **1p**

	$y=\frac{1}{2}*\dots*\frac{1}{9}=\frac{22}{23}$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{3x^4+x^2+3}{x^2+1},\forall x\in \mathbf{R}$ $f'(x)>0,\forall x\in$ **R** $\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe **R**	**3p** **2p**
b)	f este strict crescătoare pe **R** $\Rightarrow$ f este injectivă f continuă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ $\Rightarrow$ f este surjectivă f este bijectivă	**1p** **1p** **2p** **1p**
c)	$l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5\text{arctg}x}{x^m}$ Dacă m > 3 atunci l = 0 Dacă m < 0 atunci l = ∞ Dacă m = 3 atunci l = 1	**1p** **1p** **1p** **2p**
2. a)	$I_2 = e - 2I_1$ $I_1 = 1$ $I_2 = e - 2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x^ne^x > 0$ oricare ar fi $x\in[0,1] \Rightarrow I_n>0$,oricare ar fi $n\in N^*$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)e^x dx<0$ oricare ar fi $n\in N^* \Rightarrow (I_n)_{n>1}$ este strict descrescător $1=I_1\geq I_n>0,\forall n\in \mathbf{N^*}\Rightarrow (I_n)_{n>1}$ este mărginit $(I_n)_{n>1}$ monoton şi mărginit $\Leftrightarrow (I_n)_{n>1}$ convergent.	**1p** **2p** **1p** **1p**
c)	$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, oricare ar fi $n\in$ **N*** $nI_n = e + I_n - I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in$ **N*** $(I_n)_{n>1}$ convergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(I_n - I_{n+1})=0$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = e$	**2p** **1p** **1p** **1p**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$k=[(\sqrt{5}+\sqrt{11})^2]=16+[2\sqrt{55}]=16+[\sqrt{220}]$ k = 30	**3p** **2p**
2.	y = 7 – x $3x^2 - 21x + 36 = 0$ $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 3$ $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 4$	**1p** **2p** **1p** **1p**
3.	$x\in N, x\geq 2;$	**1p**

	$2C_x^{x-2} = x(x-1)$ 2x(x – 1) = 1524 x = 28	**1p** **2p** **1p**
4.	d = divizor natural al lui 2012 $\Rightarrow$ d $\in$ {1,2, 4, 503} $p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{1}{2}$	**2p** **3p**
5.	$\vec{u} + \vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ $\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert = 5$	**2p** **3p**
6.	$\sin 2x = \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x}, \forall x \in \mathbf{R}$ $2\text{tg}^2 x + 5\text{tg}x + 2 = 0$ tgx = -2; tgx = -1/2 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{tg}x = -2$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $A^* \neq O_3 \Rightarrow \text{rang } A^* \geq 1$ A^* are liniile (coloanele) proporţionale rang A^* = 1	**1p** **2p** **1p** **1p**
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -10 \\ 20 & 20 & 0 \\ 10 & 40 & -30 \end{pmatrix}$=10A;	**3p** **2p**

c)	detA = 0;
	$d_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow$ rangA = 2;
	minorul caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil;
	Ecuaţia are soluţiile: $X_z = \begin{pmatrix} 5-z \\ z-\frac{3}{2} \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbf{C}$
		1p
		1p
		1p
		2p

2. **a)**	$a_{100} = 2C_{100}^0 = 2$; $a_{99} = 0$ $a_{100} + a_{99} = 2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f = (X^2 - 1)g + aX + b$, a,b $\in$ **C;** $f(1) = (1 + i)^{100} + (1 - i)^{100} = f(-1) = -2^{51}$	**1p** **2p**

	a = 0 ; b = 2^{50}	**2p**
c)	f(x) = 0 $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{100} = \cos\pi + i\sin\pi$ $x+i=(x-i)(\cos\frac{(2k+1)\pi}{100}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{100}), k\in\{0,1,\ldots,99\}$ Rădăcinile $x_k = ctg\frac{(2k+1)\pi}{200}, k\in\{0,1,...,99\}$ sunt toate reale	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$f^{'}(x) = -3x^2 + 10x - 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1/3, x_2 = 3$ f este strict crescătoare pe [1/3,3] f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1/3]$,respectiv pe $[3,+\infty)$	**1p** **2p** **1p** **1p**
b)	$f''(x) = -6x + 10$ $\forall x \in \mathbf{R}$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 5/3$ f este convexă pe $(-\infty, 5/3]$; f este concavă pe $[5/3, +\infty)$	**1p** **2p** **1p** **1p**
c)	Folosind punctul **a)** , obținem x = 1/3 este punct de minim, iar x = 3 este punct de maxim f(1/3) = m – 13/27 ; f(3) = m+9 f are trei rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 13/27 < 0 \\ m + 9 > 0 \end{cases}$ $m \in (-9, 13/27)$	**1p** **1p** **2p** **1p**
2. **a)**	$f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow Aria\Gamma_f = \int_0^1 (1-x)^n dx$; $Aria\Gamma_f = (-1)^n \left.\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$	**2p** **3p**
b)	$I_n = \int_0^1 xf(x)dx = (-1)^n \int_0^1 x(x-1)^n dx$ $I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 (x-1)^{n+1} dx$ $I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbf{N}$	**1p** **2p** **2p**
c)	$I_n = \int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx = \int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx = (-1)^n \frac{n}{n+1}\left.\left(\frac{x}{n}-1\right)^{n+1}\right\|_0^1$; $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}\left[(\frac{1}{n}-1)^{n+1} + (-1)^{n+2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + 1\right] =$ 1 – e	**2p** **3p**

$tgC=tg(\pi-A-B)=tg\left[\pi-(A+B)\right]-tg\left(A+B\right)$ BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: …Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\dots\cdot i^{20}=i^{1+2+3+\dots+20}=i^{\frac{20\cdot21}{2}}=i^{210}$ $210=4\cdot52+2$ $i^{210}=i^{4\cdot52+2}=i^2=-1$	2p 1p 2p
2.	O funcție este injectivă pe un interval dacă este strict monotonă pe acel interval $f'(x)=3x^2+1>0$ Derivata întâi este pozitivă, strict, deci funcția f(x) fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică injectivă	1p 2p 2p
3.	$16^x+5\cdot4^{x+1}-21=0\Leftrightarrow4^{2x}+20\cdot4^x-21=0$ Notez $4^x=t;t>0\Rightarrow t^2+20t-21=0\Rightarrow t_1=1,t_2=-21$, care nu corespunde Din $4^x=1\Rightarrow4^x=4^0\Rightarrow x=0$	1p 2p 2p
4.	$p=\frac{c_f}{c_p};\ c_p=900$, numărul de numere de câte 3 cifre. Conform enunțului, avem următoarele forme de numere: numere de forma $\overline{aab}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot9=81$. Numere de forma $\overline{aba}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot9=81$. Numere de forma $\overline{baa}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot9=81$. Deci, numărul de cazuri favorabile este $c_f=81\cdot3=243$, iar $p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}=0,27$	1p 3p 1p

5.	Mediana din vârful A cade pe mijlocul laturii BC. Fie M mijlocul laturii BC. Avem $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_M & y_M & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2=0$. Ecuația dreptei AM este: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_M & y_M & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2=0$	2p 3p
6.	$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$ $tg\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=3$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det M=m+m-1-m^2=-m^2+2m-1=-\left(m^2-2m+1\right)=-\left(m-1\right)^2$	5pp
b)	Pentru $m=1\Rightarrow rangM=2$. Necunoscute principale: y, z; necunoscuta secundară $x=a\in\mathbb{R}$. Ecuații principale: primele două. Sistemul devine $\begin{cases}y+z=3-a\\ y=-1-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=4\\ y=-1-a\end{cases}\Rightarrow S\{a,-1-a,4\}$	3p 2p
c)	Sistemul este incompatibil dacă rangul matricei sistemului este $\neq$ de rangul matricei extinse. Pentru $m\neq 1\Rightarrow rangM=3$. Fie matricea extinsă $\overline{M}=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\ m&1&0&-1\\ 1&1&m&3\end{pmatrix}$ $d_1=\begin{vmatrix}1&1&3\\ 1&0&-1\\ 1&m&3\end{vmatrix}=0-1+3m-0-3+m=4m-4=4\left(m-1\right)\neq 0$	1p 2p 2p

	$d_1=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&0&-1\\1&m&3\end{vmatrix}=0-1+3m-0-3+m=4m-4=4(m-1)\neq 0$, deci rang $\overline{M}$ =3 și sistemul este compatibil, $\forall m\in\mathbb{R}$.	
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a,\ \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x\Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x\Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a)\Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. Verificăm relația $\begin{aligned}&f(x*y)=f(x)\cdot f(y)\\&f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16\\&f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16\end{aligned}$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x+1)^2}=\frac{4x}{(x+1)^2}$ $f''(x)=\frac{4(x+1)^2-8x(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{4(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}=\frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$	2p 3p
b)	Monotonia depinde de semnul derivatei I. Pentru $x\geq 0$ f(x) este crescătoare; pentru $x<0$, f(x) este descrescătosre	2p

	Determinăm semnul derivatei a doua și obținem: pentru $x\in(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$, $f''(x)\le 0\Rightarrow$ f(x) este concavă; pentru $x\in(-1,1)$, $f''(x)>0\Rightarrow$ f(x) este convexă	2p 1p
c)	$g\left(x^k\right)=f\left(x^k\right)+f\left(\frac{1}{x^k}\right)=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{\frac{1}{x^{2k}}-1}{\frac{1}{x^{2k}}+1}=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{1-x^{2k}}{x^{2k}+1}=0$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+\cdots+g\left(x^{2011}\right)+x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$	3p 2p
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big\|_0^1=\frac{\pi}{4}$ $I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u'}{u}dx=\frac{1}{2}\ln\|u\|\Big\|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	2p 3p
b)	Fie $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^n\ge x^{n+1}$. Deoarece $\Rightarrow\frac{x^n}{x^2+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\ge\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}$ $I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}\le 2I_n\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{2(n+1)}$ $\frac{1}{n-1}=I_n+I_{n-2}\ge 2I_n\Rightarrow I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$ $\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)},\ n\ge 2$	2p 1p 2p
c)	$\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}\|\cdot n\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{2(n-1)}\ \|-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\le nI_n-\frac{1}{3}\le\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}$	2p

	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\right]\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}\right]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{6(n+1)}\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{6(n+1)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3=\sqrt{b_2\cdot b_4}=\sqrt{7\cdot 28}=14$	2p
	$q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{14}{7}=2$;	2p
	$2=\frac{7}{b_1}\Rightarrow b_1=\frac{7}{2}$	1p
2.	$f(1)=5^1+\log_5 1=5$	2p
	$f(f(1))=f(5)=5^5+1=3126$	3p
3.	În binomul $(a+b)^n$, termenul T_{k+1} se scrie $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$	1p
	$\Rightarrow T_{k+1}=C_9^k\left(2012\cdot\sqrt[4]{x}\right)^{9-k}\left(\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^k$, $9\ge k\Rightarrow k\in\{0,1,\cdots,9\}$	1p
	$T_{k+1}=C_9^k 2012^{9-k}\cdot x^{\frac{9-k}{4}}\cdot 2012^k\cdot x^{-\frac{k}{2}}=2012^9\cdot x^{\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}}$. Trebuie să avem	2p
	$\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow 9-3k=0\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=2012^9$	1p
	$\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow 9-3k=0\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=2012^9$	
4.	$p=\frac{c_f}{c_p}$; $c_p=3^3=27$.	1p
	Numărul de cazuri favorabile este $3\cdot 2\cdot 1$, deci $c_f=6$, iar	2p

	$p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}=0,(2)$	2p
5.	Centru paralelogramului se găsește la intersecția diagonalelor AC și BD. Fie O acest centru. Atunci $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{3+n}{2}=0\Rightarrow n=-3\Rightarrow D(-3,5);$ $y_O=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{m+5}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m=2\Rightarrow B(3,2)$	2p 1p 2p
6.	$tgC=tg(\pi-A-B)=tg\left[\pi-(A+B)\right]-tg(A+B)$ $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}=\frac{2+\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}{1-2\cdot\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}=\frac{22+8-5\sqrt{3}}{11-16+10\sqrt{3}}=$ $=\frac{5\left(6-\sqrt{3}\right)}{-5\left(1-2\sqrt{3}\right)}=-\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(1+2\sqrt{3}\right)}{-11}=\frac{6+12\sqrt{3}-\sqrt{3}-6}{11}=\sqrt{3}$ $tgC=\sqrt{3}\Rightarrow\hat{C}=\frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2-I_3$	5p
b)	Prin inducție. Egalitatea se verifică, conform punctului a). Presupun că $P(n):A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$ $P(n+1):$ și demonstrez $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$	2p

	$P(n+1): A^{n+1}-A^{n-1}=A^2-I_3$. Într-adevăr, avem: $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$, conform a)	2p
c)	Obsevăm că se verifică pentru n=1. Presupunem adevărată pentru pentru valorile mai mici și egale cu n-1 și demonstrăm pentru n. notăm cu S_n suma elementelor. Din $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3 \Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3 \Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$ $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3 \Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$ $\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$	2p 2p
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a,\ \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x \Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x \Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a) \Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+3}{3-x}\right)'}{\frac{x+3}{3-x}}=\frac{3-x+x+3}{(3-x)^2}\cdot\frac{3-x}{x+3}=\frac{6}{9-x^2}>0,\forall x\in(-3,3)$ Deci $f(x)$ este strict crescătoare pentru $x\in(-3,3)$	3p 2p
b)	1. asimptote orizontale nu există, pentru că nu se pune problema calculului limitei la $\pm\infty$; 2. asimptote oblice, nu există; din aceleași rațiuni ($x\in(-3,3)$) 3. asimptote vericale: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln\frac{x+3}{3-x}=\ln 0=-\infty$. Deci $x=-3$ este asimptotă verticală la dreapta. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\ln\frac{x+3}{3-x}=\ln\infty=\infty$. Deci $x=3$ este asimptotă verticală la stânga.	1p 1p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{\frac{1}{x}+3}{3-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{3x+1}{3x-1}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x=1^\infty$ $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{3x-1}-1\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^x$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{\ln 2}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot arctgx\Big\rvert_0^1=\frac{\pi}{4}\cdot\ln 2$	5p

b)	Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n > x^{n+1}$, iar $\frac{1}{x^2+1}>0$ $\Rightarrow \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1} > \frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x^2+1}, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n > I_{n+1}\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1}dx > \int_0^1 \frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x^2+1}dx, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n > I_{n+1}\Rightarrow$ șirul este descrescător.	2p 3p
c)	$0\le I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$	5p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	S= 5+10+15+...+95=5(1+2+3+...+19)= =5(19*20)/2=950	3p 2p
2.	Se scrie ecuaţia $3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3 + 3^x = 117$ $3^x(9+3+1) = 117 \Rightarrow 3^x \cdot 13 = 117$ $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$	1p 2p 2p
3.	$T_{k+1} = C_{20}^k \left(\sqrt[3]{2}\right)^k = C_{20}^k 2^{\frac{k}{3}}$ $k \in \{0,3,6,...18\}$ 7 termeni raţionali	2p 2p 1p
4.	$P = \frac{nr.\,cazuri\ \ favorabile}{nr.\,cazuri\ \ posibile}$ Numerele posibile: $\overline{abc}$: 3*4*4=48 Numere favorabile: $\overline{abc}$: 3*4*2=24 $P = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$	1p 1p 1p 2p
5.	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = -\frac{2}{m} \neq -\frac{5}{2}$ $m = -\frac{8}{3}$	2p 3p

6.	Fie M mijlocul segmentului [BC] $\Rightarrow M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)\Rightarrow M\left(0,2\right)$ $AM=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}\Rightarrow AM=\sqrt{4^2+1^2}$ $AM=\sqrt{17}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$C\left(-1,1\right)$ $AC:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ $AC: x-4y+5=0$	1p 2p 2p
b)	A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -n & n & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow n+13=0$ $n=-13\notin N^*\Rightarrow$ A,B,C nu pot fi coliniare, $\forall n\in N^*$	1p 3p 1p
c)	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\lvert\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right\rvert$ $\frac{1}{2}\left\lvert\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -n & n & 1 \end{vmatrix}\right\rvert=10\Leftrightarrow \lvert n+13\rvert=20$ $n=7$	1p 2p 2p
2. a)	Asociativitatea: $\left(x*y\right)*z=x*\left(y*z\right),\forall x,y,z\in R$ Demonstrarea asociativității	1p 4p

b)	Comutativitatea legii Calculul elementului neutru $e=1$ Calculul $x'*2=2*x'=1\Rightarrow x'=\frac{6}{7}$	1p 2p 2p
c)	Folosim $x*y=6\left(x-\frac{5}{6}\right)\left(y-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{6}$ $x*x*x=6^2\left(x-\frac{5}{6}\right)^3+\frac{5}{6}$. Ecuaţia devine pentru $x-\frac{5}{6}=t$ $36t^3-t=0$ cu soluţiile $t\in\left\{0,\pm\frac{1}{6}\right\}$ $x\in\left\{\frac{4}{6},\frac{5}{6},1\right\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-6x}{1}=-3$	2p 3p
b)	Calculul $f'(x)=3x^2-6x$ $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{0,2\}$ Tabelul de variaţie şi finalizarea	1p 2p 3p
c)	$f(0)=2-m,\ f(2)=-2-m$ Şirul lui Rolle pentru $m\in(-2,2)\Rightarrow -,+,-,+$ 3 soluţii reale	2p 2p 1p

2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+2014}dx=\int_0^1\frac{x+2014-2014}{x+2014}dx=$ $\int_0^1 1dx-2014\int_0^1\frac{1}{x+2014}dx=\left(x-2014\ln\lvert x+2014\rvert\right)\Big|_0^1=$ $1-2014\ln\frac{2015}{2014}$	1p 3p 1p
b)	$I_{n+1}+2014I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2014x^n}{x+2014}dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1},\forall n\in N^*$	2p 3p
c)	$I_{n+1}-I_n<0$ $\frac{1}{2015(n+1)}<I_n<\frac{1}{2015n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2015}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=1+i+i^2+...+i^{10}=1+i-1-i+1+i-1-i+1+i-1=i$ $\lvert z\rvert=\sqrt{0^2+1^2}=1$	3p 2p

2.	$\Delta<0$ $m^2-36<0$ $m\in(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$	1p 2p 2p
3.	Condiţii de existenţă: $\begin{matrix}x^2-4x+3\ge 0\\ x-1\ge 0\end{matrix}\quad\Rightarrow x\in\{1\}\cup[3,\infty)$ $x^2-4x+3=x^2-2x+1\Rightarrow x=1$ soluţie	2p 3p
4.	$P=\frac{nr.\ cazuri\ \ favorabile}{nr.\ cazuri\ \ posibile}$ Numere posibile: 11 Numere favorabile: 0,1,2,3,4 $P=\frac{5}{11}$	1p 1p 1p 2p
5.	$d_1\perp d_2\Leftrightarrow 2\cdot a+(-3)\cdot 6=0$ $m=9$	3p 2p
6.	$\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$ $=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&1&m\\1&m&1\\m&1&1\end{vmatrix}=$ $=-(m+2)(m-1)^2$ $m\in\{-2,1\}$	1p 2p 2p
b)	Sistemul devine: $\begin{cases}x+y=1\\x+z=2\\y+z=3\end{cases}$ sau $\det A=-2$ Obţinem soluţia: $x=0, y=1, z=2$	1p 4p

c)	$\det A \neq 0 \Rightarrow m \in R/\{-2,1\} \Rightarrow rangA=3$ Dacă $\det A = 0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow rangA=1$ $\Rightarrow m=-2 \Rightarrow rangA=2$	2p 1p 2p
2. a)	$a\in Z_4, b\in Z_4$ Se pot forma 16 polinoame	2p 3p
b)	$f = X^3+\hat{2}X+\hat{2}$ Restul este $f(\hat{2}) = \hat{2}^3+\hat{2}\cdot\hat{2}+\hat{2}=$ $=\hat{2}$	1p 2p 2p
c)	$f(\hat{0})=\hat{1}$ $f(\hat{1})=\hat{2}+a$ $f(\hat{2})=\hat{0}+\hat{2}a+\hat{1}$ $f(\hat{3})=\hat{3}+\hat{3}a+\hat{1}=\hat{3}a$ $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{-2014}{(x-2014)^2}$ $f'(x)<0, \forall x\in R/\{2014\}$ f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$	2p 2p 1p
b)	$x=2014$ asimptotă verticală $y=1$ asimpotă orizontală	2p 3p

c)	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2014}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2014}{x-2014}\right)^x$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2014}{x-2014}\right)^{\frac{x-2014}{2014}}\right]^{\frac{2014x}{x-2014}}=e^{2014}$	2p 3p
2. a)	g este derivabilă pe $(0,\infty)$ $g'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)$ Concluzia	1p 3p 1p
b)	$\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx=\int_1^e g'(x)\cdot g(x)\,dx=$ $=\left.\frac{g^2(x)}{2}\right\|_1^e=$ $=\frac{e^2}{2}$	1p 2p 2p
c)	$x\in[1,e]\Rightarrow 1\le f(x)\le 2$ Concluzia	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{2}=\log_{2^{-2}}2^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{6}$ $\left(\sqrt{6}\right)^{-2}=\frac{1}{6}$ Rezultat final: 0	2p 2p 1p
2.	Fie $f:R\to R, f\left(x\right)=ax^2+bx+c; a\neq 0, a,b,c\in R$ $f\left(x\right)=-9x^2+12x-4$ şi $f\left(x\right)=-x^2+4x-4$	3p 2p
3.	Condiţie de existenţă: $x>0$ $\lg^2 x^2-20\lg x+24=0\Leftrightarrow 4\lg^2 x-20\lg x+24=0$ devine $t^2-5t+6=0, t=\lg x$ cu rădăcinile: 2,3 $x\in\{100,1000\}$	1p 2p 2p
4.	$P=\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$ Numere posibile: 100,...,999 $\Rightarrow$ 900 numere Numere favorabile: 116,161,611,123,132,213,231,312,321$\Rightarrow$9 numere $P=\frac{9}{900}=\frac{1}{100}$	1p 1p 2p 1p
5.	Demonstraţia : triunghiul ABC este dreptunghic $h_C=d\left(C,AB\right)=\frac{12}{5}$	2p 3p
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=$ $=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	2p 6p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=8, trA=6$ $A^2-6A+8I_2=O_2$ sau calculul cu matrice	2p 3p

b)	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .Calculul $A\cdot X$ şi $X\cdot A$ Rezolvarea sistemului şi soluţia: $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+2c \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Fie $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obţinem sistemul $\begin{cases} a^2+bc=2 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=1 \\ bc+d^2=4 \end{cases}$ Obţinem $a=\pm\sqrt{2}, b=0, c=\frac{1}{a+d}$ şi $d=\pm2 \Rightarrow 4$ soluţiî	2p 3p
2. a)	$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$ $=0$	2p 3p
b)	Notăm $x^2=t$ şi obţinem $t\in\{1,2013\}$ $x\in\{\pm1,\pm\sqrt{2013}\}$	3p 2p
c)	$(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)=f(-2)$ $f(-2)=-6027$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}, \forall x\in R$ Din tabelul de variaţie f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi este strict crescătoare pe $(0,\infty)$	2p 3p
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $f(1)=\ln 2;\ f'(1)=1$ $x-y-1+\ln 2=0$	1p 2p 3p

c)	$f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},\forall x\in R$ Tabelul de variaţie Puncte de inflexiune : $A(-1,\ln 2);B(1,\ln 2)$	2p 1p 2p
2. a)	$\int_{11}^{102} f(\sqrt{x})dx=\int_{11}^{102}\sqrt{x+2014}dx$ $=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+2014}\right)^3\Big\|_{11}^{102}$ $=\frac{2}{3}\left(46^3-45^3\right)$	1p 2p 2p
b)	$\int_1^{11}\frac{x}{f^2(x)}dx=\int_1^{11}\frac{x}{x^2+2014}dx$ $\int_1^{11}\frac{x}{f^2(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+2014\right\|\Big\|_1^{11}=\ln\frac{45}{\sqrt{2015}}$	2p 3p
c)	Primitiva F a funcţiei f este strict crescătoare pe $R\Leftrightarrow F'(x)>0,\forall x\in R$ $F'(x)=f(x)>0,\forall x\in R$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\frac{2}{1-i}\right)^{10}$ =32i a=0 şi b=32	3p 2p
2.	Funcţia este strict descrescătoare pe $(-\infty; x_v]$ şi strict crescatoare pe $[x_v;\infty)$ $x_v=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_v=-3$ $m=-3$	1p 2p 2p
3.	$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+....\frac{1}{5^{12}}=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{13}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\right)<\frac{5}{4}$.	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1}=C_9^k(x^2)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k$; k=$\overline{0;9}$.Rezultă $T_{k+1}=C_9^k x^{18-\frac{7k}{3}}$. $18-\frac{7k}{3}=4\Rightarrow k=6$.Deci T_7.	3p 2p
5.	n=12k+r ; r =$\overline{0;11}$.Rezultă $\cos\frac{n\pi}{6}=\cos\left(2k+\frac{r\pi}{6}\right)=\cos\frac{r\pi}{6}$. $\cos\frac{r\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{r\pi}{6}\right)$; $2\pi-\frac{r\pi}{6}=\frac{(12-r)\pi}{6}$ Deci pentru $r=\overline{0;6}$ obţinem valori diferite.Rezultă mulţimea are 7 elemente.	2p 2p 1p

6.	AB=$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$,rezultă AB=$2\sqrt{5}$;AC=$4\sqrt{5}$;BC=10. Din reciproca teoremei lui Pitagora obţinem triunghiul ABC dreptunghic în A. M$\left(\frac{x_B+x_c}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$.Deci M(- 1;7)	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	A=$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ este matricea sistemului. Minorul $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$=1$\neq 0$. Deci rangA=3	2p 2p 1p
b)	RangA=rang $\overline{A}$,rezultă sistem compatibil simplu nedeterminat. x=1;y=0;t=α;z=$-\alpha$;$\alpha\in C$.	3p 2p
c)	A=$I_3 \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\\alpha&\beta&\gamma\\-\alpha&-\beta&1-\gamma\end{pmatrix}$ $\alpha;\beta;\gamma\in C$.Rezultă o infinitate de soluţii. FieY=$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\m&n&p\\q&r&s\end{pmatrix}$.Sistemul de ecuaţii:$\begin{cases}q=0\\q+r=0\\q+r+s=0\\q+r+s=1\end{cases}$.Contradicţie.Deci ecuaţia nu are soluţie.	3p 2p
2. a)	f=qg+r , grad r < grad g q=x^4-x^3+2x-2 si r =3	2p 3p
b)	$y_1^3=1$,rezultă $S_1=6$. $S_2=\sum_{k=1}^{6}(x_k^2+x_k+1)=\sum_{k=1}^{6}x_k^2+\sum_{k=1}^{6}x_k+\sum_{k=1}^{6}1=(x_1+x_2+...+x_6)^2-2(x_1x_2+...+x_5x_6)+$	3p 2p

	$(x_1+x_2+...+x_6)$+6. Din relaţiile lui Viete obţinem $\sum_{k=1}^{6} x_k = 0$ si $\sum_{\substack{i;j=1\\ i<j}}^{6} x_i x_j = 0$. Deci $S_2 = 6$	
c)	Notăm $x^3 = t$ si obţinem ecuaţia $t^2+t+1=0$ $\Delta<0$ rezultă că ecuaţia nu are soluţii reale. Deci polinomul f are 0 rădăcini reale.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f”(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}$; x>0 f”’(x)=$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$<0 Rezultă f’ este strict descrecătoare pe $(0;\infty)$.	2p 2p 1p
b)	Aplicăm teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe intervalul [k;k+1] şi rezultă c∈ $(k;k+1)$ astfel incât f(k+1)-f(k)= $f'(c)$. f’(c)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$ f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$.	1p 2p 1p 1p
c)	$b_{n+1}-b_n<0$,rezultă şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este descrescător.Din teorema lui Lagrange rezultă inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}$.Insumând inegalitaţile pentru k=$\overline{1;n}$, obţinem $b_n\geq-1$,deci şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este mărginit.Rezultă $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent. Din $a_n>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}$ si trecerea la limită in inegalitate,rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.	1p 1p 1p 2p

2. a)	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}$. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x}dx=(\ln x)\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ln 2$. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\frac{\pi}{4}+\ln 2$.	2p 2p 1p
b)	Funcţia h(x)= $\sin^{2011} x$; x∈ $[-\pi;\pi]$ este impară, rezultă $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2011} x dx$ =0. Funcţia $g^{(2012)}(x)$;x∈ $[-\pi;\pi]$ este impară,deci $\int_{-\pi}^{\pi} g^{(2012)}(x)dx$ =0	3p 2p
c)	$t^2\sin^2 x-2t\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}\geq 0;\forall x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right];\forall t\in R$. Prin aplicarea integralei $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ obţinem inegalitatea cerută.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|(2+i)^{10}\right\|=\left\|2+i\right\|^{10}$	3p

	$\|2+i\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,rezultă $\left(\sqrt{5}\right)^{10}=5^5$.	2p
2.	$\sqrt{50}=7{,}07....$ Produsul primelor 10 zecimale este egal cu zero.	3p 2p
3.	$4^{x^2}=2^{6x}\Leftrightarrow 2^{2x^2}=2^{6x}$ $2x^2=6x\Leftrightarrow x_1=3;x_2=0$	2p 3p
4.	I)f(b)=1;f(c)=1; II) f(b)=1;f(c)=2 ; III) f(b)=2;f(c)=1 Rezultă 3 funcţii.	3p 2p
5.	cosB=$\frac{1}{3}\Rightarrow \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;cosC=$\frac{1}{2}\Rightarrow$sinC=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. cos(B+C)=cosBcosC-sinBsinC=$\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$. cosA=cos$(180^0-(B+C))=-\cos(B+C)=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.	2p 2p 1p
6.	G$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\Rightarrow$ G(2;2).	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^3=I_3$ $A^{-1}=A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.	3p 2p
b)	A(XY)=(AX)Y=(XA)Y=X(AY)=X(YA)=(XY)A Rezultă că XY$\in G(A)$.	3p 2p

c)	Dacă X$\in G(A) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.	2p
	$X^2 = I_3 \Rightarrow X = \pm I_3 ; \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; X = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \pm1\pm i\sqrt{3} & \pm1\mp i\sqrt{3} \\ \pm1\mp i\sqrt{3} & 1 & \pm1\pm i\sqrt{3} \\ \pm1\pm i\sqrt{3} & \pm1\mp i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.	3p
2. a)	$(x\circ y)\circ z = (x+i)(y+i)(z+i)-i$	2p
	$x\circ(y\circ z) = (x+i)(y+i)(z+i)-i$	1p
	Rezultă că $x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$.	1p
b)	$x\circ(-i) = (-i)\circ y = -i$	3p
	$[(-100i)\circ(-99i)\circ....\circ](-i)\circ[0\circ i\circ(2i)\circ...\circ(99i)\circ(100i)] = x\circ(-i)\circ y = -i$	2p
c)	$x\circ x\circ x\circ x = (x+i)^4 - i$.	2p
	Obţinem ecuaţia $(x+i)^4 = 1$ cu soluţiile $x_{1;2} = \pm1 - i ; x_3 = 0 ; x_4 = -2i$.	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>f(x)=0 $\Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4$ .Deci , ecuaţia are 4 soluţii reale.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td></td><td>f(x)=$\left(x^2 - 5x + 5\right)^2 - 1$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td></td><td>f’(x)= $2(2x-5)(x^2-5x+5)$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td></td><td>f’(x)=0 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{5} ; x_{2;3} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ .Deci ecuaţia are 3 soluţii reale.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td></td><td>$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$</td><td></td><td>$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f’(x)</td><td>- - - - - - - - - - - -</td><td>0</td><td>+ + + + + + +</td><td>0</td><td>- - - - - - - - -</td><td>0</td><td>+ + + + + + + + + + + +</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>2p</td></tr>
</table>

	$\begin{array}{c\|ccccccccc} f(x) & \infty & \searrow & f(x_1) & \nearrow & f(x_2) & \searrow & f(x_3) & \nearrow & \infty \\ & & & m & & M & & m & & \end{array}$ Funcţia f are 3 puncte de extrem local.	2p 1p
c)	$f(x_1)=\frac{104\cdot 54}{25^2}$; $f(x_3)=-1$ Valoarea minimă a funcţiei f este -1.	3p 2p
2. a)	$f_1(x)=e^x-x-1$;x∈ R $f_2(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$;x∈ R.	2p 3p
b)	Verificarea formulei pentru n=1 Presupunem că $f_{k+1}(x)=e^x-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^k}{k!}-1, k\in N^*$.Aplicăm $\int_0^x f_{k+1}(t)dt$ şi obţinem $f_{k+2}(x)=e^x-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-1$.	1p 2p 2p
c)	Demonstrăm prin inducţie matematică inegalitatea $0\le f_n(x)\le e^x\cdot\frac{x^n}{n!},\forall n\in N$. Trecem la limită în inegalitate şi rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{x+1}{3}=k, k\in Z \Leftrightarrow x=3k-1$ Obţinem k=0,5$\notin Z$ .Deci,ecuaţia nu are soluţii.	3p 2p
2.	$f_{\max}=\frac{-\Delta}{4a}$ $f_{\max}=9$	2p 3p
3.	S=$\sum_{k=0}^{1006} f(2k+1)=\sum_{k=0}^{1006}(4k+1)$. S=$4\sum_{k=0}^{1006} k+1007$ S=$1007\cdot 2013$	2p 2p 1p
4.	$\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ Re$\frac{1}{3+2i}=\frac{3}{13}$.	3p 2p
5.	cos2x=1-2$\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-5=0$. Obţinem sinx=1 şi sinx=$-\frac{5}{2}\notin[-1;1] \Leftrightarrow$ x=$\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$. Deci ecuaţia are o soluţie.	2p 2p 1p
6.	$\vec{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ coliniari$\Leftrightarrow \frac{2+a}{2}=\frac{a}{a-1}$ a$\in\{-1;2\}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea A are 3 linii si 3 coloane,iar 0;1;2;3;4$\in N \Rightarrow A\in M_3(N)$. $I_3\in M_3(N)$	3p 2p

b)	$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ rangX=1 $Y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ rangY=2	3p 2p
c)	$X=\begin{pmatrix}a&b&c\\m&n&p\\x&y&z\end{pmatrix};X^{-1}=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\\m'&n'&p'\\x'&y'&z'\end{pmatrix}$.Din $X\cdot X^{-1}=I_3\Rightarrow\begin{cases}a\cdot a'+b\cdot m'+c\cdot x'=1\\a\cdot b'+b\cdot n'+c\cdot y'=0\\a\cdot c'+b\cdot p'+c\cdot z'=0\\......\end{cases}$ I)aa'=1;bm'=0;cx'=0 II) aa'=0;bm'=1;cx'=0 III) aa'=0;bm'=0;cx'=1 etc. Rezultă suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloana egală cu 1.	2p 2p 1p
2. a)	$f(x_k)=(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})^n-1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi-1=0\,;k=\overline{0;n-1}.$	2p 3p
b)	$f(x)=(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{k-1})$ $f(x)=(x-1)\ (x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$. $x_0=1\Rightarrow\underset{k=1}{\overset{n}{\pi}}(x-x_k)=x^{n-1}+x^{n-2}+...+1$	2p 2p 1p
c)	$\underset{k=1}{\overset{n-1}{\pi}}(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})=\left(\cos\frac{(1+2+...+n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(1+2+...+n-1)\pi}{n}\right)=$ $\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)^{n-1}=i^{n-1}$. În egalitatea de la b) pentru x=1 obţinem $n=\underset{k=1}{\overset{n-1}{\pi}}(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n})$ Rezultă $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.	1p 2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f”(x)=$\frac{1}{x}$; x>0 f”’(x)=$-\frac{1}{x^2}$<0 pe $(0;\infty)$ Rezultă f’ este strict descrecătoare pe $(0;\infty)$.	2p 2p 1p
b)	Aplicăm teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe intervalul [k;k+1] şi rezultă c$\in (k;k+1)$ astfel incât f(k+1)-f(k)= $f'(c)$. f’(c)=$\frac{1}{c}$ f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{c}$.	1p 2p 1p 1p
c)	$b_{n+1}-b_n<0$,rezultă şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este descrescător.Din teorema lui Lagrange rezultă inegalitatea: $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$.însumând inegalităţile pentru k=$\overline{1;n}$, obţinem $b_n\geq 0$,deci şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este mărginit.Rezultă $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent. Din $a_n>\ln n$ si trecerea la limită in inegalitate,rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	f(x)>0$\Rightarrow$Aria=$\int_a^b f(x)dx$ Aria=$\frac{(b-a)(b^2+4ba+a^2)}{3(b+a)}$	2p 3p
b)	$f^{-1}(x)=\sqrt{(a+b)x-ab}$; $x\in[a;b]$. $\int_a^b f^{-1}(x)dx$ .s.v.(a+b)x-ab=t.Obţinem $\frac{1}{a+b}\int_{a^2}^{b^2}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}$ (1) a;b$\in Q\Rightarrow\int_a^b f^{-1}(x)dx\in Q$	2p 2p 1p
c)	$\int_a^b f^{-1}(x)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}$.	2p

	$\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}>\frac{b^2-a^2}{2}\Leftrightarrow(b-a)^2>0$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=-2^{1007}i$ $\operatorname{Im} z=-2^{1007}$	3p 2p
2.	S=x+y; P=xy $S^3-3SP=9$; S=3 S=3;P=2 rezultă (x;y) $\in$ {(1;2);(2;1)}.	1p 2p 2p
3.	x$\in$ $(0;\infty)-\{1\}$ $\log_2 x=a$; $2a^2-5a+2=0$ x$\in$ $\{4;\sqrt{2}\}$	1p 2p 2p
4.	$2C_6^4$ 30 de funcţii	2p 3p
5.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ $x\in\{k\pi/k\in Z\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in Z\right\}$.	2p 3p
6.	$\lvert\Delta\rvert=4$ $A=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ A=2	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea sistemului Calculul determinantului Finalizare	2p 2p 1p
b)	$\Delta \neq 0$ x=1;y=0;z=0	3p 2p
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow a=b=c$ $x^2+y^2+xy=0 \Leftrightarrow$ x=y=0 Obţinem x+y+z=1.Deci x=0;y=0;z=1	1p 2p 2p
2. a)	A+B$\in G$ Calculul matricei AB AB$\in G$	1p 3p 1p
b)	Det(AB)=det(A)det(B)$\Rightarrow$det(A)=0 sau det(B)=0 Det(A)= x^2+5y^2 $\Rightarrow$x=y=0$\Rightarrow$ $A=O_2$.Analog pentru matricea B.	3p 2p
c)	$Det(AA^{-1})=1 \Rightarrow \det A=\pm 1$ $x^2+5y^2=\pm 1$ $A=\pm I_2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Factor comun forţat Simplificare prin x^4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$=1	2p 2p 1p

b)	Calculul rădăcinilor $x_i ; i = \overline{1;4}$ ale funcţiei f. Teorema lui Rolle pentru $f : [x_i ; x_{i+1}] \to R , i = \overline{1;3}$ Finalizare	2p 2p 1p
c)	$\ln \lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\to\infty} \frac{\ln(x+1)+\ln(x+2)+\ln(x+3)+\ln(x+4)}{x}$ =0 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ =1	3p 2p
2. a)	$I_1 = 0$ I_2: Notăm x=3cost $I_2 = \frac{81\pi}{8}$	2p 2p 1p
b)	$f(x) = x^n \sqrt{9-x^2}$; $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-3;3]$ Notăm x=-t $I_{2n+1} = 0$	2p 1p 2p
c)	$J_{2n+2} = -9\int_{-1}^{1} x^{2n+1} (\sqrt{9-x^2})' dx + \int_{-1}^{1} x^{2n+3} \left(\sqrt{9-x^2}\right)' dx$ Aplicarea formulei de integrare prin părţi $J_{2n+2} = \frac{18n+9}{2n+4} J_{2n} - \frac{32\sqrt{2}}{2n+4}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert z\rvert=2$ $\lvert z^3\rvert+\lvert\overline{z}^3\rvert$=16	3p 2p
2.	Rezolvăm ecuaţia f(x)=g(x) $x_1=1; x_2=\frac{-1}{2}$. A(1;0);B($-\frac{1}{2}$;3).	1p 2p 2p
3.	$9^x-3\cdot6^x+2\cdot4^x=0\,\vert:4^x$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t;t>0\Rightarrow t_1=1;t_2=2$ $x_1=0;x_2=\log_{\frac{3}{2}}2$	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1}=C_{100}^k2^kx^{100-\frac{4k}{3}};k=\overline{1;100}$ k=75$\Rightarrow T_{76}$.	3p 2p
5.	$\frac{m+1}{4}=\frac{-2}{-(m-1)}\neq\frac{-5}{7}$	2p

	m=±3	3p
6.	$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{r_A}-\overrightarrow{r_G};\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_G};\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{r_c}-\overrightarrow{r_G}$ $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$ 1 Finalizare.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Det(A)=ab$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&a^2&b^2\end{vmatrix}\overset{L_2-L_1}{\underset{L_3-L_1}{=}}ab\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&b-1\\0&(a-1)(a+1)&(b-1)(b+1)\end{vmatrix}$= ab(a-1)(b-1)(b-a). Det(B) $\overset{C_3-C_1}{\underset{C_2-C_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&0\\bc&c(a-b)&b(a-c)\\a^2&(b-a)(a+b)&(c-a)(c+a)\end{vmatrix}=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}c&b\\a+b&c+a\end{vmatrix}\overset{L_2+L_1}{=}$ $(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}c&b\\a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).$	3p 2p
b)	$Det(A\cdot {}^{T}A)=\det(A)\det({}^{T}A)$ Det(${}^{T}A$) =det(A)$\in R$ Finalizare.	2p 2p 1p
c)	Calculul matricei $A-{}^{T}A$ $A-{}^{T}A$ este matrice antisimetrică det($A-{}^{T}A$) =0	2p 2p 1p
2. a)	Efectuarea produsului (x+1)f(x) Finalizare	2p 3p
b)	De la punctul a) rezultă $x_k^5+1=0;k=\overline{1;4}$	3p 2p

	$\sum_{k=1}^{4} x_k^5$ =-4	
c)	$x^4-x^3+x^2-x+1=0\big\|: x^2$ şi notăm $x+\frac{1}{x}=t$. Ecuaţia $t^2-t-1=0$ are soluţiile $t_{1;2}\in R, \|t_{1;2}\|<2$. Ecuaţia $x+\frac{1}{x}=t_{1;2}$ are $\Delta<0$,rezultă polinomul nu are nicio rădăcină reală.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă că y=0 este asimptotă orizontală către $+\infty$. $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=\infty$, rezultă că x=0 este asimptotă verticală.	3p 2p
b)	$f^{'}(x)=\frac{-1}{x(x+1)}$;x>0 $f^{'}(x)<0,\ \ \forall x>0$ Funcţia f este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$	2p 2p 1p
c)	$a_n=\ln(n+2)-\ln(n+1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $0\in R\Rightarrow$ şirul (a_n) este convergent.	2p 2p 1p
2. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\cos x)^{'}}{\cos x+2}dx=$ $=-\ln\|\cos x+2\|\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln\frac{3}{2}$.	3p 2p
b)	Funcţia f este continuă pe R, rezultă că admite primitive pe R. Fie F: $R\to R$ o primitivă a funcţiei f,deci F este derivabilă pe R şi $F^{'}(x)=f(x),\forall x\in R$.	1p 2p

	f(x)>0, $\forall x\in R \Rightarrow F^{'}(x)>0, \forall x\in R$. Deci, orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe R.	1p 1p
c)	Notăm $tg\frac{x}{2}=t$ $\int_0^1 \frac{2}{t^2+3}dt=\frac{\pi}{3}$.	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^3=-2+2i$ $(1-i)^3=-2-2i$ $(1+i)^3+(1-i)^3$=-4	2p 2p 1p
2.	$f_{\min}=\frac{-\Delta}{4a}$ $f_{\min}=\frac{59}{12}$	2p 3p
3.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x$; cosx=t şi $t\in[-1;1]$.	1p 2p

	$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t_1=1;t_2=-2$ $x=2k\pi;k\in Z$.	2p
4.	Numărul de. cazuri posibile=900 Cazurile favorabile:102;108;...996. Numărul de cazuri favorabile=150 $P=\frac{1}{6}$	2p 1p 1p 1p
5.	M mijlocul segmentului [AB], $M\left(\frac{m+3}{2};3\right)$ $CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$ m$\in\{3;7\}$ Verificarea existeţei triunghiului ABC.	2p 1p 1p 1p
6.	$\frac{1}{a+1}=\frac{a-3}{5}$ $a\in\{-2;4\}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$DetM=-m^2+2m-3$ $\det M\neq 0;\forall m\in R$. RangM=3	2p 2p 1p
b)	$\det M\neq 0;\forall m\in R$ Punctele A,B şi C necoliniare,pentru orice m$\in R$.	3p 2p
c)	$A_{ABC}=\frac{1}{2}\lvert\det M\rvert$	1p 2p

	$A_{ABC}=\frac{1}{2}(m^2-2m+3)$ $A_{\min}=1$	2p
2. a)	$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in G$. $(x\circ y)\circ z=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)-1}$ $x\circ(y\circ z)=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)-1}$ Finalizare	1p 2p 1p 1p
b)	Elementul neutru e=0 x simetrizabil $\Leftrightarrow \exists\, x' \in G$ astfel încât $x\circ x' = x'\circ x=0$ x=0	2p 2p 1p
c)	$\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{2014\ ori}=\sqrt{(x^2+1)^{2014}-1}$. x=0	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-42}{x-3}=f'(3)$ $f'(x)=3x^2+2x+1$ Valoarea limitei=34	2p 2p 1p
b)	$h(x)=e^x-x-1,\ x\in R$. $h'(x)=e^x-1$, x$\in R$. Din monotonia funcţiei h, rezultă $h_{\min}=0$ Finalizare	1p 1p 2p 1p

c)	De la punctul b) rezultă că $g(x^3) \geq x^3+1$; $g(x^2) \geq x^2+1$ şi $g(x) \geq x+1$. Adunând inegalităţile obţinem $g(x^3)+g(x^2)+g(x) \geq f(x), \forall x \in R$	3p 2p
2. a)	Utilizarea metodei coeficienţilor nedeterminaţi A=B=C=1	2p 3p
b)	Aria= $\int_3^4 \lvert f(x) \rvert dx$ f continuă şi f(x)>0, $\forall x \in [3;4]$ Aria= $\ln\frac{15}{4}$.	1p 1p 3p
c)	Calculul lui F(x)=lnx V= $\pi \int_e^{e^2} F^2(x)dx$ V= $2\pi\, e(2e-1)$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|2\sqrt{2}-3\right\|=3-2\sqrt{2}$ $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$ $n=6\in\mathbb{N}$	1p 2p 2p
2.	$\sqrt[3]{8}=2$ $2x+1=\frac{2+8}{2}$ $x=2$	1p 2p 2p
3.	$x^2+3=3x+1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $x_1=1, x_2=2$ verifică ecuaţia	2p 3p
4.	c par $\Rightarrow c\in\{0,4\}\Rightarrow$ două variante de alegere a lui c Pentru fiecare c par sunt trei variante de alegere a lui a şi patru variante de alegere a lui b Se pot forma $2\cdot3\cdot4=24$ numere	2p 2p 1p
5.	$1\cdot(-4)+2(a+1)=0$ $a=1$	3p 2p
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC=2$ $\triangle ABC$ dreptunghic în $A\Rightarrow R=\frac{BC}{2}$	2p 2p

	$R=1$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2a+1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3a+3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	3p
	$f(A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
b)	Demonstraţie prin inducţie matematică: $n=2\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2a+1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	1p
	Presupunem că A^k este adevărată pentru numărul natural $k\geq 2$ Avem $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1 & k & ka+C_k^2\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & (k+1)a+C_{k+1}^2\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ adevărat pentru numărul natural $k\geq 2$	4p
c)	$\det A=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă $\forall a\in\mathbb{R}$	1p
	$A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a+1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a+1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f(1)=a+b-1=0, f(-2)=4a+b-4=0$	2p
	$a+b=1, 4a+b=4$	1p
	$a=1, b=0$	2p
b)	$a=1, b=0\Rightarrow f=X^4+4X^3+X^2-6X$	1p

	$f=X\left(X^3+4X^2+X-6\right)\Rightarrow x_1=0$ Conform punctului a) $\Rightarrow x_2=1, x_3=-2$ $x_1+x_2+x_3+x_4=-4\Rightarrow x_4=-3$ $f=X(X-1)(X+2)(X+3)$	1p 1p 1p 1p
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4\right)=16-2a$ $x_1x_2x_3x_4=b$ $16-2a-2b=6\Leftrightarrow a+b=5$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x^2-1}}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'$ $=\dfrac{-2x}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(1;+\infty)$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$ Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f.	3p 2p
c)	$y-f(2)=f'(2)(x-2)$ $f(2)=\ln\dfrac{4}{3}, f'(2)=-\dfrac{4}{3}$ Ecuaţia tangentei la grafic este $y-\ln\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{3}(x-2)$	2p 2p 1p
2. a)	Fie $G:(3;+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcţiei f, $G'(x)=f(x),\forall x\in(3;+\infty)$ $f(x)>0,\forall x\in(3;+\infty)$	2p 1p

	G este strict crescătoare pe $(3;+\infty)$	2p
b)	$F'(x)=\left[x^3+3x+\ln(x-3)\right]'=3x^2+3+\frac{1}{x-3},\forall x\in(3;+\infty)$ $F'(x)=f(x),\forall x\in(3;+\infty)\Rightarrow$ F este o primitivă a funcţiei f	3p 2p
c)	$\int_4^5 f'(x)dx=f(x)\Big\|_4^5$ $f(5)-f(4)=\frac{53}{2}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-10\le x+2\le 10$ $-12\le x\le 8$ $(-12)\cdot(-11)\cdot\ldots\cdot 0\cdot 1\cdot\ldots\cdot 8=0$	2p 1p 2p
2.	$\Delta=(-2m)^2-4(m-1)(m+1)=-4$ $-\frac{\Delta}{4a}<0\Leftrightarrow\frac{4}{4(m-1)}<0$ $m-1<0\Rightarrow m\in(-\infty;1)$	1p 2p 2p

3.	Notăm $5^x = y$ şi obţinem $y + 25y = \frac{26}{5}$ $y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -1$	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile Numerele de două cifre cuburi perfecte sunt 27, 64 $\Rightarrow$ 2 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{45}$	1p 2p 2p
5.	$m_d = -2$ $m_d \cdot m_{d'} = -1 \Rightarrow m_{d'} = \frac{1}{2}$ Ecuaţia perpendicularei este $y - y_A = \frac{1}{2}(x - x_A) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	1p 2p 2p
6.	$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$ $\cos B = \frac{5}{9}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A \in P \Rightarrow A^2 = I_3$ $B^2 = \frac{1}{4}(A^2 + A + A + I_3) = \frac{1}{4}(I_3 + A + A + I_3)$ $= \frac{1}{2}(A + I_3) = B \in Q$	1p 2p 2p
b)	$A \in Q \Rightarrow A^2 = A$ $C^2 = 4A^2 - 2A - 2A + I_3 = 4A - 2A - 2A + I_3$ $= I_3 = C \in P$	1p 2p 2p
c)	$\det A = 1 \neq 0$, deci matricea este inversabilă $\forall a, b \in \mathbb{R}$	1p

	$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p 2p
2. a)	$xy + yx = yx + xy$, adevărat $\forall x, y \in I \Rightarrow "*"$ comutativă $(x*y)*z = xyz + yxz + zxy + zyx, \quad x*(y*z) = xyz + xzy + yzx + zyx$ $"*"$ nu este asociativă, deoarece $(I, +, \cdot)$ este inel necomutativ	1p 2p 2p
b)	Datorită comutativităţii este suficientă verificarea distributivităţii la stânga sau la dreapta. $x*(y+z) = x(y+z) + (y+z)x = xy + yx + xz + zx = (x*y) + (x*z), \forall x, y, z \in I$	1p 4p
c)	$x^2 * (y*x) = x^2 * (yx + xy) = x^2yx + x^3y + yx^3 + xyx^2$ $(x^2 * y) * x = (x^2y + yx^2) * x = x^2yx + yx^3 + x^3y + xyx^2$ concluzie	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Nu avem asimptote verticale $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală la $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \infty \Rightarrow$ nu există asimptotă oblică la $-\infty$	1p 2p 1p 1p
b)	$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$	1p

	$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ f strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, f strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ $f(1)=\frac{1}{e} \Rightarrow A\left(1;\frac{1}{e}\right)$ punct de maxim	1p 2p 1p
c)	$f''(x)=\frac{x-2}{e^x}, \forall x\in\mathbb{R}$ $f''(x)=0 \Rightarrow x=2$ $f''(x)<0, \forall x<2; f''(x)>0, \forall x>2 \Rightarrow x=2$ punct de inflexiune	2p 1p 2p
2. a)	$f(1)=3, f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1$ $f(x)>0, x\in\mathbb{R} \Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 3p
b)	$F(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ F strict crescătoare $\Rightarrow$ F injectivă $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=+\infty \Rightarrow$ F surjectivă Deci, F este bijectivă $\Rightarrow$ F inversabilă	1p 1p 2p 1p
c)	$F(0)=0, F(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ $\int_0^{\frac{11}{6}} F^{-1}(x)dx=\int_{F(0)}^{F(1)} F^{-1}(x)dx=\int_0^1 F^{-1}(F(x))F'(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\bigg\vert_0^1=\frac{13}{12}.$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_2+a_3=a_1q(1+q)=4$, $a_4+a_5=a_1q^3(1+q)=36$ $q^2=9 \Rightarrow q=1$	2p 3p
2.	$G_f \cap Ox: f(x)=0 \Rightarrow x=1$ $A(1,0)$ $G_f \cap Oy: f(0)=4$ $B(0,4)$	2p 1p 1p 1p
3.	$x^2-1=x^3-3x^2+3x-1$ $x(x^2-4x+3)=0$ $x_1=0, x_2=1, x_3=3.$	1p 1p 2p
4.	Numerele de trei cifre distincte care au suma cifrelor egală cu 5 sunt: 104, 140, 203, 230, 302, 320, 401, 410 $\Rightarrow 8$ cazuri favorabile Numărul de numere naturale de trei cifre distincte este $A_{10}^3-A_9^2=648 \Rightarrow 648$ cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{81}$	2p 2p 1p
5.	$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert}=\frac{-3+a}{\sqrt{2(9+a^2)}}$ $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}})<90^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})>0 \Rightarrow -3+a>0 \Rightarrow a>3$	2p 3p
6.	$\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos 2\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$	2p

	$\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=1$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=(m-1)^2(m+2)$ Sistem compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$ $m\in\mathbb{R}-\{-2.1\}$	2p 2p 1p
b)	$\Delta x=3(m-3)(m-1), \Delta y=5(m-1)^2, \Delta z=(7m-1)(m-1)$ $x=\frac{3(m-3)}{(m-1)(m+2)}, y=\frac{5}{(m+2)}, z=\frac{7m-1}{(m-1)(m+2)}$	3p 2p
c)	(x_0,y_0,z_0) progresie aritmetică cu raţia 2 $\Leftrightarrow (y_0-2, y_0, y_0+2)$ soluţia sistemului $\begin{cases} m(y_0-2)+y_0+(y_0+2)=3 \\ (y_0-2)+my_0+(y_0+2)=5 \\ (y_0-2)+y_0+m(y_0+2)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)y_0+2(1-m)=3 \\ (m+2)y_0=5 \\ (m+2)y_0-2(1-m)=7 \end{cases}$ $2(1-m)=-2 \Rightarrow m=2$	1p 2p 2p
2. a)	$x,y\in I_a \Leftrightarrow x-a>0, y-a>0 \Rightarrow (x-a)(y-a)>0$ $x\circ y\in I_a \Leftrightarrow x\circ y-a>0$ $x\circ y=x(y-2)-2(y-2)+2 \Rightarrow x\circ y-2>0$ $a=2$	1p 1p 2p 1p
b)	$x\circ e=x \Rightarrow (x-2)(e-3)=0 \Rightarrow e=3$ $x\circ x'=3 \Rightarrow (x-2)(x'-2)+2=3 \Rightarrow x'=2+\frac{1}{x-2}$ $x=2014 \Rightarrow x'=\frac{4025}{2012}$	2p 2p 1p
c)	f este bijectivă deoarece este de funcţie gradul I	2p

	$f(xy)=xy+2$ $f(x)\circ f(y)=(f(x)-2)(f(y)-2)+2=xy+2$ $f(xy)=f(x)\circ f(y)$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Nu există asimptote orizontale sau oblice $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ asimptotă verticala la stânga $\lim\limits_{\substack{x\to -a\\ x>-a}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-a$ asimptotă verticala la dreapta	1p 2p 2p
b)	$f'(x)=\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{2a}{a^2-x^2}$ $f'(x)>0, x\in(-a,a)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(-a,a)\Rightarrow f$ injectivă Deoarece $f(0)=0\Rightarrow x=0$ soluţie unică.	2p 2p 1p
c)	$f''(x)=\dfrac{-1}{(a+x)^2}+\dfrac{1}{(a-x)^2}=\dfrac{4ax}{(a^2-x^2)^2}$ $f''(x)=0\Rightarrow x=0$ $f''(x)>0, \forall x\in(0,a)\Rightarrow f$ convexă pe $(0,a)$, $f''(x)<0, \forall x\in(-a,0)\Rightarrow f$ concavă pe $(-a,0)$	2p 1p 2p
2. a)	f continuă, admite primitive Fie F o primitivă $F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$ $f'(x)=2e^{2x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$	1p 2p 2p
b)	$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^{2x}dx=\dfrac{xe^{2x}}{2}\Big\vert_0^1-\dfrac{e^{2x}}{4}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{e^2+1}{4}$	3p 2p

c)	$g(x)=x-2$	1p
	$V=\pi\int_{-1}^{1}g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2-4x+4\right)dx$	2p
	$V=\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big\|_{-1}^{1}=\frac{26}{3}\pi$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\varepsilon^3 = 1$	3p 2p
2.	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ $\begin{cases}3x^2-4x-14\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}$; $\Rightarrow 12m^2+8m+1=0$ Rezolvare. Cel mai mare este $m=-\frac{1}{6}$	1p 2p 2p
3.	Condiții de existență: $\begin{cases}3x^2-4x-15\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}$ Rezolvare sistem de inecuații și soluție: $x\in[3,+\infty)$ Rezolvare: $2x^2=19; x_1=\sqrt{\frac{19}{2}}; x_2=-\sqrt{\frac{19}{2}}$ *nu convine*;	1p 2p 2p
4.	$p=\frac{cf}{cp}$ $cf=5;\ cp=100\quad p=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$	2p 3p
5.	$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ $\overline{AC}=\overline{i}-\overline{j}\Rightarrow\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)(1,-1)$	3p 2p

6.	$\cos 90^0=0$ $\Rightarrow \cos 1^0\cdot\cos 2^0\cdot\ldots\cdot\cos 179^0=0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=0$. Alegem un determinand de ordinul 2; $d_1=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$ Deoarece $d_1\neq 0\ \Rightarrow$ rangA = 2	3p 2p
b)	Calcul $V(x)=\begin{pmatrix}1+x&1&1\\1&2+x&3\\3&2&1+x\end{pmatrix}$ Determinare $f(x)=x^3+4x^2-5x+1$ Rezolvare ecuația $x^3+4x^2-5x+1=1$; $x_1=0, x_2=1, x_3=-5$	1p 2p 2p
c)	Presupun că există o matrice B, astfel încât $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Atunci sistemul $AB=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+3z=0\\3x+2y+z=0\end{cases}$ are soluție. Deoarece rangA =2, $\Delta_p=d_1=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}$ este minor principal. Minorul caracteristic este $\Delta_c=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\3&2&0\end{vmatrix}=-4\neq 0$. Deoarece determinantul caracteristic este nenul, conform Teoremei Rouche, sistemul este incompatibil. Deci afirmația este falsă.	1p 2p 2p
2. a)	$x*x=2x-3$ $x\circ x=x^2-6x+12$ Din $x*x=x\circ x\Rightarrow x^2-8x+15=0$ Rezolvare ecuație și soluții $x_1=5, x_2=3$	1p 1p 2p 1p

b)	$x\circ a=3\Rightarrow(x-3)(a-3)+3=3\Leftrightarrow(x-3)(a-3)=0$ Pentru $x\neq3\Rightarrow a=3$ Pentru $x=3\Rightarrow 3\circ3=0\cdot0=0$	3p 2p
c)	Sistemul devine $\begin{cases}x+y=3\\x-y=2\end{cases}$ Finalizare, $x=\frac{5}{2},y=\frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	2p 3p
b)	Știm că , pentru un $x_0\in D$, unde D este domeniul de definiție al funcției, funcția are derivată în x_0 , atunci există relația $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, finită În cazul nostru, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3}{4}$	3p 2p
c)	Domeniul de concavitate se găsește în intervalul în care $f''(x)\leq0$, iar domeniul de convexitate, în ntervalul în care $f''(x)\geq0$ $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ Din semnul funcției $f''(x)$, vedem că funcția f este strict convexă pentru $x\in(-1,+\infty)$	1p 2p 2p
2. a)	$I_1=\int_e^{e^2}x\ln x\cdot dx$	1p 3p

	Folosim formula de integrare prin părți și obținem: $I_1 = \dfrac{3e^4 - e^2}{4}$	
b)	$I_{n+1} = \int_e^{e^2} x \ln^{n+1} x \, dx$	1p
	Funcția $f : \left[e, e^2\right] \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \ln x$ este crescătoare pe domeniul de definiție, deci	1p
	$\ln^n x \le \ln^{n+1} x \Rightarrow x \ln^n x \le x \ln^{n+1} x, \forall x \in \left[e, e^2\right]$	2p
	$\Rightarrow \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx \le \int_e^{e^2} x \ln^{n+1} x \, dx \Rightarrow I_n \le I_{n+1}, \forall x \in \left[e, e^2\right], n \in \mathbb{N}$	1p
c)	După calcule, se obține	3p
	$I_n = \dfrac{e^4 \cdot 2^n - e^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right) = \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right) \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right) =$ $-2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -2\left(1 + 3\right) = -8$	3p
	$\Rightarrow \left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 = -8 \in \mathbb{Z}$	2p

2.	Ecuația admite soluții reale, dacă are $\Delta \geq 0$ $\Delta=(3a+1)^2-4a(a+3)=9a^2+6a+1-4a^2-12a=5a^2-6a+1=(a-1)(5a-1)$ $\Delta\geq 0\Rightarrow (a-1)(5a-1)\geq 0\Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right]\cup[1,+\infty)$	1p 2p 2p
3.	Condiții de existență: $\begin{cases}x-16>0\\ \log_3(x-16)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>16\\ x-16>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>16\\ x>17\end{cases}\Rightarrow x\in(17,\infty)$ Ecuația devine : $\log_3(x-16)=2\Leftrightarrow x-16=3^2\Rightarrow x=25; \mathrm{x}=5^2\in\mathbb{Z}$, care este patrat perfect	2p 3p
4.	Notez cu x prețul inițial. Reducerea cu 20%: este $\frac{20}{100}x=\frac{20x}{100}$. Prețul după reducere: $x-\frac{20x}{100}=\frac{80x}{100}$. Scumpirea se face din acest preț. Scumpirea cu 15% este: $\frac{15}{100}\cdot\frac{80x}{100}=\frac{12x}{100}$ Prețul după scumpire: $\frac{80x}{100}+\frac{12x}{100}=\frac{92x}{100}$ $\frac{92x}{100}=575\Rightarrow x=625$ lei	1p 1p 1p 1p 1p
5.	Înălțimea di C este perpendiculaă pe AB Știm că, între pantele m și m_1 a două drepte perpendiculare, există relația $m\cdot m_1=-1$. În cazul nostru: $m_h\cdot m_{AB}=-1;\ m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4}{4}=1\ \Rightarrow m_h=-1$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-1,1)$ și are panta $m_h=1$, este $y-1=1\cdot(x+1)\Leftrightarrow y-1=x+1\Leftrightarrow y=x+2$	1p 2p 2p
6.	Observ că expresia seamnănă cu formula: $2\sin x\cos x=\sin 2x$. Completând, obținem: $E(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sin 2\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sin x$ Știm că $\sin x\in[-1,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\sin x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow E_{\max}=\frac{1}{2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2$.	2p 3p
b)	Dacă $a\neq1\Rightarrow rangA=3$; dacă $a=1\Rightarrow rangA=1$ Se observă că $rangA\neq2$	3p 2p
c)	Pentru $a\neq1\Rightarrow rangA=3$, deci sistemul este compatibil determinat (Cramer) $\Delta_x=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)\Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=a+2$ $\Delta_y=\begin{vmatrix}1&a&1\\1&1&1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a^2+2a-1=-(a-1)^2\Rightarrow y=\dfrac{\Delta_y}{\det A}=-1$ $\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-a^2+2a-1=-(a-1)^2\Rightarrow z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=-1$	2p 3p
2. a)	$\hat{2}x+\hat{4}=\hat{3}+\hat{1}$ $\Leftrightarrow\hat{2}x=\hat{4}\Rightarrow x=\hat{2}$	2p 3p
b)	$\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{3}&\hat{4}\\\hat{2}&\hat{2}&\hat{1}\\\hat{3}&\hat{1}&\hat{3}\end{vmatrix}=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}-\hat{4}-\hat{3}-\hat{1}=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{4}$	3p 2p

	$\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{3} & \hat{4}\\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3}\end{vmatrix}=\hat{0}$	
c)	$\begin{cases}\hat{3}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{3}\end{cases}\Big\vert\cdot\hat{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{4}x+\hat{3}y=\hat{2}\\ x+\hat{2}y=\hat{3}\end{cases}$. Adunăm cele 2 ecuații și obținem: $\hat{0}=\hat{0}$. Rezuktă $S=\left\{\left(\hat{0},\hat{4}\right);\left(\hat{1},\hat{1}\right);\left(\hat{2},\hat{3}\right);\left(\hat{3},\hat{0}\right);\left(\hat{4},\hat{2}\right)\right\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{\left(x^2+2x\right)'\cdot(x-2)-\left(x^2+2x\right)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}$ $f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(x-2)-\left(x^2+2x\right)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x+2x-4-x^2-2x}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)}$	2p 2p 1p
b)	Graficul funcției f poate să aibă, la $-\infty$, asimptotă orizontală sau vertical. Cercetăm dacă există asimptotă orizontală: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-\infty$, deci nu există asimptotă orizontală. Cercetăm existența asimptotei oblice, care are ecuația $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]$ $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-2x}=1;\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+2x}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{x-2}=4\Rightarrow y=x+4$	1p 1p 1p 2p
c)	Punctele de extrem se află printre soluțiile derivatei I.	1p

	$f'(x)=0\Rightarrow \frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x^2-4x-4=0 \Rightarrow x_1=2(1+\sqrt{2});x_2=2(1-\sqrt{2})$ Pentru ca $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ să fie puncte de extreme trebuie ca x_1,x_2 să nu fie soluții și pentru derivata a doua. $f''(x)=\frac{16}{(x-2)^3}$, care nu are soluții. Deci Punctele de extrem ale funcției f sunt: $V_1((2+2\sqrt{2}),(3+2\sqrt{2}));V_2((2-2\sqrt{2}),(3-2\sqrt{2}))$	1p 1p 1p 1p
2. a)	Pentru n=3 avem: $\int\frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(x^4+1)'}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\varphi'}{\varphi}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert\varphi\rvert+C$ $\Rightarrow\int\frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert x^4+1\rvert+C;C\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{x}{(x^2)^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}dx=\frac{1}{2}arctg\varphi\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}arctgx^2\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ $I_3=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx\overset{cf\ a)}{=}\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert\varphi(x)\rvert\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert x^4+1\rvert\Big\vert_0^1=\frac{\ln 2}{4}$	2p 3p
c)	$\forall x\in[0,1],x^{n+1}\le x^n\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{x^4+1}\le\frac{x^n}{x^4+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^4+1}\le\int_0^1\frac{x^n}{x^4+1}\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$, adică I_n șir descrescător Deoarece I_n șir descrescător, rezultă $I_1>I_2>I_3\Leftrightarrow I_3<I_2<I_1\Rightarrow I_2\in\left(\frac{\ln 2}{4},\frac{\pi}{8}\right)$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1+x_2+2$ $a=1,b=-m,c=-1;\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{1}=m;\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-1$ Înlocuind, $\Rightarrow m^2-2(-1)=m+2 \Leftrightarrow m^2-m=0 \Rightarrow m=0;\ m=1$	3p 2p
2.	Metoda 1. Observ că șirul este format din suma numerelor naturale impare, $1+3+5+\cdots+(2n-1)$, pentru care avem relația: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, unde n este numărul de numere. Deci n=2014 Metoda 2. $x_1+x_2+\cdots+x_n=1+3+\cdots+(2n-1)=2014^2$. Ni se sugerează suma unei progresii aritmetice : $x_{n-1}=2n-3, x_n=2n-1, x_{n+1}=2n+1; \frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}=\frac{2n-3+2n+1}{2}=2n-1=x_n$. Deci elementele șirului formează o progresie aritmetică, cu $x_1=1, x_2=3; r=x_2-x_1=2$ $x_n=x_1+(n-1)r;\ S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n \Rightarrow 2014^2=\frac{1+1+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n;$ $2014^2=\frac{2(1+n-1)}{2}\cdot n \Rightarrow 2014^2=n^2 \Rightarrow n=2014$	1p 2p 2p
3.	Metoda 1. $\sqrt{3}=tg60^0=\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}$; $\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=\cos(x+y)$ $\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}\cdot\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \sin 60^0\cdot\sin x-\cos 60^0\cdot\cos x=\cos 60^0 \quad \vert\cdot(-1)$	1p 2p 2

	$\Rightarrow \cos\left(60^0+x\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{3}+x=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{\pi}{3}+x=\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi$ Metoda 2. Ecuația se mai scrie: $\sqrt{3}\cdot\sin x=1+\cos x$; dar $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, iar $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ $\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\right)=0$ $\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=0; x=\pi,\ \cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=0, tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	p
4.	Notez cu x prețul produsului. $x+\frac{24}{100}x=372$ $\frac{124}{100}x=372\Rightarrow x=372\cdot\frac{100}{124}; x=300$	2p 3p
5.	$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow 3a-(a-1)(3a-1)=0$ $\Leftrightarrow 3a-\left(3a^2-4a+1\right)=0\Leftrightarrow 3a^2-7a+1=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$	2p 3p
6.	$S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots+\sin^2 90^0=$ $=\sin^2 1^0+\sin^2 89^0+\sin^2 2^0+\sin^2 88^0+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2 46^0+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\sin^2 1^0+\sin^2\left(90^0-1^0\right)+\sin^2 2^0+\sin^2\left(90^0-2^0\right)+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2\left(90^0-46^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\left(\sin^2 1^0+\cos^2 1^0\right)+\left(\sin^2 2^0+\cos^2 2^0\right)+\cdots+\left(\sin^2 44^0+\cos^2 44^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\ ori}+\frac{1}{2}+1=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^3=A^2\cdot A$ $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	1p 2p

	$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	2p
b)	$A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A+A^t+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $d=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$. Se observă că toți determinanții de ordinal 2 sunt nuli și determinantul de ordinal 1 este $d_1=1\neq0\Rightarrow$ rang $A+A^t+I_3$ este 1	1p 1p 3p
c)	Fie $B=A+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\det\left(A+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow\exists\left(A+I_3\right)^{-1}$ și $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B^*$. Pentru a determina matricea adjunct, B^*, se construiește transpusa matricei, $B^t=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ Pe baza ei construim B^*, care este matricea complemenților algebrici ai matricei B^t: $\delta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0;\delta_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\delta_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\delta_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0;\delta_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$	1p 1p 1p 1p

	$\Rightarrow B^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\cdot B^* = B^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$	1p
2. a)	Fie $g = X^2 - 1$, cu soluțiile $x=1, x=-1$. $g \mid f \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0\\ f(-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0\\ -a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2\\ -a+b=0\end{cases} \Rightarrow b=-1, a=-1$	2p 3p
b)	$x_1 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Formez ecuația de gradul 2 care are rădăcinile x_1, x_2 și forma: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow g = X^2 - Sx + P$. $S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1;\ P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 \Rightarrow g = X^2 - X + 1$ F și g au două rădăcini comuni, deci $g \mid f$. efectuăm împărțirea și obținem restul $b - a = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow f = X^4 - 4X^3 + X - 4$	1p 2p 2p
c)	Petru a=-4, polinomul devine : $f = X^4 - 4X^3 + X - 4$ Calculăm expresia și obținem: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2} = \frac{(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)^2 - 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+\cdots)}{(x_1x_2x_3x_4)^2}$ Relațiile lui Viete : $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4\\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots = 0\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 = -1\\ x_1x_2x_3x_4 = -4\end{cases}$ Deci $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2} = \frac{16}{16} = 1$	1p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm derivata I. $f'(x) = \frac{(x^2-x+1)'\cdot(x+1)-(x^2-x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$	2p

	$f'(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$ Pentru $x\in(0,\infty)$ semnul derivatei I este: $f'(x)\le 0, pt.\ x\in\left(0,-1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow f(x)$ descrescătoare $f'(x)>0, pt.\ x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f(x)$ crescătoare.	3p
b)	$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$ $=\frac{2(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x+2)}{(x+1)^4}=\frac{6}{(x+1)^3}>0$ Deci f(x) este strict convexă pentru $x\in(0,\infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	Știm că $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ (inegalitatea mediei). Deoarece, f(x) strict crescătoare, pe $\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f\left(\sqrt{ab}\right)\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ Deoarece f(x) convexă pentru $x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right), \Rightarrow\frac{f(a)+f(b)}{2}\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.	2p 1p 2p
2. a)	$I_2=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^3+1)'}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\varphi'}{\varphi}dx=\frac{1}{3}\ln\lvert\varphi\rvert\Big\vert_1^3=$ $=\frac{1}{3}\ln\lvert 1+x^3\rvert\Big\vert_1^3=\frac{1}{3}(\ln 28-\ln 2)=\frac{1}{3}\ln 14$	3p 2p
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}<x^n\Leftrightarrow\frac{x^{n+1}}{1+x^3}<\frac{x^n}{1+x^3}\Leftrightarrow\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx$ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\lim_{n\to\infty}I_n<\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=0$ $\Rightarrow I_{n+1}<I_n$**, deci șirul este strict descrescător.**	3p 2p
c)	Conform punctului b), $I_{n+1}<I_n<I_{n-1}$.	2p

	Trecând la limită, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx < \lim\limits_{n\to\infty} I_n < \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Ştim că $b_4 = b_1 \cdot q^3$, deci $q = 3$	3p
	Atunci $S_6 = b_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 728$	2p
2.	$f(x) = y$	1p
	$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$	2p
	Punctele căutate sunt : $A(3,14)$ şi $B(-2,4)$	2p
3.	$4 = 2^2$	1p
	$2^{x-4} = 2^{2x-4}$	2p
	$x = 0$	2p
4.	Cifrele impare sunt : 1,3,5,7,9	2p
	Numarul căutat este : $A_5^4 = 120$	3p
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$	2p
	$AB = \sqrt{2}, AC = 5, BC = \sqrt{13} \Rightarrow P = 5 + \sqrt{2} + \sqrt{13}$	3p
6.	Din teorema cosinusului avem : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$	2p
	$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos A$	1p

	$\cos A=\frac{1}{8}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & -2 & -x \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A(x)+A(-x))=0$	2p 2p 1p
b)	$\det A(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix}=x^3+6x$ $\det(A(x))=0 \Leftrightarrow x(x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0$	3p 2p
c)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & -2 & -x \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} -x^2-2 & 2 & 2 \\ 2 & -x^2-5 & 1 \\ 2 & 1 & -x^2-5 \end{pmatrix}$ Suma cerută este $-3x^2-12<0$	1p 2p 2p
2. a)	$(x+5)(y+5)-5=$ $=xy+5x+5y+25-5=$ $=x\circ y$	1p 3p 1p
b)	$x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in R$ $(x+5)(e+5)-5=x \Rightarrow e+5=1 \Rightarrow e=-4$	3p 2p

c)	$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2014-ori}=(x+5)^{2014}-5$ $(x+5)^{2014}=x+5\Rightarrow x+5=0,x+5=1$ $x=-5,x=-4$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}},(\forall)x\in R$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$ Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.	1p 1p 1p 2p
c)	Vom arăta că $f'(x)>0\ \ (\forall)x\in R$ Dacă $x\geq 0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$ evident . Dacă $x<0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+1>x^2,(\forall)x\in R$ (adevărat) .	1p 1p 1p 2p

2. a)	$I_1=\int_0^1 x\cdot e^x dx=\int_0^1 x\cdot (e^x)' dx=$ $=(x-1)\cdot e^x\Big\vert_0^1=$ $=1$	2p 2p 1p
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\cdot e^x dx, n\in N$ Dar $x\in (0,1)\Rightarrow x^{n+1}<x^n \Rightarrow I_{n+1}<I_n$ Deci şirul $(I_n)_{n\in N}$ este strict descrescător .	1p 2p 2p
c)	$I_n=\int_0^1 x^n\cdot (e^x)' dx=$ $=x^n\cdot e^x\Big\vert_0^1-n\cdot\int_0^1 x^{n-1}\cdot e^x dx=$ $=e-n\cdot I_{n-1}$, de unde rezultă relaţia cerută .	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\|z\|=\dfrac{\|1+i\|^{2014}}{\|1-i\|^{2013}}$ $\|1+i\|=\|1-i\|=\sqrt{2}\Rightarrow\|z\|=\sqrt{2}$	3p 2p
2.	$x_V=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}$ $\Delta=-3\Rightarrow y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{3}{4}$	2p 3p
3.	$x>0$ $\log_2(x^2+1)=\log_2(2x)$ $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1$	1p 2p 2p
4.	Numerele de două cifre divizibile cu 5 sunt 10,15,.....95 Avem 18 cazuri favorabile şi 90 cazuri posibile $\Rightarrow P=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	2p 3p
5.	Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB $\Rightarrow M(0,0)$ Atunci $CM=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$	2p 3p

6.	$\sin C=\sin(A+B)$ $\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=$ $=\sin\frac{\pi}{4}•\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}•\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$I_2+x\cdot A=\begin{pmatrix}1-x & 2x\\ 2x & 1-4x\end{pmatrix}$ $\det(I_2+x\cdot A)=1-5x$ $1-5x=0\Rightarrow x=\frac{1}{5}$	2p 2p 1p
b)	$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -10 & 20\end{pmatrix}$ $A^2=-5A\Rightarrow A^2+5A=O_2$	3p 2p
c)	Observăm că $A^n=(-5)^{n-1}A, \forall n\in N^*$ Atunci $A+A^2+....+A^{2014}=(1-5+5^2-...-5^{2013})A=$ $=\frac{1-5^{2014}}{6}\cdot A$	1p 2p 2p
2. a)	Din condiţiile problemei , obţinem $c=1, 1+a+b+c=4, -1+a-b+c=0$ Atunci $a+b=2, a-b=0$ $a=b=c=1$	2p 2p 1p
b)	$f=X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+1)$ $x_1=-1, x_2=i, x_3=-i$	3p 2p

c)	Din relaţiile lui Viete, avem : $x_1+x_2+x_3=-a, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$ Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b<0$ Dacă toate rădăcinile ar fi reale, am avea $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$, contradicţie .	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$ Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p 2p 2p
b)	$f^{'}(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{'}=\frac{x^{'}(x^2+1)-x(x^2+1)^{'}}{(x^2+1)^2}=$ $=\frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}=$ $=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.	2p 1p 2p
c)	Vom arăta că $f\,'(x)>0,(\forall)x\in(-1,1)$ Dar $x\in(-1,1)\Leftrightarrow 1-x^2>0$ Deci $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=f\,'(x)>0$	2p 2p 1p
2. a)	$I_2=\int\limits_0^1\frac{x^2+2x+1}{x+1}dx=$ $=\int\limits_0^1(x+1)dx=$	2p 2p

	$=\frac{3}{2}$	1p
b)	Evident $\frac{x^n+nx+1}{x+1}>0,(\forall)x\in(0,1),n\in N\Rightarrow I_n>0$ Din $x\in(0,1)\Rightarrow x^n<1$ Atunci $\frac{x^n+nx+1}{x+1}<\frac{n+2}{x+1}$ Integrând inegalitatea de mai sus $\Rightarrow I_n<(n+2)\cdot\ln 2$	1p 1p 1p 2p
c)	$I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+(n+1)x+1}{x+1}dx$ $I_n+I_{n+1}=\frac{2n^2+3n+2}{n+1}+(1-2n)\ln 2$ $\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(I_n+I_{n+1})=2-2\ln 2$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se observă că avem o sumă de 7 termeni în progresie geometrică cu raţia $q=-\frac{1}{3}$ Atunci $S=\frac{3}{4}(1+\frac{1}{3^7})$	3p 2p
2.	$f(0)=1, g(0)=3$ $f(g(0))=f(3)=7, g(f(0))=g(1)=4$ $f(g(0))-g(f(0))$=3	1p 2p 2p
3.	$x\geq 3$ $x^2+1=(x-3)^2$ $6x=8\Rightarrow x=\frac{4}{3}\Rightarrow$Ecuaţia nu are soluţii reale .	1p 2p 2p
4.	Cifrele pare nenule sunt 2,4,6,8 Numărul cerut este $A_4^3=24$	2p 3p
5.	$x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ Atunci $x+y=5, x-y=-1\Rightarrow x=2, y=3$	2p 3p

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p
	$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$	1p
	$\sin 2x=\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm aria triunghiului $OA_mA_n, m,n\in N$	2p
	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2m-1 & 2m+1 & 1\\ 2n-1 & 2n+1 & 1\end{vmatrix}$	
	$\Delta=4(m-n)\Rightarrow Aria=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=2\lvert m-n\rvert$	2p
	Atunci, aria triunghiului $OA_{2013}A_{2014}$ este egală cu 2 .	1p
b)	Se verifică condiţia de coliniaritate a trei puncte : $\begin{vmatrix}2m-1 & 2m+1 & 1\\ 2n-1 & 2n+1 & 1\\ 2p-1 & 2p+1 & 1\end{vmatrix}=0$	3p
	Prin calcul, obţinem egalitatea .	2p
c)	Observăm că punctele $A_0, A_1,..., A_{2014}$ sunt coliniare (din b))	1p
	Atunci dreptele distincte sunt : $OA_0, OA_1,..., OA_{2014}, A_0A_{2014}$	2p
	În total avem 2016 drepte .	2p
2.	$(x-1)(y-1)+1=xy-x-y+2$	1p
a)	Dar $xy-x-y+2=x\cdot y-ax-ay+2$	3p
	Deci $a=1$	1p
b)	Aflăm mai întâi elementul neutru al legii : $x\circ e=e\circ x=x,\forall x\in R\Rightarrow e=2$	3p

	Verificăm condiţia de simetric : $\frac{2014}{2013}\circ 2014 = 2014\circ\frac{2014}{2013} = 2$	2p
c)	$x\circ x = x^2-2ax+2>0$, $(\forall)x\in R$ $\Delta = 4a^2-8<0$ $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} = 0$ Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' =$ $= \frac{e^x\cdot x - e^x}{x^2} =$ $= \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.	1p 2p 2p
c)	Dacă $x>1 \Rightarrow f'(x)>0$ Deci f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$ Dar $1<\ln 2013<\ln 2014 \Rightarrow f(\ln 2013)<f(\ln 2014)$ Deci $\frac{2014}{\ln 2014} > \frac{2013}{\ln 2013}$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 x\cdot(1-x)dx =$	2p

	$=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big\vert_0^1 =$ $=\frac{1}{6}$	2p 1p
b)	Arătăm că şirul $(I_n)_{n\in N}$ este strict descrescător şi mărginit Din $x\in(0,1)\Rightarrow 1-x\in(0,1)\Rightarrow(1-x)^n>(1-x)^{n+1}\Rightarrow I_{n+1}<I_n$ Evident $I_n>0$. Dar $(1-x)^n<1\Rightarrow I_n<\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$	1p 2p 2p
c)	Efectuăm schimbarea de variabilă $u=1-x$ Atunci $I_n=\int_0^1(1-u)\cdot u^n du=$ $=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	fof=2-3(2-3x)= -4+9x fof este crescătoare (9>0)	3p 2p
2.	$2^x+2^{1-x}=3\Rightarrow 2^x+\frac{2}{2^x}=3$ Notăm $2^x=y>0$ Ecuaţia devine $y^2-3y+2=0$ cu soluţiile $y_1=2, y_2=1$ $2^x=2\Rightarrow x_1=1$ şi $2^x=1\Rightarrow x_2=0$	1p 2p 2p
3.	$C_6^1=C_6^5=\frac{6!}{5!1!}=6$, $C_6^2=C_6^4=\frac{6!}{4!2!}=15$, $C_6^3=\frac{6!}{3!3!}=20$ $P=\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\frac{3}{5}$	3p 2p
4.	$\|z\|=2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2\Rightarrow a^2+b^2=4$ Ecuaţia $a^2+b^2=4$ are în $Z\times Z$ soluţiile $(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2)$	2p 3p
5.	$m_{BC}=\frac{-2-6}{5-0}=\frac{-8}{5}$ $m_{BC}\cdot m_h=-1\Rightarrow m_h=\frac{5}{8}$	1p 2p

	Ecuaţia înălţimii $y-3=\frac{5}{8}(x+1)\Rightarrow 5x-8y+29=0$	2p
6.	$\sin x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$ Deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x>0$ $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12\sqrt{10}}{49}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{vmatrix}=abc(abc+2-a-b-c)$ $abc+2-a-b-c=0$ admite, de exemplu, ca soluţie $a=b=c=1$	2p 3p
b)	Sistemul devine $\begin{cases} 4x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$. Minorul principal este $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ x,y necunoscute principale şi z necunoscută secundară şi notăm $z=\alpha$ Sistemul devine $\begin{cases} 4x+y=-1-\alpha \\ 2x+y=-1-\alpha \end{cases}$ cu soluţia $x=0,\ y=-1-\alpha,\ z=\alpha,\ \alpha\in R$	2p 1p 2p
c)	$x=y=z=1\Rightarrow\begin{cases} a^2+b+c=-1 \\ a+b^2+c=-1 \\ a+b+c^2=-1 \end{cases}$ Scăzând din prima ecuaţie pe cea de-a doua obţinem $(a-b)(a+b-1)=0$ I Dacă $a-b=0\Rightarrow a=b$ .Din a doua ecuaţie $c=-1-a-a^2$ şi înlocuit în a treia ecuaţie	1p 1p

	$\Rightarrow a^4+2a^3+3a^2+4a+2=0 \Rightarrow (a+1)^2(a^2+2)=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow a=b=c=-1$ II Dacă $a+b=1 \Rightarrow c^2=-2$ din a treia ecuaţie fals!	2p 1p
2. a)	$(x*y)*z=\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)*z=\left\{1-\left[1-\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)\right]^{\log_2(1-z)}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$ $x*(y*z)=x*\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)=\left\{1-(1-x)^{\log_2\left[1-\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)\right]}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)^{\log_2(1-z)}}=$ $=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$, deci legea este asociativă	2p 2p 1p
b)	Legea este comutativă deoarece, dacă notăm $A=(1-x)^{\log_2(1-y)}$, $B=(1-y)^{\log_2(1-x)}$ şi logaritmăm în baza 2 obţinem $\log_2 A=\log_2 B$ şi datorită injectivităţii funcţiei logaritmice $\log_2 A=\log_2 B \Rightarrow A=B \Rightarrow x*y=y*x$ $x*e=x \Rightarrow 1-(1-x)^{\log_2(1-e)}=x \Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2(1-e)}$ $\Rightarrow (x\neq 1)\ \log_2(1-e)=1 \Rightarrow e=-1\in(-\infty,1)$	2p 2p 1p
c)	$x*x*x=1-(1-x)^{\log_2{}^2(1-x)}$ (am aplicat asociativitatea legii) $x*x*x=1-(1-x)^{\log_2{}^2(1-x)}=x \Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2{}^2(1-x)} \Rightarrow \log_2{}^2(1-x)=1$ $\log_2(1-x)=\pm1 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x^4-4x+3=x^4-x-3x+3=x(x^3-1)-3(x-1)=(x-1)(x^3+x^2+x-3)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$ Cazul $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x-1)^2(x^2+2x+3)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=\frac{6}{-0}=-\infty$	2p 3p

<table>
<tr>
<td>b)</td>
<td>
$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$ $\quad f'(x)=0\Rightarrow x=1$
<table>
<tr><td>x</td><td>-∞ 1 ∞</td></tr>
<tr><td>f’(x)</td><td>-------------------------------- 0 ++++++++++++++++++++++</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗</td></tr>
</table>
Deci f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$
</td>
<td>2p
2p
1p</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>
Observăm că m>0 deoarece in caz contrar limita este $+\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-(mx^2+n)=5\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4-4x+3}-(mx^2+n)=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x+3-m^2x^4-2mnx^2-n^2}{\sqrt{x^4-4x+3}+mx^2+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4(1-m^2)-2mnx^2-4x+3-n^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}}+m+\frac{n}{x^2}\right)}$
$1-m^2=0\Rightarrow m=1$
$\frac{-2n}{2}=5\Rightarrow n=-5$
</td>
<td>2p
1p
2p</td>
</tr>
<tr>
<td>2.
a)</td>
<td>
Fie $F:R\to R$ o primitivă a funcției f.
Atunci $F'(x)=f(x)=\ln(1+e^x)>0$
Atunci f este crescătoare pe R
</td>
<td>3p
2p</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>
Notăm $\begin{array}{l}u(x)=1+e^x=t\\ e^xdx=dt\end{array}$ Atunci u(0)=2, u(1)=1+e
Integrala devine $\int_0^1\ln(1+e^x)e^xdx=\int_2^{e+1}\ln t dt= t\ln t|_2^{e+1}-\int_2^{e+1}1dt=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-t|_2^{e+1}$
</td>
<td>2p
2p
1p</td>
</tr>
</table>

	Finalizare I= $=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2+1-e$	
c)	Fie F(t) o primitivă a funcţiei f. Atunci $g(x)=F(t)\|_0^{\ln x}=F(\ln x)-F(0)$ $g'(x)=F'(\ln x)-0= f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\ln\left(1+e^{\ln x}\right)\frac{1}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Nicolaescu Nicolae

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(2x+3yi)-(y-xi)=2+i \Rightarrow (2x-y)+(x+3y)i=2+i$ $\begin{cases}2x-y=2\\ x+3y=1\end{cases}$ cu soluţia $x=1,\ y=0$	2p 1p 2p
2.	$\log_3^2 x+\log_3 9x-4=0 \Rightarrow \log_3^2 x+\log_3 9+\log_3 x-4=0 \Rightarrow \log_3^2 x+\log_3 x-2=0$ Notăm $\log_3 x=y$ Ecuaţia devine $y^2+y-2=0$ cu soluţiile $y_1=1,\ y_2=-2$ $\log_3 x=1 \Rightarrow x_1=3,\ \log_3 x=-2 \Rightarrow x_2=\frac{1}{9}$	2p 2p 1p

3.	$G_f \cap Ox = \phi \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m < 0 \Rightarrow m \in (0,3)$	2p 3p
4.	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^8}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu raţia $q = \frac{1}{3}$ $S = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3^9 - 1}{2 \cdot 3^8}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = \frac{2-a}{-4}, m_{CD} = \frac{-a}{2}$ $AB \perp CD \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$ $\frac{2-a}{-4} \cdot \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$ $a_1 = 4, a_2 = -2$	2p 1p 1p 1p
6.	$\sin 135^o = \sin(180-45)^o = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 150^o = -\cos(180-30)^o = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}\sin 135^o}{\cos 150^o} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2 \in Z$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Observăm că M(x)M(y)=M(x+y), $\forall$x,y$\in$ R Înmulţirea matricelor este asociativă, deci asociativitatea este verificată pe G. $M(x)M(y) = M(y)M(x) = M(x+y), \forall x, y \in R$, deci înmulţirea matricelor este comutativă pe	 1p 1p

a)	G Deoarece $\mathrm{M}(\mathrm{x})M(0)=M(0)M(x)=M(x),\forall x\in R$,deci elementul neutru este $M(0)=I_2$ $M(x)M(-x)=M(-x)M(x)=M(0),\forall x\in R$ deci orice element M(x) este simetrizabil şi simetricul său este M(-x) Deci $(G,\cdot)$ grup abelian	1p 1p 1p
b)	Considerăm $f:R\to G, f(x)=M(x)$ evident bijectivă $f(x+y)=M(x+y)=M(x)M(y)=f(x)f(y)$ deci f izomorfism Atunci $(R,+)\simeq(G,\cdot)$	2p 2p 1p
c)	$M(x)\cdot M(2x)\cdot\ldots\cdot M(2012x)=M(x+2x+\ldots+2012x)=M(1006\cdot 2013x)$ $\det\left(M(1006\cdot 2013x)\right)=30^{1006\cdot 2013x}$ $30^{1006\cdot 2013x}=30^{2012}\Rightarrow x=\frac{2}{2013}$	2p 2p 1p
2. a)	$g=X+\hat{3}=X-\left(-\hat{3}\right)=X-\hat{2}$ $f(\hat{2})=\hat{3}+\hat{3}+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow g/f$	2p 3p
b)	$f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}=\left(X+\hat{3}\right)\left(X^2+\hat{4}X+\hat{3}\right)=\left(X+\hat{3}\right)\left(X+\hat{3}\right)\left(X+\hat{1}\right)$ $f=\left(X+\hat{3}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$ descompunerea lui f în $Z_5[X]$	4p 1p
c)	$\left(\hat{a}x+\hat{b}\right)^2=\hat{4}x^2+x+\hat{1}\Rightarrow\hat{a}^2x^2+\hat{2}\hat{a}\hat{b}x+\hat{b}^2=\hat{4}x^2+x+\hat{1}$ $\hat{a}^2=\hat{4}\Rightarrow\hat{a}=\hat{2}\ sau\ \hat{a}=\hat{3}$ $\hat{a}=\hat{2}\Rightarrow\hat{4}\hat{b}=\hat{1}\Rightarrow\hat{b}=\hat{4}$ (prima soluţie) $\hat{a}=\hat{3}\Rightarrow\hat{b}=\hat{1}$ (a doua soluţie)	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)=e^x\left[ax^2+x\left(b+2a\right)+b+c\right]$ $\begin{cases}a=3\\b+2a=7\\b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\\c=2\end{cases}$	2p 3p
b)	Studiem existenţa asimptotei orizontale $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(3x^2+x+2\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x+1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6}{e^{-x}}=0$ $y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p 3p 1p
c)	$f(\ln x)=6x\Rightarrow e^{\ln x}\left(3\ln^2x+\ln x+2\right)=6x\Rightarrow x\left(3\ln^2x+\ln x+2\right)=6x$ $3\ln^2x+\ln x+2=6\Rightarrow3\ln^2x+\ln x-4=0$ cu soluţiile 1 şi $-\frac{4}{3}$ $\ln x=1\Rightarrow x_1=e$ $\quad\ln x=-\frac{4}{3}\Rightarrow x_2=e^{-\frac{4}{3}}$	2p 1p 2p
2. a)	f continuă pe (-∞,0) şi (0, ∞) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2\sin x=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x+1)=0$, f(0)=0 deci f continuă in punctul 0 Deci f continuă pe R$\Rightarrow$f admite primitive pe R	2p 2p 1p
	$\int x^2\sin xdx=\int x^2\left(-\cos x\right)'dx=-x^2\cos x+\int2x\cos xdx=-x^2\cos x+2\int x\left(\sin x\right)'dx$ $=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_1$ $\int\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_2$	1p 1p

b)	$F(x)=\begin{cases}-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_1, x\le 0\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_2, x>0\end{cases}$ F admite primitive pe R,deci F derivabilă pe R $\Rightarrow$ F continuă pe R $\Rightarrow$ Fcontinuă în 0 $\Rightarrow 2+C_1=C_2$ $F(0)=1\Rightarrow C_1=-1\Rightarrow C_2=1$ Deci $F(x)=\begin{cases}-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x-1, x\le 0\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+1, x>0\end{cases}$	1p 1p 1p
c)	Cazul $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\infty\overset{l'Hospital}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x+1}}{2}=\frac{1}{2}$	1p 4p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^3=\frac{x+5x+4}{2}\Rightarrow x^3-3x-2=0$ $(x+1)(x^2-x-2)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1,\ x_3=2$	2p 3p
	$A_n^3=n, n\in N, n\ge 3\Rightarrow n(n-1)(n-2)=6n\Rightarrow n^2-3n-4=0$	2p

2.	$n_1=4,\ n_2=-1\notin N$ $S=\{4\}$	2p 1p
3.	Condiţii: $\begin{cases}3-x\geq 0\\ 5x+9\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{9}{5},3\right]=D$ Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalităţii $\Rightarrow 3-x+2\sqrt{(3-x)(5x+9)}+5x+9=4\Rightarrow\sqrt{(3-x)(5x+9)}=2-2x$ Ridicăm din nou la pătrat ambii membri ai egalităţii $9x^2-14x-23=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{23}{9}\in D$ dar $x_2=\frac{23}{9}$ nu verifică ecuaţia deci S={-1}	1p 2p 2p
4.	$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left\{\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2k\pi,k\in Z\right\}$ $\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,k\in Z\right\}$ $x\in[0,2\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right\}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert\cdot\cos(\measuredangle BAD)$ $\cos 75^o=\cos(45^o+30^o)=\cos 45^o\cos 30^o-\sin 45^o\sin 30^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert\cdot\cos(\measuredangle BAD)=24\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	2p 2p 1p
6.	$-1\leq x^2+x+1\leq 1\Rightarrow\begin{cases}x^2+x+2\geq 0\\ x^2+x\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in R\\ x\in[-1,0]\end{cases}$ În final $x\in[-1,0]$	4p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -3\\ 12 & -3\end{pmatrix}$ $-3A=\begin{pmatrix}12 & -3\\ 12 & -3\end{pmatrix}$ deci $A^2=-3A\Rightarrow A\in M$	2p 2p 1p
b)	Fie $A\in M\Rightarrow A^2=-3A$ $\det A^2=\det(-3A)\Rightarrow(\det A)^2=9\det A$ deci $\det A=0$ sau $\det A=9$	1p 2p 2p
c)	$A^2-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$ $-3A-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2\Rightarrow-3A-trA\cdot A=O_2\Rightarrow(-3-trA)A=O_2$ $A\neq O_2$ deci $trA=-3$	2p 2p 1p
2. a)	$m_{AB}=\frac{3-1}{2-(-1)}=\frac{2}{3},\ m_{CD}=\frac{-2-0}{-2-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow AB\,//\,CD$ (1) $m_{BC}=\frac{0-3}{1-2}=3,\ m_{AD}=\frac{-2-1}{-2-(-1)}=3\Rightarrow BC\,//\,AD$ (2) Din (1) şi (2) obţinem că ABCD paralelogram	2p 2p 1p
b)	$A_{ABCD}=2\cdot A_{ABC}$ $=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\right\|=7$	2p 3p
c)	Ecuaţia dreptei BC: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{0-3}\Rightarrow 3x-y-3=0\Rightarrow M(\alpha,3\alpha-3)$ $\|AM\|=\sqrt{(\alpha+1)^2+(3\alpha-4)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow 10\alpha^2-22\alpha+17=5$	2p 2p

	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{6}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{2012}{x}} \cdot \frac{-2012}{x^2} = \frac{-2012}{x(x+2012)}$ $f''(x) = \frac{4024(x+1006)}{x^2(x+2012)^2} > 0$ Deci f' crescătoare pe domeniul maxim de definiţie	2p 2p 1p
b)	Cazul 1^∞ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f(n)\right]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}\cdot n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{Cazul\ \frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+2012}\cdot\frac{-2012}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2012n}{n+2012} = 2012$ Rezultatul final este e^{2012}.	2p 2p 1p
c)	f continuă pe [1,2] şi derivabilă pe (1,2) Aplicăm teorema lui Lagrange şi rezultă că $\exists c \in (1,2)$ astfel încât $f(2) - f(1) = f'(c)$ $\ln(1007) - \ln(2013) = \frac{-2012}{c(c+2012)} \Rightarrow \frac{2012}{c(c+2012)} = -\ln\frac{1007}{2013}$	1p 1p 3p
2. a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)dx = \left(x - x^3\right)\Big\rvert_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$	5p

b)	$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[(1-3x^2)^n - (1-3x^2)^{n+1}\right]dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^n 3x^2 dx > 0$ Deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător şi deoarece $(1-3x^2)^n \ge 0 \Rightarrow I_n \ge 0$ deci şirul este mărginit. Deoarece şirul este monoton şi mărginit ,rezultă $(I_n)_{n\ge1}$ convergent	2p 2p 1p
c)	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^n x'dx = x(1-3x^2)^n \Big\|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x(1-3x^2)^{n-1}(-6x)dx$ $I_n = -2n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^{n-1}(1-3x^2-1)dx \Rightarrow I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1} \Rightarrow I_n(2n+1) = 2nI_{n-1}$ $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \frac{4n^2-4n}{4n^2-1}I_{n-2}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)(2-3i)=5-i$ $\|z\|=\sqrt{26}$	3p 2p
2.	$4^{x+1}-2^{x+2}+1=0 \Rightarrow 4\cdot 4^x-4\cdot 2^x+1=0$ Notăm $2^x=y$ și obținem ecuația $4y^2-4y+1=0$ $y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-1$	1p 2p 2p
3.	$f_{\min}=\frac{-\Delta}{4a}$ $f_{\min}=\frac{-25}{4}$	2p 3p
4.	$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$ $P=\frac{13}{90}$	2p 3p
5.	A(2,3) , B(-1,5) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{13}$	2p 2p 1p

6.	$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}=13+6\sqrt{3}$ $BC=\sqrt{13+6\sqrt{3}}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$D(x)=\left(2^x+x\right)^2$ D(x) este pătrat perfect	3p 2p
b)	$D(0)=\left(2^0+0\right)^2=1$	5p
c)	$D(x)=2^{2x}\Rightarrow x(x+2^{x+1})=0$ $x=0\ sau\ x=-1$	2p 3p
2. a)	$(x*y)*z=\sqrt{x^2y^2z^2-3x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2+9x^2+9y^2+9z^2-24}$ Analog, $x*(y*z)=\sqrt{x^2y^2z^2-3x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2+9x^2+9y^2+9z^2-24}$ Legea este asociativă	2p 2p 1p
b)	$x^2e^2-3x^2-3e^2+12=x^2$ $e^2=4\Rightarrow e=\pm 2$ $e=2\in G$	2p 2p 1p
	$x^2-3x^2-3+12=1$	2p

c)	$x=\pm2$ x=2$\in G$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{cases}1+\frac{2014}{x}>0\\ x\neq0\end{cases}$ $x\in(-\infty,-2014)\cup(0,\infty)$	2p 3p
b)	$f'(x)=\frac{-2014}{x(x+2014)}$	5p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2014}{x}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2014}{x}\right)\right)=\ln1=0$ y=0 asimptotă orizontală către $+\infty$	3p 2p
2. a)	f continuă pe ($-\infty$,0) și (0,∞) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)=0$ f continuă pe R, deci f admite primitive pe R	1p 3p 1p
b)	$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xe^{x}dx=xe^{x}\Big\|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x}dx$ Rezultat final $\frac{2-e}{e}$	2p 3p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin^3x}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sin x$ =1$\cdot$0=0	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left[\sqrt{2014}\right]=44$ $\sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}=1$ $\left[\sqrt{2014}\right]+\sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}=45$	2p 2p 1p
2.	Condiția ca șirul să fie progresie aritmetică $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\forall n\ge 2$ $5n-3=\frac{5n-8+5n+2}{2}$ deci șirul este o progresie aritmetică	2p 3p
3.	$x_1+x_2=-3,\ x_1x_2=3$ $x_1^2+x_2^2=(-3)^2-2\cdot 3=3$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{3}{3}=1$	2p 2p 1p
4.	$f\circ f=f\Rightarrow 9x+4=1+3x$ $x=-\frac{1}{2}$	3p 2p
	$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{3}{9}+\sin^2x=1\Rightarrow\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	2p

5.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{2}$	2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 8\cdot \sin\frac{\pi}{6}}{2}=12$ $A_{\Delta ABO}=\frac{A_{\Delta ABC}}{2}=6$ (BO mediană în triunghiul ABC)	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Determinantul este egal cu $3m^2+3m$	5p
b)	$\det A\neq 0$ $3m^2+3m\neq 0\Rightarrow m\in R-\{-1,0\}$	2p 3p
c)	Pentru m= -1 sistemul devine $\begin{cases}x+2y-3z=1\\-x-y+z=-1\\x+y-z=2\end{cases}$ Adunând ecuația a doua și ecuația a treia obținem 0=1 Sistemul este incompatibil	1p 3p 1p
2. a)	f(0)=1	5p
	$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{-1}{2}\Rightarrow m^2+n^2+m+n=-\frac{1}{2}$	2p

b)	$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$ $m=n=-\frac{1}{2}$	2p 1p
c)	$f=X^3-X^2+X+1$ $S=\left[\frac{100\cdot101}{2}\right]^2-\frac{100\cdot101\cdot201}{6}+\frac{100\cdot101}{2}+100$ S=25.169.300	1p 3p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=-\frac{4028}{(x-2)^2}$	5p
b)	$f'(x)<0$ pe intervalele (-∞,2) și (2,∞) deci f descrescătoare pe (-∞,2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2014$ $f(x)<2014, \forall x\in(-\infty,2)$	1p 3p 1p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} arctg^2\sqrt{x-2}\cdot f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{arctg^2\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2014x$ $=1\cdot4028=4028$	3p 2p
2. a)	$f'(x)=g(x)$ f este o primitivă a lui g	4p 1p
b)	$\int_1^e g(x)dx=x^3(\ln x-1)\Big\|_1^e=1$	5p

c)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3\ln x-\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}-0$	2p
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-3x^2}{x^6}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x^3}{-3}=0$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Condiții de existență x+2>0, x>0 deci $x\in(0,\infty)$	2p
	$\log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x-8=0$	2p
	x=2	1p
2.	$b_5=b_3\cdot q^2\Rightarrow 48=12\cdot q^2\Rightarrow q=\pm2$	3p
	$b_9=b_5\cdot q^4=768$	2p
3.	D=R	1p
	$2-x=x^3\Rightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$	3p
	x=1	1p

4.	$\frac{i^{2014}}{i+1}=\frac{-1}{i+1}=\frac{-1+i}{2}$ Partea imaginară este egală cu $\frac{i}{2}$	3p 2p
5.	$tg\frac{11\pi}{4}=tg\left(\frac{11\pi}{4}-3\pi\right)=-tg\frac{\pi}{4}$ Rezultat final -1	3p 2p
6.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ T.Pitagora în triunghiul ABC, obținem AC=10.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A+xI_2=\begin{pmatrix}2+x & 3\\ 1 & -1+x\end{pmatrix}$ $\det\left(A+xI_2\right)=x^2+x-5$ $x^2+x-2=0,\ x_1=1, x_2=-2$	1p 2p 2p
b)	Fie $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ Obținem sistemul $\begin{cases}2x+3y=1\\ x-y=2\end{cases}$ $x=\frac{7}{5},\ y=-\frac{3}{5}$	2p 3p
c)	$A-xB=\begin{pmatrix}2-2x & 3+x\\ 1-x & -1+x\end{pmatrix}$ $\det\left(A-xB\right)=-x^2+6x-5$ $\forall x\ par \Rightarrow \det\left(A-xB\right) impar$ deci matricea este inversabilă	1p 2p 2p

2. a)	$x_1x_2x_3=\frac{-\hat{1}}{m}=\hat{6}m^{-1}$ $\hat{6}m^{-1}=\hat{3}\Rightarrow \hat{3}m=\hat{6}\Rightarrow m=\hat{2}$	2p 3p
b)	$f(\hat{1})=\hat{0}$	5p
c)	Câtul $q=X^2+\hat{3}X+\hat{6}$ Restul $r=\hat{0}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=e^x+2014$ $f''(x)=e^x>0$ f convexă pe R	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2014x=-\infty$ deci graficul nu admite asimptotă orizontală $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+2014x}{x}=2014$ $n=0$ y=2014x asimptotă oblică spre -∞	2p 1p 1p 1p
c)	$f'(0)=2015$ $y-1=2015x$ ecuația tangentei	2p 3p
2. a)	$I_1=\frac{\pi-\ln 2-1}{2}$	5p
	$1\le(x+1)^n\le 2^n, \forall x\in[0,1]$	1p

b)	$\int_0^1 arctgxdx \le I_n \le \int_0^1 2^n arctgxdx$ $\frac{\pi}{4}-\ln 2 \le \frac{\pi-\ln 4}{4} \le I_n \le 2^n\left(\frac{\pi-\ln 4}{4}\right) \le 2^n\frac{\pi}{4}$	2p 2p
c)	$A=\int_0^{\frac{1}{2}} arctg2xdx = xarctg2x\Big\vert_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{2}{1+4x^2}dx$ $A=\frac{\pi-2\ln 2}{8}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Oancea Cristina

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{(-m)^2-4m}{4m}=4 \Rightarrow -m^2+4m=16m$ $\Rightarrow -m^2=12m \Leftrightarrow m=-12$	3p 2p
2.	Notam cu t=$3^x \Rightarrow 2t^2-3t+1=0$ $\Delta=3^2-2\cdot 4\cdot 1=1$ $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{3+1}{4}=1$	1p 2p 2p
3.	$\overrightarrow{M}(\frac{2+10}{4};\frac{3+17}{4})=\overrightarrow{M}(3;5)$	1p 2p 2p
4.	$\frac{3}{a}=\frac{2}{6}\Rightarrow a=9$	2p

		3p
5.	$\sin 135^\circ = \sin(180-135)^\circ = \sin 45^\circ$ $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$	2p 3p
6.	$tgx + 2ctgx = 3ctgx \Rightarrow tgx = ctgx$ $\Rightarrow x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$m \cdot 1 - 2 + 4 = 4 \Rightarrow m - 2 = 0$ $\Rightarrow m = 2$	2p 2p 1p
b)	$\Delta = -2m - 4 - 6 + 24 + 2m + 1 = 15 \neq 0$	3p 2p
c)	$15 < 16$	1p 2p 2p

2. a)	$\left(\frac{-12}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{6}{6} = 4-2=2$	1p 3p 1p
b)	a=14, b=10	3p 2p
c)	$2\cdot(x+2)(3\cdot \mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}^2+1)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2+5x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+6x+9-x^2-5x}{x+5})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+9}{x+5}=$ $y=1\cdot x+1=x+1$	2 p 2 p 1 p

b)	$\frac{(2x+6)(x+5)-(x^2+6x+9)}{(x+5)^2}$ $=\frac{2x^2+10x+6x+30-x^2-6x-9}{(x+5)^2}\Leftrightarrow$ $\frac{x^2+10x+21}{(x+5)^2}=0\Rightarrow x_1=3;\mathrm{x}_2=7$	1p 1p 1p 2p
c)	$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $f(x_0)=\mathrm{y}_0\Rightarrow y_0=\frac{9}{5}$ $y-\frac{9}{5}=\frac{21(x-0)}{5}\Rightarrow y=\frac{9}{5}+\frac{21x}{5}$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}e^x+1=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}2-x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x=0}}2-x\Rightarrow$ $e^0+1=2-0=2-0=1+1=2=2$ $2=2=2$	2p 2p 1p

b)	$\pi\int_0^1 (2-x)^2 dx = \pi\int_0^1 (4-4x+x^2)dx$ $=\pi(4x-2x^2+\frac{x^3}{3})\Big\vert_0^1 = \pi\cdot(2+\frac{1}{3}) = \pi\cdot\frac{7}{3}$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^1 x\cdot(2-x)dx = \int_0^1 2x-x^2dx = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1$ $=1-\frac{1}{3}+\zeta=\frac{2}{3}+\zeta$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Oancea Cristina

◆ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

◆ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{3^{2015}-1}{2}\cdot\frac{2}{3^{2015}-1}=1$	3p 2p
2.	$A_5^4=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1}=120$	1p 2p 2p
3.	$\left[(1-i)^2\right]^{1007}+\left[(i+1)^2\right]^{1007}$ $=(-2i)^{1007}+(2i)^{1007}=2+2=4$	1p 2p 2p

4.	$\Delta = 25 - 24 = 1$ $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$ $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow V(\frac{-1}{4}; \frac{5}{2})$	2p 3p
5.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$	2p 3p
6.	$\sin 35^\circ + \cos 35^\circ - \cos 35^\circ - \sin 35^\circ$ $\cos 145^\circ = -\cos(180-145)^\circ = -\cos 35^\circ$ $\sin 145^\circ = \sin(180-145)^\circ = \sin 35^\circ$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} + ... \begin{pmatrix} 5^{2014} & 0 \\ 0 & 5^{2014} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{5^{2015}-2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5^{2015}-2}{4} \end{pmatrix} = \frac{5^{2015}-2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2 p 2 p 1 p

b)	$\det A = 5\cdot 5 - 0\cdot 0 = 25$ $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$	3 p 2 p
c)	$5^{2n} = 3\cdot 5^{2n} - 1250$ $-2\cdot 5^{2n} = -1250$ $5^{2n} = 625 \Rightarrow n = 2$	1 p 2 p 2 p
2. a)	$C = x^3 + 6x + 4$ $restul = 0$	1 p 3 p 1 p
b)	$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^2 + x_4^2 = 64 - 12 = 52$	3 p 2 p
c)	$f(x) = (x-8)\cdot(\mathrm{x}^3 + 6x + 4)$	2 p 2

		p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$(x^2-1)\cdot\ln x+2\cdot x\cdot\ln x-\dfrac{(x^2-1)}{x}=0$ $\dfrac{x\cdot\ln x(x^2+2x-1)-x^2-1}{x}=0$ $\Rightarrow x=1$	2 p 2 p 1 p
b)	$f(x)\swarrow(-\infty;1)$ $f(x)\nearrow(1;+\infty)$	1 p 1 p 1 p 2 p
c)	$y-y_0=f'(1)(x-1)$ $y_0=f(1)=0$ $f'(1)=0$ $y=0$	1 p 1 p

		1 p 2 p
2. a)	$\int_{-2}^{2} \frac{x+3-5}{x+3} dx = \int_{-2}^{2} \frac{x+3}{x+3} dx - \int_{-2}^{2} \frac{-5}{x+3} dx$ $= \int_{-2}^{2} 1 dx + 5 \int_{-2}^{2} \frac{1}{x+3} dx = x \Big\|_{-2}^{2} + 5 \cdot \ln \|x+3\| \Big\|_{-}^{2}$ $= 2+2+5 \cdot \ln \|5\| - 5 \cdot \ln \|1\| = 4 + 5 \cdot \ln \|5\| + \zeta$ $\int_{-2}^{2} x - 2 dx = \frac{x^2}{2} - 2x \Big\|_{-2}^{2} = \frac{4}{2} - 4 - \frac{4}{2} - 4 = -$	2 p 2 p 1 p
b)	$\int_{-2}^{2} x - 2 dx = \frac{x^2}{2} - 2x \Big\|_{-2}^{2}$ $= \frac{4}{2} - 4 - \frac{4}{2} - 4 = -8 + \wp$	1 p 1 p 1 p 2 p

c)	$\pi\int_0^2\left[\frac{(x-2)^2}{x+3}\cdot x+3\right]^2dx$	2p
	$=\pi\int_0^2(x-2)^4dx=\pi\int_0^2 1\cdot(x-2)^4dx$	1p
	$u(x)=x-2\Rightarrow u'(x)=1$	2p
	$\Rightarrow\pi\frac{(x-2)^5}{5}\Big\|_0^2=\pi\cdot\frac{(-2)^5}{5}$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Oancea Cristina

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$A_n^1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)} = n$ $C_n^1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)\cdot n}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)} = n$ $n+n=36 \Rightarrow 2n=36 \Rightarrow n=18$	3p 2p
2.	$215+\frac{10}{100}\cdot 215 = 215+21,5 = 236,5$	1p 2p 2p
3.	$(\sqrt{6})^2 < 3^2 < (\sqrt{12})^2$	1p 2p 2p

4.	$-11 \le 3 \cdot x + 2 \le 11$ $-13 \le 3 \cdot x \le 9$ $\Rightarrow \frac{-13}{3} \le x \le 3$ $x \in \left[\frac{-13}{3};3\right]$	2p 3p
5.	m=0 m=2	2p 3p
6.	$\cos 120^\circ = -\cos(180-120)^\circ = -\cos 60^\circ$ $\cos 110^\circ = -\cos(180-110)^\circ = -\cos 70^\circ$ $\cos 100^\circ = -\cos(180-100)^\circ = -\cos 80^\circ$ $\cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ$ $-\cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \cos 60^\circ = 0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 20 & -17 \\ 72 & 25 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ -56 & -23 \end{pmatrix}$ $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 32 & -12 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$	2 p 2 p 1 p
b)	Det(A+B)=8· 8=64 Det(A)=38	3 p 2

	Det(B)=30 $\Rightarrow Det(A+B)\neq Det(\mathrm{A})+\mathrm{Det(B)}$	p
c)	$C=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8^2&0\\0&8^2\end{pmatrix}+\ldots\ldots\begin{pmatrix}8^{2014}&0\\0&8^{2014}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}\frac{8^{2014}-2}{7}&0\\0&\frac{8^{2014}-2}{7}\end{pmatrix}=\frac{8^{2014}-2}{7}\bullet\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $=\frac{8^{2014}-2}{7}\cdot I_2$	1 p 2 p 2 p
2. a)	$C=x^2-5x+6$ $restul=0$	1 p 3 p 1 p
b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2$ =81-2· 26=81-52=29	3 p 2 p
c)	(x-4)(x-3)(x-2)	2 p 2

		p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{-3}{x^2}-\frac{3}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{10}{3}$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3+x^3}{x^3\cdot(x+2)^3}=\frac{1}{\infty}=0$	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} x^4\cdot\left[\frac{-3\cdot(x^2+4x+4)-3x^2}{x^2\cdot(\mathrm{x}+2)^2}\right]$ $=\lim\limits_{x\to\infty} x^4\cdot\frac{(-12x+12)}{x^4+4\cdot x^3+4x^2}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^4(x-1)}{x^4+4x^3\_4x^2}=-12$	1p 1p 1p 2p

2. a)	$\int_0^3 (x-3)^2 dx = \int_0^3 x^2 - 6x + 9 dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 9x \Big\|_0^3$ $= \frac{27}{3} - 6\frac{9}{2} + 9 \cdot 3 = 9 - 27 + 27 = 9 + \wp$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^3 (x-3)^{2014} dx = \frac{(x-3)^{2015}}{2015} \Big\|_0^3 = \frac{3^{2015}}{2015} + \wp$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^3 x \cdot f_n(x) dx$ $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = (x-3)^n \Rightarrow g(x) = \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$ $x \cdot \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} - \int_0^3 \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} dx$ $= \frac{x \cdot (x-3)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(x-3)^{n+2}}{n+2} \Big\|_0^3 =$ $= \frac{-(-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \wp$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Oláh Csaba

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ raţia progresiei, atunci $x=1+3(n-1)=3n-2$ $1+4+7+...+3n-2=\frac{n}{2}\cdot(3n-1)\Rightarrow n(3n-1)=290$, $n=10$ $x=3n-2=30-2=28$.	1p 2p 2p
2.	Din relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2=m+1$ şi $x_1\cdot x_2=m\Rightarrow m\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)=m\frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2}=$ $=\cancel{m}\cdot\frac{\cancel{m}+1-\cancel{m}}{\cancel{m}}=1$ nu depinde de m.	2p 3p
3.	Împărţind ecuaţia la $\sqrt{2}$, se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,2\pi]$ atunci $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.	3p 2p
4.	$T_{k+1}=C_{150}^{k}\left(\sqrt{a}\right)^{150-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{k}=C_{150}^{k}a^{\frac{150-k}{2}}\cdot4^{k}\cdot a^{\frac{-k}{3}}=C_{150}^{k}4^{k}\cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conţine $a\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{450-5k}{6}=0\Rightarrow5k=450\Rightarrow k=90$, termenul fără a: $T_{91}=C_{150}^{90}4^{90}$.	2p 1p 2p
5.	$\begin{vmatrix}1&2m+1&1\\2&9&1\\4&4m+1&1\end{vmatrix}=0\overset{l_2-l_1}{\underset{l_3-l_1}{\Rightarrow}}\begin{vmatrix}1&2m+1&1\\1&8-2m&0\\3&2m&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&8-2m\\3&2m\end{vmatrix}=0$	3p

	adică $8m=24\Rightarrow m=3$	2p
6.	$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+64}=\frac{1}{65}\Rightarrow$ $\overset{x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Rightarrow}\cos x=-\frac{\sqrt{65}}{65}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det V(1,2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{\underset{c_3-c_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}=8-6=2$ $=2$.	4p 1p
b)	$V(a,b,c)\cdot{}^tV(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3&a+b+c&a^2+b^2+c^2\\a+b+c&a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3\\a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3&a^4+b^4+c^4\end{pmatrix}$.	3p 2p
c)	$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{=(x-1)(x+1)}-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)^2(x+2)$, $x_1=x_2=1, x_3=-2\Rightarrow\det V(1,1,-2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&1&4\end{vmatrix}\overset{c_1=c_2}{=}0$.	3p 2p
2. a)	$f(k)=k(k+3)(k+1)(k+2)=\left(\underbrace{k^2+3k}_{=t}\right)\left(\underbrace{k^2+3k}_{=t}+2\right)=t(t+2)=$ $=t^2+2t>t^2$, dar $t^2+2t=(t+1)^2-1<(t+1)^2$, $\left(k^2+3k\right)^2<f(k)<\left(k^2+3k+1\right)^2\Rightarrow f(k)\neq m^2, m\in Z$	2p 3p 1p
b)	$f(k)=-1\Leftrightarrow\left(k^2+3k\right)^2+2\left(k^2+3k\right)+1=0\Rightarrow$	2p

	$\Rightarrow\left(k^2+3k+1\right)^2=0$, de unde $k^2+3k+1=0$ $k\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	1p 2p
c)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=$ $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+3\right)=$ $=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)}{(x-1)(x-4)}=$ $=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x+3)(x+7)}{x-4}=\frac{-4\cdot 4\cdot 8}{-3}=\frac{128}{3}$.	2p 3p
b)	Funcţia f se scrie $f(x)=(x-5)(x+7)(x-1)(x+3)=\left(x^2+2x-35\right)\left(\underbrace{x^2+2x-3}_{=t}\right)=(t-32)t=$ $=t^2-\underbrace{32}_{=2\cdot 16}t+16^2-16^2=(t-16)^2-256=\left(x^2+2x-19\right)^2-256$ $f'(x)=2\left(x^2+2x-19\right)(2x+2)=4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)$ $f'(2)=4\cdot 3\cdot(4+4-19)=-44\cdot 3,\ f(2)=-3\cdot 5\cdot 9=-45\cdot 3$ $\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{-44\cdot 3}{-45\cdot 3}=\frac{44}{45}$.	3p 2p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x_1=-1$, sau	2p

	$x^2+2x-19=0$, $x_{2,3}=-1\pm2\sqrt{5}$ $x\in\left\{-1-2\sqrt{5},-1,-1+2\sqrt{5}\right\}$ toate trei rădăcini sunt reale.	2p 1p
2. a)	$f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^2-x+1}=\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2-x+1}=$ $=\frac{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}{x^2-x+1}=x^2+x+1$ $\int f(x)dx=\int(x^2+x+1)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.	2p 1p 2p
b)	$H'(x)=h(x)=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}>0\Rightarrow$ $\Rightarrow H$ este o funcție crescătoare.	3p 2p
c)	$\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_0^1(x^2+x+1)dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=(*)$ $\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\vert_0^1=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\underbrace{arctg\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}}-\underbrace{arctg\frac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ $(*)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg\vert_0^1+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}=\frac{11}{6}+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.	1p 2p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{100}=\left[\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\right]^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\left(\underbrace{i^2}_{=-1}\right)^{25}=-2^{50}$, în mod similar $(1-i)^{100}=-2^{50}\Rightarrow(1+i)^{100}+(1-i)^{100}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}\in Z$.	3p 2p
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+5=4x-7\Rightarrow x^2-8x+12=0$, $x_1=2$, $x_2=6$ $g(2)=1$ şi $g(6)=17$ Punctele de întâlnire $A(2,1)$ şi $B(6,17)$.	2p 2p 1p
3.	$3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\left(=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}\right)$, ecuaţia se poate scrie $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=2$, dar $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}\geq 2, x\in R\Rightarrow\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-x}\Rightarrow x=-x$, adică $x=0$.	2p 3p
4.	Cifre, numere prime, sunt $2,3,5,7$, numere de 3 cifre prime distincte $A_4^3=4!=24$ În total sunt 900 numere de 3 cifre Probabilitatea $p=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$.	2p 1p 2p
5.	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$, $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{1+(2m+1)^2}=\sqrt{4m^2+4m+2}$ $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{2}\Rightarrow 4m^2+4m+2=2$, adică $4m(m+1)=0$ de unde $m\in\{-1,0\}$.	2p 2p 1p
6.	$AB=4\cdot 3$, $BC=4\cdot 4$ iar $AC=4\cdot 5$, sunt numere pitagorice $\Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic	

	cu ipotenuza $AC = 20$, $R = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(m) = \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$ $rangA(m) = 3 \Rightarrow m \in R \setminus \{-1,1\}$.	3p 2p
b)	Socotind $A^{-1}(m)$ obţinem $A^{-1}(m) = \frac{1}{m^2-1} \cdot \begin{pmatrix} m+1 & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}(2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	3p 2p
c)	$\det\left[A(m) \cdot A(m-1)\right] = \det A(m) \cdot \det A(m-1) = (m-2)(m+1)(m-1)m =$ $= (m^2-m-2)(m^2-m) = (m^2-m)^2 - 2(m^2-m) + 1 - 1 =$ $= (m^2-m-1)^2 - 1$ $\det\left[A(m) \cdot A(m-1)\right] = -1 \Leftrightarrow (m^2-m-1)^2 - \cancel{1} = -\cancel{1}$, adică $m^2 - m - 1 = 0$, de unde $m_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $m_{3,4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.	1p 2p 2p
2. a)	Folosind relaţiile lui *Viete*, putem scrie $\sum_{i=1}^{5} x_i = 2$, $\sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j = 6$, unde $x_i, i = \overline{1,5}$ sunt rădăcinile polinomului $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j = 4 - 12 = -8 < 0$, dacă toate x_i ar fi fost reale, rezultatul ar fi fost pozitiv, rezultă ca nu toate rădăcinile sunt reale.	2p 2p 1p

b)	Aplicând schema lui *Horner*, se găseşte rădăcina $x=2$.	5p
c)	Tot cu schema lui *Horner* obţinem $f=(X-2)(X^4+6X^2+5)$ $X^4+6X^2+5=X^4+X^2+5X^2+5=X^2(X^2+1)+5(X^2+1)=(X^2+1)(X^2+5)$, deci $f=(X-2)(X^2+1)(X^2+5)$, radicinile complexe $\pm i, \pm i\sqrt{5}$ toate patru diferite.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{2x^2+8x+x+4-4+1}{x+4}=\frac{2x(x+4)}{x+4}+\frac{x+4}{x+4}-\frac{3}{x+4}=$ $=2x+1-\frac{3}{x+4} \Rightarrow f'(x)=2+\frac{3}{(x+4)^2}>0$ f este crescătoare pe domeniul maxim de definiţie.	1p 2p 2p
b)	Cum în a). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+4}=0$, $y=2x+1$ este ecuatia asimptotei oblice Asimptota orizontala nu există iar asimptota verticală este $x=-4$.	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2x}\cdot\left(2x+1-\frac{3}{x+4}\right)=1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2+8x}=1+\frac{x+1}{2x^2+8x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=1^{\infty}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{x+1}{2x^2+8x}\right)^{\frac{2x^2+8x}{x+1}}}_{\to e}\right]^{\frac{x+1}{2x^2+8x}\cdot(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+8x}}=$ $=e$.	2p 1p 2p

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x+1}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big\|_0^1=$ $=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$.	3p 2p
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n-x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}-I_n$.	3p 2p
c)	Folosind formula din b). se poate scrie $I_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+I_1=\frac{10-12+15-20+30-60}{60}+\ln\frac{e}{2}=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$ $=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Oláh Csaba

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z+\frac{1}{z}=i$, $z^4+\frac{1}{z^4}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-2=\left[\left(\underbrace{z+\frac{1}{z}}_{=i}\right)^2-2\right]^2-2=$	3p

	$=(-3)^2-2=7$.	2p
2.	$(f\circ g)(x)=g^2(x)-6g(x)+8$	1p
	$g^2(x)-6g(x)+8=0\Rightarrow g(x)=2, g(x)=4$	2p
	$g(x)=2\Rightarrow 2x-6=2\Rightarrow x=4$, $g(x)=4\Rightarrow 2x-6=4\Rightarrow x=5$	1p
	$x\in\{4,5\}$.	1p
3.	$x>1$, $\log_{x+1}(x-1)=\dfrac{1}{\log_{x-1}(x+1)}$, ecuația se poate scrie așa	1p
	$\log_{x+1}(x-1)+\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=2$, dar $\log_{x+1}(x-1)+\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}\geq 2\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow\log_{x+1}(x-1)=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=1\Rightarrow x-1=x+1$, ecuația nu are rezolvare in R.	2p
4.	Se cunoaşte identitatea $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$,	2p
	$2048=2^{11}\Rightarrow n=11$.	3p
5.	$\overrightarrow{AB}(-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(1,2)$	2p
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1\cdot 1+2\cdot 2=3$.	3p
6.	$2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=2\left(\sin^2 a-\sin^2 b\right)=$	2p
	$=2\left(\dfrac{1-\cos 2a}{2}-\dfrac{1-\cos 2b}{2}\right)=\cos 2b-\cos 2a$.	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	După relațiile lui *Viete* $x_1+x_2+x_3=0$,	2p
	$D\overset{c_1+c_2}{\underset{c_1+c_3}{=}}\begin{vmatrix}x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3\\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2\\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & x_2 & x_3\\ 0 & x_1 & x_2\\ 0 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=0$.	3p

b)	Cum $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3=-15$.	2p 3p
c)	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2-x+x-3 & 2-x & x-3 \\ x-3+x+2-x & x & 2-x \\ \underbrace{2-x+x-3+x}_{=x-1} & x-3 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 1 & x & 2-x \\ 1 & x-3 & x \end{vmatrix} \overset{l_2-l_1}{\underset{l_3-l_1}{=}}$ $(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 0 & 2x-2 & 5-2x \\ 0 & 2x-5 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(6x-6+4x^2-20x+25)=(x-1)(4x^2-14x+19)$ $\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\Big(\underbrace{4x^2-14x+19}_{\Delta<0}\Big)=0 \Rightarrow x=1$.	1p 2p 2p
2. a)	$x*y=(x-4)(y-4)+4$, $x*e=x \Rightarrow (x-4)(e-4)+4=x \Rightarrow (x-4)(e-4)=x-4 \Rightarrow e-4=1,\ e=5$ $x*x^{'}=e \Rightarrow (x-4)(x^{'}-4)+4=5 \Rightarrow x^{'}=\frac{1}{x-4}+4=\frac{4x-15}{x-4}$.	1p 2p 2p
b)	$x*b=b*x=b \Rightarrow (x-4)(b-4)+4=b \Rightarrow (x-4)(b-4)=b-4 \Rightarrow (b-4)(x-5)=0$, de unde $b=4$.	3p 2p
c)	Din b). se ştie că $4*x=x*4=4$ $x^4*\underbrace{4^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow \underbrace{x^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow 4^x+4=5$, de unde $4^x=1$ $x=0$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$a_n=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{[n(n+1)]^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)^3}-\frac{n^3}{n^3(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}$	2p

	$b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3}$. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 < 1 \Rightarrow b_n$ este un şir descrescător.	1p 2p
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot n^4 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3n^2+3n+1\right)}{\left[n(n+1)\right]^3} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 3$.	2p 3p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^3} \underbrace{-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{4^3}}_{=0} + \ldots \underbrace{+\frac{1}{n^3}}_{=0} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1$.	1p 2p 2p
2. a)	$I_1 = \int \frac{1+tg^2x}{1-tgx}dx = \int \frac{1}{1-tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{1-tgx=u}{=} -\int \frac{du}{u} =$ $= -\ln\lvert u\rvert + C = -\ln\lvert tgx-1\rvert + C$.	3p 2p
b)	$I_2 = \int \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx = -\int \frac{1}{tg^2x-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{tgx=u}{=} -\int \frac{1}{u^2-1}du =$ $= -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert + C = -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert + C$.	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+tg^2x}{1-tg^4x}dx$	1p

	$\frac{1}{1-tg^4x}=-\frac{1}{(tg^2x-1)(tg^2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg^2x+1}-\frac{1}{tg^2x-1}\right)$.	1p
	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+tg^2x}{tg^2x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert\right)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{6}}=$	2p
	$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{tg\frac{\pi}{6}-1}{tg\frac{\pi}{6}+1}\right\rvert-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\ln 1=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1.

Prof: Oláh Csaba.

- ♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- ♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- ♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ raţia progresiei, atunci $x=1+3(n-1)=3n-2$ $1+4+7+...+3n-2=\frac{n}{2}\cdot(3n-1)\Rightarrow n(3n-1)=290$, $n=10$ $x=3n-2=30-2=28$.	1p 2p 2p
2.	Din relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2=m+1$ şi $x_1\cdot x_2=m$ $\Rightarrow m\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)=m\frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2}=$ $=\cancel{m}\cdot\frac{\cancel{m}+1-\cancel{m}}{\cancel{m}}=1$ nu depinde de m.	2p 3p
3.	Împărţind ecuaţia la $\sqrt{2}$, se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,2\pi]$ atunci $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.	3p 2p
4.	$T_{k+1}=C_{150}^{k}\left(\sqrt{a}\right)^{150-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{k}=C_{150}^{k}a^{\frac{150-k}{2}}\cdot4^{k}\cdot a^{\frac{-k}{3}}=C_{150}^{k}4^{k}\cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conţine $a\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{450-5k}{6}=0\Rightarrow5k=450\Rightarrow k=90$, termenul fără a: $T_{91}=C_{150}^{90}4^{90}$.	2p 1p 2p
5.	$\begin{vmatrix}1&2m+1&1\\2&9&1\\4&4m+1&1\end{vmatrix}=0\underset{l_3-l_1}{\overset{l_2-l_1}{\Rightarrow}}\begin{vmatrix}1&2m+1&1\\1&8-2m&0\\3&2m&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&8-2m\\3&2m\end{vmatrix}=0$	3p

	adică $8m=24\Rightarrow m=3$	2p
6.	$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+64}=\frac{1}{65}\Rightarrow$ $\overset{x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Rightarrow}\ \cos x=-\frac{\sqrt{65}}{65}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det V(1,2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{\underset{c_3-c_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}=8-6=2$ $=2$.	4p 1p
b)	$V(a,b,c)\cdot{}^tV(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3&a+b+c&a^2+b^2+c^2\\a+b+c&a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3\\a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3&a^4+b^4+c^4\end{pmatrix}$.	3p 2p
c)	$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{=(x-1)(x+1)}-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)^2(x+2)$, $x_1=x_2=1,x_3=-2\Rightarrow\det V(1,1,-2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&1&4\end{vmatrix}\overset{c_1=c_2}{=}0$.	3p 2p
2. a)	$f(k)=k(k+3)(k+1)(k+2)=\left(\underbrace{k^2+3k}_{=t}\right)\left(\underbrace{k^2+3k}_{=t}+2\right)=t(t+2)=$ $=t^2+2t>t^2$, dar $t^2+2t=(t+1)^2-1<(t+1)^2$, $\left(k^2+3k\right)^2<f(k)<\left(k^2+3k+1\right)^2\Rightarrow f(k)\neq m^2,m\in Z$.	2p 3p 2p
b)	$f(k)=1\Leftrightarrow\left(k^2+3k\right)^2+2\left(k^2+3k\right)+1=0\Rightarrow$	2p

	$\Rightarrow\left(k^2+3k+1\right)^2=0$, de unde $k^2+3k+1=0$ $k\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	1p 2p
c)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=$ $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+3\right)=$ $=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)}{(x-1)(x-4)}=$ $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-5)(x+3)(x+7)}{x-4}=\frac{-4\cdot4\cdot8}{-3}=\frac{128}{3}$.	2p 3p
b)	Funcţia f se scrie $f(x)=(x-5)(x+7)(x-1)(x+3)=\left(x^2+2x-35\right)\left(\underbrace{x^2+2x-3}_{=t}\right)=(t-32)t=$ $=t^2-\underbrace{32}_{=2\cdot16}t+16^2-16^2=(t-16)^2-256=\left(x^2+2x-19\right)^2-256$ $f'(x)=2\left(x^2+2x-19\right)(2x+2)=4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)$ $f'(2)=4\cdot3\cdot(4+4-19)=-44\cdot3,\ f(2)=-3\cdot5\cdot9=-45\cdot3$ $\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{-44\cdot3}{-45\cdot3}=\frac{44}{45}$.	3p 2p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x_1=-1$, sau	2p

	$x^2+2x-19=0$, $x_{2,3}=-1\pm2\sqrt{5}$ $x\in\left\{-1-2\sqrt{5},-1,-1+2\sqrt{5}\right\}$ toate trei rădăcini sunt reale.	2p 1p
2. a)	$f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^2-x+1}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x^2-x+1}=$ $=\frac{\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)}{x^2-x+1}=x^2+x+1$ $\int f(x)\,dx=\int\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.	2p 1p 2p
b)	$H'(x)=h(x)=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}>0\Rightarrow$ $\Rightarrow H$ este o funcție crescătoare.	3p 2p
c)	$\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=(*)$ $\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big\vert_0^1=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\underbrace{arctg\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}}-\underbrace{arctg\frac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ $(*)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}=\frac{11}{6}+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.	1p 2p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2.

Prof: Oláh Csaba

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{100}=\left[\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\right]^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\left(\underbrace{i^2}_{=-1}\right)^{25}=-2^{50}$, în mod similar $(1-i)^{100}=-2^{50}\Rightarrow(1+i)^{100}+(1-i)^{100}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}\in Z$.	3p 2p
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+5=4x-7\Rightarrow x^2-8x+12=0$, $x_1=2, x_2=6$ $g(2)=1$ şi $g(6)=17$ Punctele de întâlnire $A(2,1)$ şi $B(6,17)$.	2p 2p 1p
3.	$3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\left(=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}\right)$, ecuaţia se poate scrie $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=2$, dar $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}\geq 2, x\in R\Rightarrow\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-x}\Rightarrow x=-x$, adică $x=0$.	2p 3p
4.	Cifre, numere prime, sunt $2,3,5,7$, numere de 3 cifre prime distincte $A_4^3=4!=24$ În total sunt 900 numere de 3 cifre Probabilitatea $p=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$.	2p 1p 2p
5.	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$, $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert=\sqrt{1+(2m+1)^2}=\sqrt{4m^2+4m+2}$ $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert=\sqrt{2}\Rightarrow 4m^2+4m+2=2$, adică $4m(m+1)=0$ de unde $m\in\{-1,0\}$.	2p 2p 1p
6.	$AB=4\cdot3$, $BC=4\cdot4$ iar $AC=4\cdot5$, sunt numere pitagorice $\Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic cu ipotenuza $AC=20$,	3p

	$R=\frac{AC}{2}=\frac{20}{2}=10$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(m)=\begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0\\ 0 & m+1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(m-1)(m+1)$ $rangA(m)=3\Rightarrow m\in R\setminus\{-1,1\}$.	3p 2p
b)	Socotind $A^{-1}(m)$ obţinem $A^{-1}(m)=\frac{1}{m^2-1}\cdot\begin{pmatrix} m+1 & 1 & -1\\ 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 0 & m^2-1\end{pmatrix}$ $A^{-1}(2)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.	3p 2p
c)	$\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=\det A(m)\cdot\det A(m-1)=(m-2)(m+1)(m-1)m=$ $=(m^2-m-2)(m^2-m)=(m^2-m)^2-2(m^2-m)+1-1=$ $=(m^2-m-1)^2-1$ $\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=-1\Leftrightarrow(m^2-m-1)^2-\cancel{1}=-\cancel{1}$, adică $m^2-m-1=0$, de unde $m_{1,2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $m_{3,4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.	1p 2p 2p
2. a)	Folosind relţiile lui *Viete*, putem scrie $\sum_{i=1}^{5}x_i=-2$, $\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=6$, unde $x_i, i=\overline{1,5}$ sunt rădăcinile polinomului $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=4-12=-8<0$, dacă toate x_i ar fi fost reale, rezultatul ar fi fost pozitiv $\Rightarrow$ nu toate rădăcinile sunt reale.	2p 2p 1p
b)	Aplicând schema lui *Horner*, se găseşte rădăcina $x=2$.	5p

c)	Tot cu schema lui *Horner* obţinem $f=(X-2)(X^4+6X^2+5)$ $X^4+6X^2+5=X^4+X^2+5X^2+5=X^2(X^2+1)+5(X^2+1)=(X^2+1)(X^2+5)$, deci $f=(X-2)(X^2+1)(X^2+5)$, radicinile complexe $\pm i,\pm i\sqrt{5}$ toate patru diferite.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{2x^2+8x+x+4-4+1}{x+4}=\frac{2x(x+4)}{x+4}+\frac{x+4}{x+4}-\frac{3}{x+4}=$ $=2x+1-\frac{3}{x+4}\Rightarrow f'(x)=2+\frac{3}{(x+4)^2}>0$ f este crescătoare pe domniul maxim de definiţie.	1p 2p 2p
b)	Cum în a). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+4}=0$, $y=2x+1$ este ecuatia asimptotei oblice Asimptota orizontala nu există iar asimptota verticală $x=-4$.	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2x}\cdot\left(2x+1-\frac{3}{x+4}\right)=1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2+8x}=1+\frac{x+1}{2x^2+8x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=1^\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{x+1}{2x^2+8x}\right)^{\frac{2x^2+8x}{x+1}}}_{\to e}\right]^{\frac{x+1}{2x^2+8x}\cdot(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+8x}}=$ $=e$.	2p 1p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x+1}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=(x-\ln(1+x))\Big\vert_0^1=$	3p

	$=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$.	2p
b)	$I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^n-x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x+1\right)}{1+x}dx-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=$ $=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}-I_n$.	3p 2p
c)	Folosind formula din b). se poate scrie $I_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+I_1=\frac{10-12+15-20+30-60}{60}+\ln\frac{e}{2}=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$ $=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3.

Prof: Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z+\frac{1}{z}=i$, $z^4+\frac{1}{z^4}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-2=\left[\left(\underbrace{z+\frac{1}{z}}_{=i}\right)^2-2\right]^2-2=$ $=\left(-3\right)^2-2=7$.	3p 2p
2.	$\left(f\circ g\right)\left(x\right)=g^2\left(x\right)-6g\left(x\right)+8$	1p

	$g^2(x)-6g(x)+8=0\Rightarrow g(x)=2, g(x)=4$ $g(x)=2\Rightarrow 2x-6=2\Rightarrow x=4$, $g(x)=4\Rightarrow 2x-6=4\Rightarrow x=5$ $x\in\{4,5\}$.	2p 1p 1p
3.	$x>1$, $\log_{x+1}(x-1)=\frac{1}{\log_{x-1}(x+1)}$, ecuaţia se poate scrie aşa $\log_{x+1}(x-1)+\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=2$, dar $\log_{x+1}(x-1)+\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}\geq 2\Rightarrow$ $\Rightarrow\log_{x+1}(x-1)=\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=1\Rightarrow x-1=x+1$, ecuaţia nu are rezolvare in R.	1p 2p 2p
4.	Se cunoaşte identitatea $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$, $2048=2^{11}\Rightarrow n=11$.	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB}(-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(1,2)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1\cdot1+2\cdot2=3$.	2p 3p
6.	$2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=2\left(\sin^2 a-\sin^2 b\right)=$ $=2\left(\frac{1-\cos 2a}{2}-\frac{1-\cos 2b}{2}\right)=\cos 2b-\cos 2a$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	După relaţiile lui *Vierte* $x_1+x_2+x_3=0$, $D\underset{c_1+c_3}{\overset{c_1+c_2}{=}}\begin{vmatrix}x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3\\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2\\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & x_2 & x_3\\ 0 & x_1 & x_2\\ 0 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=0$.	2p 3p
b)	Cum $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3=-15$.	2p 3p

c)	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2-x+x-3 & 2-x & x-3 \\ x-3+x+2-x & x & 2-x \\ \underbrace{2-x+x-3+x}_{=x-1} & x-3 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 1 & x & 2-x \\ 1 & x-3 & x \end{vmatrix} =$ $(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 0 & 2x-2 & 5-2x \\ 0 & 2x-5 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(6x-6+4x^2-20x+25) = (x-1)(4x^2-14x+19)$ $\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\underbrace{4x^2-14x+19}_{\Delta<0}\right) = 0 \Rightarrow x = 1$.	**1p** **2p** **2p**
2. a)	$x*y=(x-4)(y-4)+4$, $x*e=x \Rightarrow (x-4)(e-4)+4=x \Rightarrow (x-4)(e-4)=x-4 \Rightarrow e-4=1,\ e=5$ $x*x' = e \Rightarrow (x-4)(x'-4)+4=5 \Rightarrow x' = \frac{1}{x-4}+4=\frac{4x-15}{x-4}$.	1p 2p 2p
b)	$x*b=b*x=b \Rightarrow (x-4)(b-4)+4=b \Rightarrow (x-4)(b-4)=b-4 \Rightarrow (b-4)(x-5)=0$, de unde $b=4$.	3p 2p
c)	Din b). se ştie că $4*x=x*4=x$ $x^4*\underbrace{4^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow \underbrace{x^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow 4^x+4=5$, de unde $4^x=1$ $x=0$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$a_n=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{[n(n+1)]^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)^3}-\frac{n^3}{n^3(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}$ $b_n=a_n+\frac{1}{(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}$.	2p 1p

	$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^3<1\Rightarrow b_n$ este un şir descrescător.	2p
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot n^4=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(3n^2+3n+1\right)}{\left[n(n+1)\right]^3}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1.$	2p 3p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^3}\underbrace{-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{4^3}+\ldots}_{=0}\underbrace{+\frac{1}{n^3}}_{=0}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1.$	1p 2p 2p
2. a)	$I_1=\int\frac{1+tg^2x}{1-tgx}dx=\int\frac{1}{1-tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\overset{1-tgx=u}{=}-\int\frac{du}{u}=$ $=\ln\lvert u\rvert+C=-\ln\lvert tgx-1\rvert+C.$	3p 2p
b)	$I_2=\int\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx=-\int\frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\overset{tgx=u}{=}-\int\frac{1}{u^2-1}du=$ $=-\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert+C=-\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert+C.$	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+tg^2x}{1-tg^4x}dx$ $\frac{1}{1-tg^4x}=-\frac{1}{\left(tg^2x-1\right)\left(tg^2x+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg^2x+1}-\frac{1}{tg^2x-1}\right).$	1p 1p

	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+tg^2x}{tg^2x+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{6}} =$	2p
	$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{tg\frac{\pi}{6}-1}{tg\frac{\pi}{6}+1}\right\rvert-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\ln 1=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}.$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof:Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-9\le 2x-1\le 9$	2p
	$-4\le x\le 5$	1p
	$cardA=10$	2p
2.	$2x-1=3x^2-3x+1$	1p
	$x_1=1, x_2=\frac{2}{3}$	2p
	Punctele de intersecție sunt $(1;1)$ și $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$	2p
3.	$8-3x=8-12x+6x^2-x^3$	1p
	$x\left(x^2-6x+9\right)=0$	1p
	$x_1=0, x_{2,3}=3$	3p
4.	$T_{k+1}=\left(-1\right)^k C_{2012}^k 2^{2012-k}\cdot\sqrt{3}^k, k\in\left\{0,1,2,...,2012\right\}$	2p
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k$ par	2p
	Sunt 1007 termeni raționali	1p
5.	$BC: x+y-2=0$	2p
		3p

	Distanța este $\frac{\lvert 1+2-2\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	
6.	$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=\frac{1}{2}$ $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -m & m^2\\ -m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & -m\end{vmatrix}=-\left(m^2-m+1\right)^2\left(m+1\right)^2$ Finalizare : $m=-1$	3p 2p
b)	Dacă sistemul are soluții nenule,atunci $\Delta=0$ În acest caz, sistemul se reduce la $x+y+z=0$ Această ecuație nu are soluții cu toate componentele strict pozitive	2p 1p 2p
c)	Pentru $m=-1$, rangul este 1 Pentru $m\neq-1$, rangul este 3	2p 3p
2. a)	$(x*y)*z=\frac{1}{9}(x-2)(y-2)(z-2)+2$ și $x*(y*z)=\frac{1}{9}(x-2)(y-2)(z-2)+2$ Finalizare: legea este asociativă	4p 1p
b)	Trebuie să arătăm că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $x*e=x\Leftrightarrow 2x+2e-ex+2=3x\Leftrightarrow(e+1)(2-x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci $e=-1$ Verificarea relației $(-1)*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$	1p 3p 1p
c)	$x*x*x*x=-\frac{1}{27}(x-2)^4+2$	2p

	$x*x*x*x=-1 \Leftrightarrow (x-2)^4=81 \Leftrightarrow x=5$ sau $x=-1$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(-x)=-x^3+3x+2012$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2012}{-x^3+3x+2012}=-1$	2p 3p
b)	$f^{'}(x)=3x^2-3$ $f^{'}(x)\geq 0, \forall x\in[1;\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1;\infty)$	2p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f(-1)=2014,\ f(1)=2010, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ Din studiul variației funcției deducem că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $m\in(2010;2014)$	2p 3p
2. a)	$I_2=\int_{2012}^{2013}\frac{(y-2012)^2}{y}dy$ $I_2=\left(\frac{y^2}{2012}-4024y+2012^2\ln y\right)\Big\|_{2012}^{2013}$ $I_2=\frac{4025}{2012}-4024\cdot 4025+2012^2\ln\frac{2013}{2012}$	2p 2p 1p
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^n}{x+2012}\cdot(1-x)dx\geq 0$ pentru orice n, $\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ $I_{n+1}+2012I_n=\int_0^1\frac{x^n(x+2012)}{x+2012}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$	2p 3p
c)	$\frac{1}{2013(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2012(n+1)}$	3p

	Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1+i-2i+2-9+6i=$ $-6+5i$	3p 2p
2.	$x^2-x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}, x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2;+\infty)$ $x^2-x+1=x^2+4x+4$ $\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}\in[-2;+\infty)$	1p 2p 2p
3.	$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ $x\in[0;2\pi)\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{2\pi}{3}$	2p 3p
4.	În A avem 6 elemente impare și 5 elemente pare Finalizare : $C_6^3\cdot C_5^1=100$ de moduri	2p 3p

5.	Fie D e mijlocul lui $[BC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 2 \end{cases}$ $AD = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$	2p 3p
6.	$\dfrac{1}{\sin x \cos x} = 3 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1}{3}$ $\sin 2x = \dfrac{2}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 & 1 & -2y - 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x-y)^2 \\ 0 & 1 & -2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	2p 3p
b)	$A(x) - A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2 - y^2 \\ 0 & 0 & -2x + 2y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A(x) - A(y))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A(x) - A(y))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$	1p 2p 2p
c)	$A(x) \cdot A(-x) = A(-x) \cdot A(x) = I_2$ $\Rightarrow (A(x))^{-1} = A(-x)$	3p 2p

2. a)	$R=f(2i)=(4i)^{10}$ $R=-4^{10}$	3p 2p
b)	$f=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{10-k}(2i)^k+\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k x^{10-k}(2i)^k=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{10-k}(2i)^k\left(1+(-1)^k\right)$ $a_{2k}=2\cdot(-1)^k C_{10}^{10-2k}\cdot 2^{10-2k}\in\mathbb{R},\forall k\in\{0,1,...,5\},a_{2k+1}=0,\forall k\in\{0,1,...,4\}$	2p 3p
c)	Fie z o rădăcină a lui $f\Rightarrow(z+2i)^{10}=-(z-2i)^{10}\Rightarrow\lvert z+2i\rvert=\lvert z-2i\rvert$ Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparțin axei reale	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=-\frac{4}{(x+2)(x-2)}\prec 0,\forall x\in(2;+\infty)$ $\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(2;+\infty)$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow d_1:y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} f(x)=+\infty\Rightarrow d_2:x=2$ este asimptotă verticală la dreapta	3p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)}{\frac{4}{x-2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x)=4$	3p 2p
2. a)	$\int_1^9 f(\sqrt{x})dx=\int_1^9\left(x-4\sqrt{x}+3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}-3x\right)\Big\vert_1^9$ $\int_1^9 f(\sqrt{x})dx=-\frac{16}{3}$	3p 2p

b)	$g(x)\le 0,\forall x\in[1;3]$	1p
	$\Rightarrow A=-\int_1^3 g(x)\,dx=-\int_1^3\left(x-4+\frac{3}{x}\right)dx$	1p
	$A=-\left(\frac{x^2}{2}-4x+3\ln x\right)\Big\|_1^3$	2p
	$A=28-\ln 27$	1p
c)	$I_n=\int_1^3 f^n(x)\,dx=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot\left(x^2-2x\right)dx$	1p
	$I_n=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot\left(x^2-4x+3+2x-4+1\right)dx$	1p
	$I_n=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^n dx-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}dx-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot(2x-4)\,dx$	1p
	$\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot(2x-4)\,dx=\int_0^0 t^{n-1}dt=0$	1p
	$\Rightarrow I_n=-2nI_n-2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n+2nI_{n-1}=0$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_1+b_3=5$ și $b_3+b_5=20\Leftrightarrow b_1\left(1+q^2\right)=5$ și $\Leftrightarrow b_1q^2\left(1+q^2\right)=20$	2p

	$\Rightarrow q^2=4\Leftrightarrow q=\pm 2$ $q\succ 0\Rightarrow q=2$	2p 1p
2.	$\Delta\ge 0\Leftrightarrow a^2-8a+4\ge 0$ Finalizare: $a\in\left(-\infty,4-2\sqrt{3}\right]\cup\left[4+2\sqrt{3},+\infty\right)-\{0\}$	3p 2p
3.	$2x-3\succ 0, x-1\succ 0, 5-2x\succ 0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ $\ln\frac{4x^2-12x+9}{x-1}=\ln(5-2x)\Leftrightarrow 6x^2-19x+14=0$ $x_1=2\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right), x_2=\frac{7}{6}\notin\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$	1p 2p 2p
4.	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}, A_n^2=n(n-1)$ $\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)=63\Leftrightarrow n(n-1)=42$ $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=7$	1p 3p 1p
5.	$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$ $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$ $\Rightarrow$ vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ formează un unghi obtuz	3p 2p
6.	$C=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{AB}{\sin C}=2R$ $\sin C=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ Finalizare: $R=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$a+1+1=5 \Leftrightarrow a=3$ $4-1-3=b \Leftrightarrow b=0$ $2+3+4=9$ este adevărat	2p 2p 1p
b)	Sistemul este incompatibil dacă $\Delta=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 9 & 3 & 4\\ b & -1 & -3\end{vmatrix}\neq 0$ $\Rightarrow a=3,b\neq 0$	3p 2p
c)	Pentru $b=7$ avem sistemul $\begin{cases}ax+y+z=5\\ 2x+3y+4z=9\\ 4x-y-3z=7\end{cases}$ care este compatibil pentru orice $a\in\mathbb{R}$ $(0,11,-6)$ este soluția cu toate componentele întregi $,\forall a\in\mathbb{Z}$	3p 2p
2. a)	Rădăcinile întregi ale lui f se găsesc printre divizorii lui 10 $f(2)=0\Rightarrow x=2\in\mathbb{Z}$ e rădăcină a lui f	2p 3p
b)	$x_1+x_2+...+x_5=2, x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5=-1$ $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2=(x_1+x_2+...+x_5)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5)=2^2-2\cdot(-1)=6$ $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_4-x_5)^2=$ $=4(x_1^2+x_2^2+...+x_5^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5)=18$	2p 1p 2p
c)	$f=(X-2)\left[(X^2-1)^2+(X+2)^2\right]$ $(x^2-1)^2+(x+2)^2\succ 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ are o singură soluție reală	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f^{'}(x)=3x^2+1001\succ 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă,deci f surjectivă Va rezulta că ecuația $f(x)=y$ are soluție unică, $\forall y\in\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$h(x)=x^3+1001x-20014-\frac{1}{n+2012}$ $h(2)\prec 0,h(3)\succ 0\Rightarrow x_n\in(2;3)$ $x_{n+1}^3-x_n^3\prec 0\Rightarrow x_{n+1}-x_n\prec 0$ $\Rightarrow(x_n)$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[2;3]$ $(x_n-2)(x_n^2+2x_n+1007)=\frac{1}{n+2012}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$	1p 1p 1p 2p
c)	$n(x_n-2)=\frac{n}{(x_n^2+2x_n+1007)\cdot(n+2012)}$ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-2)=\frac{1}{1015}$	3p 2p
2. a)	$F^{'}(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{x^{2011}-1}{x-1},x\neq 1\\ 2011,x=1\end{cases}$ $x\prec 1\Rightarrow x^{2011}-1\prec 0,x-1\prec 0\Rightarrow\frac{x^{2011}-1}{x-1}\succ 0$ $x\succ 1\Rightarrow x^{2011}-1\succ 0,x-1\succ\theta 0\Rightarrow\frac{x^{2011}-1}{x-1}\succ 0$ $\Rightarrow F^{'}(x)\succ 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 1p 1p 1p
b)	$F(x)=x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^{2011}}{2011}$	1p

	$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=-\infty, F$ continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} F=\mathbb{R} \Rightarrow F$ surjectivă Din a) $\Rightarrow F$ injectivă Deci F bijectivă	2p 1p 1p
c)	Cu schimbarea de variabilă $F^{-1}(x)=t \Leftrightarrow x=F(t) \Rightarrow dx=f(t)dt$ $\int\limits_0^a F^{-1}(x)dx=\int\limits_0^1 tf(t)dt=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\ldots+\frac{t^{2013}}{2013}\right)\Bigg\|_0^1=$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2013}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Pascotescu Camelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+(\sqrt{3})^2=\sqrt{7^2}+\sqrt[3]{(-10)^3}+3=$ $=7+(-10)+3=0$	3p 2p
2.	Din **Relaţiile lui Viète** avem $x_1+x_2=-\frac{m}{1}=-m$ şi $x_1x_2=\frac{-m+1}{1}=-m+1$ Relaţia dată devine $-2m+(-m+1)=3$ $m=-\frac{2}{3}$	2p 1p 2p
3.	$3^{4x}=3^{x^2}$ $4x=x^2$ $x_1=0, x_2=4$	1p 2p 2p
4.	Se impun condiţiile $2x-1\geq 0$ şi $2-x\geq 0$,de unde $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ Ecuaţia devine $2x-1=4-4x+x^2$ cu soluţiile $x_1=1, x_2=5$ Având în vedere că $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$, soluţia ecuţiei este $x=1$	2p 2p 1p
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{9}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

. a)	Folosind **Regula triunghiului:** $\det A = 4a+3a^2+18-9a-2a^2-12=$ $=a^2-5a+6$	3p 2p
b)	Matricea este inversabilă pentru $\det A \neq 0$ $\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{2,3\}$ A este inversabilă pentru $x \in \mathbb{R}-\{2,3\}$	2p 2p 1p
c)	$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ **Sistem Cramer** Sistemul are soluţia unică $x=0, y=1, z=0$.	2p 3p
2. a)	a şi b pot lua fiecare 5 valori. Obţinem $5\cdot 5=25$ matrice.	3p 2p
b)	Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{0} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & a\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\hat{0} & c & d\\ \hat{0} & \hat{1} & c\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \in H$. Atunci $A\cdot B=\begin{pmatrix}\hat{1} & a+c & d+ac+b\\ \hat{0} & \hat{1} & a+c\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \in H$.	2p 3p
c)	Fie $X=\begin{pmatrix}\hat{0} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & a\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \in H$. Atunci $X^3=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3}a & \hat{3}a^2+\hat{3}b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{3}a\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. $X^3=I_3 \Rightarrow \hat{3}a=0 \Rightarrow a=\hat{0}$ şi $\hat{3}a^2+\hat{3}b=\hat{0} \overset{a=\hat{0}}{\Rightarrow} \hat{3}b=0 \Rightarrow b=\hat{0}$ Deci $X=I_3 \in H$.	3p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=$ $=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$	2p 3p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$ Din tabelul de variaţie rezultă că f este strict crescătoare pe $(0;e^2)$ şi strict descrescătoare pe $(e^2;\infty)$.	2p 3p
c)	Deoarece $3,5\in(0;e^2)$ şi $3<5$, cum funcţia este strict crescătoare pe $(0;e^2)$, avem $f(3)<f(5)$. Atunci $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sqrt{5}\ln 3<\sqrt{3}\ln 5\Rightarrow\ln 3^{\sqrt{5}}<\ln 5^{\sqrt{3}}\Rightarrow 3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$	3p 2p
2. a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$ $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(x-\text{arctg }x\right)\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$	2p 3p
b)	$I_{n+1}+I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^{2n}(x^2+1)}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x^{2n}\,dx$ $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$	3p 2p
c)	Deoarece $0\le\dfrac{x^{2n}}{x^2+1}\le x^{2n}$, rezultă $0\le\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx\le\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{n+1}$ Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, cu **Criteriul cleştelui** , deducem $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Pascotescu Camelia

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

♦

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=a+ib\Rightarrow \overline{z}=a-ib$ $2(a-ib)+\text{a}+\text{ib}=3+2\text{i}\Rightarrow 3a-\text{ib}=3+2\text{i}$ $\Rightarrow a=1,b=-2\Rightarrow z=1-2i$	1p 2p 2p
2.	Din **Relaţiile lui Viète** avem $x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=-3$ şi $x_1x_2=\frac{1}{1}=1$ Deci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\cdot 1=7$	2p 3p
3.	Fie $t=2^x>0$. Rezultă $-2t^2+t+1=0$ $t_1=1,t_2=-\frac{1}{2}$. Deoarece $t_1>0,t_2<0$ şi $t>0\Rightarrow t=1$ $\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$	2p 2p 1p
4.	Numărul submulţimilor căutate este C_5^3 $=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2}=\frac{4\cdot 5}{2!}=10$	2p 3p
5.	Distanţa de la un punct $A(\text{x}_0,y_0)$ la dreapta $d:ax+by+c=0$ este $d(A,d)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Deci $d(A,d)=\frac{\lvert 2\cdot 1+3\cdot 3-1\rvert}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$	2p 3p
6.	Prin ridicare la pătrat obţinem $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$ de unde	3p 2p

	$\sin 2x = 0$	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	5p
b)	$x \circ \alpha = \beta \Rightarrow x = \beta\alpha^{-1}$ $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
c)	Numărul de inversiuni al permutării α este $m(\alpha) = 3 \Rightarrow \epsilon(\alpha) = (-1)^3 = -1$, deci α e impară. Dar oricare ar fi $x \in S_4$ avem $\epsilon(x^4) = 1$, deci x^4 este permutare pară. În concluzie, ecuaţia $x^4 = \alpha$ nu are soluţie.	2p 2p 1p
2. a)	$f(-1) = [1 + (-1) + (-1)^3]^{30} = (-1)^{30} = 1$ $f(1) = [1 + 1 + 1^3]^{30} = 3^{30}$ $f(-1) + f(1) = 1 + 3^{30}$	2p 2p 1p
b)	Avem $f(1) = a_0 + a_1 + ... + a_{30}$ Dar $f(1) = 3^{30} \Rightarrow a_0 + a_1 + ... + a_{30} = 3^{30}$ Deci $a_0 + a_1 + ... + a_{30} \vdots 3$	2p 2p 1
c)	$f(X) = (X^2 - 1)q(X) + aX + b$ $\left.\begin{array}{r} X = 1 \Rightarrow f(1) = a + b \Rightarrow a + b = 3^{30} \\ X = -1 \Rightarrow f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{3^{30} - 1}{2}, b = \frac{3^{30} + 1}{2}$ Resul căutat este $aX + b = \frac{3^{30} - 1}{2} X + \frac{3^{30} + 1}{2}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

a)	$f'(x)=\dfrac{(e^x)'x^2-e^x(x^2)'}{x^4}$ $=\dfrac{e^xx^2-e^x(2x)}{x^4}$ $=\dfrac{e^x(x^2-2x)}{x^4}=\dfrac{e^xx(x-2)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ Pe $(-\infty,0)\cup(2;\infty)$ avem $f'(x)>0$,deci f este strict crescătoare. Pe $(0;2)$ avem $f'(x)<0$,deci f este strict descrescătoare.	2p 2p 1p
c)	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3},\sqrt{2}\in(0;2)\\ \sqrt{2}<\sqrt{3}\\ f \text{ descrescătoare pe } (0;2)\end{array}\right\}\Rightarrow f(\sqrt{3})<f(\sqrt{2})$ $\dfrac{e^{\sqrt{3}}}{3}<\dfrac{e^{\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow 2e^{\sqrt{3}}<3e^{\sqrt{2}}$	3p 2p
2. a)	$2I_1+3I_2=\int\dfrac{2\sin x+3\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$ $2I_1+3I_2=\int dx=x+C$ (1)	2p 3p
b)	$2I_2-3I_1=\int\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\dfrac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx$ $2I_2-3I_1=\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert+C$ (2)	3p 2p
c)	Rezolvând sistemul format din (1) şi (2) rezultă $I_1=\dfrac{1}{13}(2x-3\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert)+C$ $I_2=\dfrac{1}{13}(3x+2\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert)+C$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Pof: Pascotescu Camelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(3)=(-1)^3+(-2)^4$ =-1+16=15	3p 2p
2.	Cu **Formula radicalilor compuşi** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=$ $=2\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	3p 2p
3.	Funcţia fiind injectivă şi domeniul şi codomeniul său având acelaşi număr de elemente, rezultă că funcţia ia fiecare din valorile $-1,-2,-3$ exact o dată. Deci $f(1)+f(2)+f(3)=-1+(-2)+(-3)=-6$	3p 2p
4.	Axa de simetrie a graficului este $x=-\dfrac{b}{2a}$ de unde obţinem $\dfrac{m+2}{6}=1$ $m=4$	2p 2p 1
5.	$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\vec{i}-(2\vec{i}+3\vec{j})=-\vec{i}-3\vec{j}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A=-\vec{i}+4\vec{j}-(2\vec{i}+3\vec{j})=-3\vec{i}+\vec{j}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)(-3)+(-3)\cdot 1=0$, deci vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.	2p 3p
6.	Dacă M este mijlocul segmentului AC , atunci $M\left(\dfrac{x_A+x_C}{2};\dfrac{y_A+y_C}{2}\right)\Rightarrow M(0;-1)$.	2p

	Mediana din B este dreapta d ce trece prin B şi M , deci $d:\frac{x-x_B}{x_B-x_M}=\frac{y-y_B}{y_B-y_M}$ $d:x+y+1=0$	2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&2\\7&-1&b\end{pmatrix}$ Avem minorul de ordin doi $\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq0$,deci rang $A\geq2$. Pentru ca rang $A=2$ trebuie ca $\det A=-5b+20=0\Leftrightarrow b=4$	1p 2p 2p
b)	$\det A=0,\Delta_p\neq0,\Delta_c\neq0$ $\left.\begin{array}{l}\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq0\\ \Delta_C=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\7&-1&a\end{vmatrix}=-5a+20\end{array}\right\}\Rightarrow b=4$ şi $a\in R-\{4\}$	1p 2p 2p
c)	Pentru $b=4\overset{a)}{\Rightarrow}\det A=0$ $\left.\begin{array}{l}\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq0\\ \Delta_C=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\7&-1&b\end{vmatrix}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat pentru a $a=4,b=4$ Solutia sistemului: $x=\frac{3-3\alpha}{5},y=\frac{1-\alpha}{5},z=\alpha,$ unde $\alpha\in\mathbb{R}$.	2p 3p

2. a)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\ln b\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ln a+\ln b\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}1&0&\ln(ab)\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab)$	3p 2p
b)	Prin inducţie, demonstrează că $A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\ldots\cdot A(a_n)=A(a_1a_2\ldots a_n)$ folosind $a)$ Luând $n=2011$ şi $a_1=a_2=\ldots=a_{2011}=a\Rightarrow(A(a))^{2011}=A(a^{2011})$	3p 2p
c)	Considerăm funcţia $f:(G,\cdot)\to((0;\infty),\cdot),\ f(A(a))=a$. $f(A(a))=f(A(b))\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ln b\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a=b$, deci f e injectivă. Pentru orice $a\in(0;\infty)$ există $A(a)\in G$ cu $f(A(a))=a$, deci f e surjectivă. $f(\mathrm{A(a)}\cdot A(b))\overset{a)}{=}f(A(a\cdot b))=a\cdot b$, deci f este morfism. Fiind injectivă şi surjectivă, funcţia este bijectivă. Fiind şi morfism, rezultă că e izomorfism, deci grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{R},\cdot)$ sunt izomorfe.	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(\ln^2 x)'x-\ln^2 x}{x^2}$, $f'(x)=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$	2p 3p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1, x_2=e^2;\ f(1)=0,\ f(e^2)=\frac{4}{e^2}$. $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln^2 x}{x}=\frac{1}{0+}[\ln(+0)]^2=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty},l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty},l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ f fiind continuă şi deoarece pentru $x>0\Rightarrow f(x)\geq 0$, rezultă $\operatorname{Im} f=[0;\infty)$	2p 2p 1p

c)	$x=e^2$ punct de maxim local pe $(1;\infty)$. Rezultă $f(x)\le f(e^2),\forall x>1$. $\frac{\ln^2 x}{x}\le\frac{4}{e^2}\Rightarrow e^2\ln^2 x\le 4x\Rightarrow(e\ln x)^2\le(2\sqrt{x})^2\overset{e\ln x,2\sqrt{x}\ge 0}{\Rightarrow}e\ln x\le 2\sqrt{x},\forall x\in(1;\infty)$	2p 3p
2. a)	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^2x\,\text{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\text{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\text{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\text{d}x=$ $=(\text{tg}x-x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\text{tg}^{2n+2}x+\text{tg}^{2n}x\right)\text{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\text{tg}^{2n}x(\text{tg}^2x+1)\right)\text{d}x=$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\text{tg}^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)\text{d}x\overset{u(x)=\text{tg}x}{=}\int_0^1 u^{2n}\,\text{d}u=\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2n+1}$	2p 3p
c)	Studiem monotonia şirului: $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\text{tg}^{2n}\,\text{x}\cdot(\text{tg}^2x-1)]\,\text{d}x\le 0$ $\text{tg}0\le\text{tg}x\le\text{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\text{tg}x\le 1\Rightarrow\text{tg}^{2n}x\ge 0,(\text{tg}^2x-1)\le 0\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^{2n}x(\text{tg}^2-1)\le 0$, Deci şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^{2n}x\,\text{d}x\ge 0\Rightarrow 0\le I_n\le I_1$, deci șirul e și mărginit. Conform **Teoremei lui Weierstrass,** șirul e convergent. Fie $l=\lim_{n\to\infty}I_n$. Trecând la limită în relația de la $b)$ rezultă $l+l=0\Rightarrow l=0$, deci șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent la 0 .	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1<\log_{\frac{5}{3}} 2<2$ $2<\sqrt[3]{9}<3$ $A=\{2\}\Rightarrow \operatorname{card}A=1$	2p 1p 2p
2.	$\min \operatorname{im}=-\frac{\Delta}{4a}<0$ $m<\frac{9}{4}$ $m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{1,2\}$	1p 2p 2p
3.	$3\cdot 2^x+4>0\,(A)\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ $3\cdot 2^x+4=2^{x+2}$ $2^x=4\Rightarrow x=2$	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{x}\right)^{9-k}\left(\sqrt{x}\right)^k$ $x^{\frac{3k}{2}-9}=x^0$ $k=6\Rightarrow T_7=C_9^6$	2p 1p 2p
5.	M este mijlocul lui AN : $\left(x_M=\frac{x_A+x_N}{2}, y_M=\frac{y_A+y_N}{2}\right)$ N este mijlocul lui MB : $\left(x_N=\frac{x_M+x_B}{2}, y_N=\frac{y_M+y_B}{2}\right)$ $A(1,-2)$, $B(-5,7)$	2p 3p
6.	$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos B=-\frac{1}{20}<0\Rightarrow m(\sphericalangle B)>90^\circ$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=(m+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2m & 1 & m^2 \\ m^2 & 2m & 1 \end{vmatrix}$ $\det(A)=(m+1)^2\left(m^2-m+1\right)^2$ $\det(A)\neq 0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	2p 1p 2p
b)	Fie (x_0,y_0,z_0) soluția sistemului Adunând cele 3 ecuații obținem $(m+1)^2(x_0+y_0+z_0)=0$ știind că $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ obținem $x_0+y_0+z_0=0$	3p 2p
c)	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}A=2$ $\text{rang}\overline{A}=2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat soluția sitemului $(\alpha-3,\alpha+1,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$	2p 1p 2p
2. a)	$x\circ(-1)=x \Rightarrow x(-a+b-1)+c-b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=b-1 \\ c=b \end{cases}$ $\frac{1}{2}\circ\left(-\frac{11}{8}\right)=-1 \Rightarrow 11a+14b-16c=16$ se obțin valorile $a=2$, $b=3$, $c=3$	2p 1p 2p
b)	$x\circ y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2} \Rightarrow x\circ x\circ x=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}$ notând $t=x+\frac{3}{2}$ ecuația devine $4t^3=t$ cu soluțiile $t\in\left\{0,\pm\frac{1}{2}\right\}$ știind că $x\in G$ $\Rightarrow$ soluția ecuației este $x=-1$	2p 2p 1p
c)	f morfism $\Rightarrow f(x\circ y)=f(x)+f(y)$ $\ln(2mxy+3mx+3my+3m+n)=\ln(mx+n)+\ln(my+n) \Rightarrow \begin{cases} m^2=2m \\ 3m=mn \\ 3m+n=n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$ $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(2x+3)$ funcție bijectivă	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases} 2x-3+\ln x & , x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right) \\ -2x+3+\ln x & , x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right) \end{cases}$	1p

	f continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\lim_s\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_d\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$ f continuă în $x=\frac{3}{2}$ $f_s'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}$, $f_d'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{8}{3}\Rightarrow$ f nu este derivabilă în $x=\frac{3}{2}$	1p 1p 2p
b)	$f'(x)=\begin{cases}2+\frac{1}{x} & ,x\in\left(\frac{3}{2},\infty\right)\\ -2+\frac{1}{x} & ,x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\end{cases}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ f crescătoare pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ și descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2}$ punct de maxim local și $x=\frac{3}{2}$ punct de minim local	1p 1p 1p 2p
c)	prima bisectoare $y=x\Rightarrow$ panta este $m=1$ $\Rightarrow f'(x_0)=1\ \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ punctul de tangență va fi $T\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}-\ln 3\right)$ ecuația tangentei $x-y+2-\ln 3=0$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$f\left(-\sqrt[4]{x}\right)=\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-3$ $\int_1^{16}f\left(-\sqrt[4]{x}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{5}\sqrt[4]{x^5}-3x\right)\Big\|_1^{16}$ calculând obținem $\frac{233}{5}$	1p 2p 2p
b)	$V=\pi\int_0^3 g^2(x)dx\ \Rightarrow\ V=\pi\int_0^3\sqrt{-x^2+2x+3dx}$ $I=\int_0^3\sqrt{-x^2+2x+3dx}=\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}dx$ realizând schimbarea de variabilă $t=x-1\Rightarrow\ I=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}dt$ aplicând metoda integrării prin părți obținem $I=\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\frac{t}{2}\right)\Big\|_{-1}^{2}$	1p 1p 2p

	$V=\pi\sqrt{3}+\frac{4\pi^2}{3}$	1p
c)	$a_n=\int_n^{n+1}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx$ $a_n=1-\frac{4}{n(n+1)}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{n^2}=e^{-4}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3=a_1q^2$, $a_4=a_1q^3$ $a_1=\frac{27}{4}$, $q=-\frac{2}{3}$ $S_4=a_1\cdot\frac{q^4-1}{q-1}\Rightarrow S_4=\frac{13}{4}$	2p 1p 2p
2.	$f(x)=y\Rightarrow x=\log_3\left(2^{y+1}-1\right)$ $f^{-1}:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_3\left(2^{x+1}-1\right)$	3p 2p
3.	Condiții de existență : $\begin{cases}x+7\geq 0\\x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,\infty)$ ecuația devine : $2\sqrt{x+7}=3\sqrt{x+2}$ $x=2\in[-2,\infty)$	2p 1p 2p
4.	$\{a,b,c\}$ cu $a\in\{1,3,5,7,9\}$, $b,c\in\{0,2,4,6,8\}$ $C_5^1\cdot C_5^2=50$	2p 3p
5.	$C\in Oy\Rightarrow C(0,a)\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&a&1\end{vmatrix}=a-3$ $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert\Rightarrow\lvert\Delta\rvert=2$	2p 1p

	se obțin punctele $C_1(0,5)$ și $C_2(0,1)$	2p
6.	$tg2b=\frac{2tgb}{1-tg^2b}\Rightarrow tg2b=\frac{3}{4}$	2p
	$tg(a+2b)=\frac{tga+tg2b}{1-tga\cdot tg2b}\Rightarrow tg(a+2b)=1\Rightarrow a+2b=45^\circ$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$	2p
	Verificarea identității	3p
b)	$AX=XA\Rightarrow\begin{cases} b=2c \\ c=a-d \end{cases}$	1p
	$X=\begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ a-d & d \end{pmatrix}\Rightarrow \det(X)=-2a^2+5ad-2d^2\Rightarrow \det(X)=(2a-d)(2d-a)$	2p
	$X=\begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 2a \end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix} 2d & 2d \\ d & d \end{pmatrix}$	2p
c)	$\det(X^4)=\det(A)\Rightarrow\det(X)=0$	1p
	conform pct a) $X^2=(a+d)X\Rightarrow X^4=(a+d)^3X$	1p
	$X^4=A\Rightarrow\begin{cases} a=b \\ c=d \\ a=2c \end{cases}\Rightarrow c^4=\frac{1}{9}\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	2p
	soluțiile ecuației vor fi : $X=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f\,\vdots\,X-1\Rightarrow f(1)=0$	3p
	verificarea condiției	2p
b)	relațiile lui Viete $\Rightarrow s_1=i$, $s_2=1+i$, $s_3=6-2i$, $s_4=4-4i$	1p
	notând $T_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n$ și adunând relațiile $f(x_i)=0\Rightarrow$ $T_4+i\cdot T_3+(1+i)\cdot T_2-2(3-i)\cdot T_1+4(4-4i)=0$	1p
	$T_1=s_1=-i$, $T_2=s_1^2-2s_2=-3-2i$	1p
	adunând relațiile $\frac{f(x_i)}{x_i}=0\Rightarrow$ $T_3+i\cdot T_2+(1+i)\cdot T_1-2(3-i)\cdot 4+4(4-4i)\cdot\frac{s_3}{s_4}=0\Rightarrow T_3=15-2i$	1p

	$T_4=-19 \Rightarrow \operatorname{Im}(T_4)=0$	1p
c)	$f(1-i)=0 \Rightarrow m=2-i$ $f=(x-1)(x-1+i)(x^2+2x+4)$ $x_1=1\ ,\ x_2=1-i\ ,\ x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1$ $f'(x)>0\,,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow$ f injectivă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$, f continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} f=\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow$ f nu este surjectivă	2p 1p 2p
b)	$Gf\cap Ox=\{A(-1,0)\}$ $m=f'(-1)=\dfrac{1}{2}$ ecuația tangentei $y-y_A=m(x-x_A)$ înlocuind obținem $x-2y+1=0$	1p 1p 1p 2p
c)	asimptotă orizontală $y=-\dfrac{1}{2}$ spre $-\infty$ asimptotă oblică $y=2x+\dfrac{1}{2}$ spre ∞ domeniul de definiție este $\mathbb{R}\Rightarrow$ nu există asimptote verticale	2p 2p 1p
2. a)	$\int_0^1 f(x+2)\cdot e^x dx=\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx$ $\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx=e^x\left(x^2-2x+1\right)\Big\|_0^1$ calculând $\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx=-1$	1p 2p 2p
b)	$\Gamma_g=\int_0^2 \|g(x)\|\,dx=\int_0^2 \left\|(x-1)e^{x^2-2x+1}\right\|dx=\int_0^2 \|(x-1)\|\,e^{x^2-2x+1}dx$ $\Gamma_g=\int_0^1 (-x+1)e^{x^2-2x+1}dx+\int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x+1}dx$ realizăm schimbarea de variabilă $t=x^2-2x+1$ calculând $\Gamma_g=e-1$	2p 1p 1p 2p

c)	$\int_1^3 (x^2-4x+3)^n\,dx=\int_1^3 ((x-2)^2-1)^n\,dx=\int_{-1}^1 (t^2-1)^n\,dt$ $f(x)=(x^2-1)^n$ este funcție pară $\int_{-1}^1 (t^2-1)^n\,dt=2\cdot\int_0^1 (t^2-1)^n\,dt$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$4<5<8\Rightarrow -3<\log_{0,5}5<-2\Rightarrow\left[\log_{0,5}5\right]=-3$ $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=5$ $z_1=4-3i$, $z_2=-4-3i$	2p 1p 2p
2.	$S=-\frac{b}{a}=-m$, $P=\frac{c}{a}=m+2$ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-1\ \Rightarrow \frac{S^2-2P}{P}=-1$ $m^2-m-2=0\Rightarrow m\in\{-1,2\}$	2p 1p 2p
3.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $x+\frac{\pi}{6}=(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$	1p 2p 2p
4.	$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ $\frac{1}{3}=\frac{1}{n-2}\Rightarrow n=5$	2p 3p
5.	$-\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}\Rightarrow d_1 \parallel d_2\Rightarrow \text{latura}=\text{dist}(d_1,d_2)$	1p

	$\operatorname{dist}(d_1,d_2)=\operatorname{dist}(A,d_2)=\frac{\lvert ax_A+by_A+1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $A\in d_1$ alegând $A(1,1)\in d_1\Rightarrow$ latura $=\frac{3}{2}\Rightarrow$ aria $=\frac{9}{4}$	2p 2p
6.	$A=\frac{3\sin x}{2\sin x+5\cos x}=\frac{3\sin x}{\cos x(2\sin x+5)}$ $A=\frac{3\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x+5}=\frac{2}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=2-5a$ $\det(A)=0\Rightarrow a=\frac{2}{5}\notin\mathbb{Z}$ deci $\det(A)\neq 0\Rightarrow X=O_3$ soluție unică	2p 1p 2p
b)	$\det(A)=2$ $A^*=\begin{pmatrix}-9 & 10 & -4\\ 7 & -8 & 4\\ -3 & 4 & -2\end{pmatrix}$ $X=A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot A^*$	1p 2p 2p
c)	$\det(A)=2-5a\neq 0$ $d_x=3(2-5a)$, $d_y=-2(2-5a)$, $d_z=2-5a$ soluția va fi $(3,-2,1)$	1p 2p 2p
2. a)	$B=\left\{f\in\mathbb{Z}_5[X]\mid f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e\quad,\quad a\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\},b,c,d,e\in\mathbb{Z}_5\right\}$, $\operatorname{card}B=4\cdot 5^4$ $A=\left\{f\in\mathbb{Z}_5[X]\mid f=X^4+aX^3+bX^2+\hat{4}\quad,\quad a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$, $\operatorname{card}A=5^2$ $\text{prob}=0,01$	2p 2p 1p
b)	$f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow\hat{3}a+\hat{4}b=\hat{0}$ $f(X+\hat{1})=(X+\hat{2})\cdot c+\hat{3}\Rightarrow f(\hat{4})=\hat{3}\Rightarrow\hat{4}a+b=\hat{3}$ obținem $a=\hat{4}$, $b=\hat{2}$	1p 2p 2p
c)	$f=X^4+\hat{4}$ 5 este număr prim $\Rightarrow x^4=\hat{1},\forall x\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\}$ (teorema lui Fermat) $f(x)=\hat{0}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\}\Rightarrow f=(x+\hat{1})(x+\hat{2})(x+\hat{3})(x+\hat{4})$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{a\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$ $a>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(-\infty,-1)$ respectiv $(1,\infty)$ și $f'(x)<0$ pe $(-1,1)$ $a<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-\infty,-1)$ respectiv $(1,\infty)$ și $f'(x)>0$ pe $(-1,1)$ deci $x=1$ și $x=-1$ sunt puncte de extrem local	2p 1p 2p
b)	$f(-1)=\frac{a+2}{2}$, $f(1)=\frac{2-a}{2}$ $a>0\Rightarrow \max=f(-1)=3$ și $\min=f(1)=-1\ \Rightarrow a=4$ $a<0\Rightarrow \min=f(-1)=-1$ și $\max=f(1)=3\ \Rightarrow a=-4$	1p 2p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{f'(x)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1}}$ limita este egală cu 0	3p 2p
2. a)	schimbarea de variabilă $t=x^2$ $I=\frac{e-1}{2}$	2p 2p 1p
b)	$g(x)=f(x)+\frac{e}{f(x)}=e^{x^2}+e^{1-x^2}\ \Rightarrow g'(x)=2xe^{1-x^2}\left(e^{2x^2-1}-1\right)$ $g'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x\in[0,1]\Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le g(x)\le g(0)$, $g(0)=g(1)=\max$ înlocuind și integrând pe intervalul $[0,1]$ obținem relația cerută	2p 1p 1p 1p
c)	$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=e^{t^2}$ continuă $\Rightarrow$ f admite primitive Fie F o primitivă a lui f $\Rightarrow$F derivabilă și $F'=f\ \Rightarrow \int_0^{x^2}f(t)dt=F\left(x^2\right)-F(0)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F\left(x^2\right)-F(0)}{f(x)-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2xF'\left(x^2\right)}{f'(x)}=1$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n=a_1+(n-1)r$ $\begin{cases} r=3a_1 \\ 2a_1+12r=19 \end{cases}\Rightarrow a_1=\frac{1}{2}$	2p 3p
2.	$f(x)=ax+b\ ,\ g(x)=cx+d$ din $f\circ g=g\circ f\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ ad+b=bc+d$ un exemplu este $f(x)=2x-1\ ,\ g(x)=-3x+4$	3p 2p
3.	$\log_3 2<1\Rightarrow x^2-x<x+3$ $x^2-2x-3<0\Rightarrow x\in(-1,3)$ $x\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow x\in\{1,2\}$	2p 2p 1p
4.	$\{12,16,...,96\}\Rightarrow 22$ numere divizibile cu 4 $\{12,18,...,96\}\Rightarrow 15$ numere divizibile cu 6 $\{12,24,...,96\}\Rightarrow 8$ numere divizibile cu 4 şi cu 6 Deci vor fi 29 de numere divizibile cu 4 sau cu 6	1p 1p 1p 2p
5.	coordonatele mijlocului segmentului AB : $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ panta dreptei AB : $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1$ panta mediatoarei : $m=-\frac{1}{m_{AB}}=1$ ecuaţia mediatoarei : $y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow x-y=0$	1p 1p 1p 2p
6.	$\frac{NA}{NC}=\frac{1}{5}\Rightarrow\overrightarrow{DN}=\frac{5}{6}\left(\overrightarrow{DA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{DC}\right)$ $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{4}\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{DB}\ ,\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow\overrightarrow{DN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DM}\ \Rightarrow$ vectorii sunt coliniari $\Rightarrow$ punctele sunt coliniare	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$B=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ B^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	2p

	$B^3=O_3 \Rightarrow k=3$	3p
b)	$A=2I_2+B$ și aplicând Binomul lui Newton obținem $A^n=2^n I_2+n\cdot 2^{n-1}B+n(n-1)\cdot 2^{n-3}B^2$ $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & n(n+2)\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	$\det\left(A^k\right)=8^k$ $\sum_{k=1}^{n}\det\left(A^k\right)=\sum_{k=1}^{n}8^k=8\cdot\frac{8^n-1}{7}$ $7\cdot\sum_{k=1}^{1005}\det\left(A^k\right)=8^{1006}-8 \Rightarrow 7\cdot\sum_{k=1}^{1005}\det\left(A^k\right)\le 8^{1006}\le 9^{1006}=3^{2012}$	1p 2p 2p
2. a)	$A^2=2A$ $X_a\cdot X_b=X_{a+b+2ab}$ $a>-\frac{1}{2}, b>-\frac{1}{2} \Rightarrow a+b+2ab>-\frac{1}{2}$ din cele 2 relații $\Rightarrow X_a\cdot X_b\in G$	1p 2p 1p 1p
b)	f morfism $\Leftrightarrow f\left(X_a\cdot X_b\right)=f\left(X_a\right)+f\left(X_b\right), \forall X_a,X_b\in G$ f injectivă $\Leftrightarrow$ fie $X_a,X_b\in G$ $f\left(X_a\right)=f\left(X_b\right) \Rightarrow a=b$ f surjectivă $\Leftrightarrow f\left(X_a\right)=y \Rightarrow a=\frac{e^y-1}{2}>-\frac{1}{2}$ deci f este izomorfism de grupuri	2p 1p 1p 1p
c)	$f\left(X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot X_{\frac{5}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\right)=f\left(X_{\frac{1}{2}}\right)+f\left(X_{\frac{3}{2}}\right)+f\left(X_{\frac{5}{2}}\right)+\ldots+f\left(X_{\frac{2n-1}{2}}\right)$ $f\left(X_{\frac{2k-1}{2}}\right)=\ln(2k)$ înlociund obținem $f\left(X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot X_{\frac{5}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\right)=\ln\left(2^n\cdot n!\right)=f\left(X_{\frac{2^n\cdot n!-1}{2}}\right)$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $f'(x)\ge 0 \Rightarrow$ f strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 3p
b)	f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă	1p

	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, f continuă $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f surjectivă f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă $\Rightarrow$ $g'(0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, $f(x_0)=0\Rightarrow x_0=0$ $g'(0)=1$	1p 2p 1p
c)	egalitatea este verificată pentu $x=0$ și $x=1$ $x\in(0,1)\Rightarrow\begin{cases}x>x^2\\x^3>x^4\end{cases}\xrightarrow{f\text{ cresc}}\begin{cases}f(x)>f(x^2)\\f(x^3)>f(x^4)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f\left(x^3\right)>f\left(x^2\right)+f\left(x^4\right)$ $\begin{matrix}x>1\\x<0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x<x^2\\x^3<x^4\end{cases}\xrightarrow{f\text{ cresc}}\begin{cases}f(x)<f(x^2)\\f(x^3)<f(x^4)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f\left(x^3\right)<f\left(x^2\right)+f\left(x^4\right)$ deci soluțiile găsite sunt unice	2p 1p 1p 1p
2. a)	schimbarea de variabilă $t=x^4+1$ $\Rightarrow$ $I_3=\dfrac{\ln 2}{4}$ schimbarea de variabilă $t=x^2$ $\Rightarrow$ $I_1=\dfrac{\pi}{8}$	2p 3p
b)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^4+1}dx\le 0\Rightarrow(I_n)_{n\ge1}$ descrescător $0\le I_n\le I_1\Rightarrow(I_n)_{n\ge1}$ mărginit deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent $\dfrac{x^n}{x^4+1}\le x^n$ pentru $x\in[0,1]\Rightarrow$ $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$ $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$I_{n+4}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$ $\dfrac{1}{2(n-3)}\le I_n\le\dfrac{1}{2(n+1)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{n^k}{2(n-3)}\le n^k\cdot I_n\le\dfrac{n^k}{2(n+1)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\cdot I_n=\begin{cases}\infty & ,k>1\\ \dfrac{1}{2} & ,k=1\\ 0 & ,k<1\end{cases}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$m=5^{1+x}+5^{1-x}=5\cdot5^x+5\cdot5^{-x}=5\left(5^x+5^{-x}\right)=5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)$ $p=25^x+25^{-x}=5^{2x}+5^{-2x}=\left(5^x\right)^2+\left(5^{-x}\right)^2=\left(5^x\right)^2+\left(\frac{1}{5^x}\right)^2=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2\cdot5^x\cdot\frac{1}{5^x}=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2$ Dar $m+p=2n\Rightarrow\begin{cases}5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2=a\\ Not.5^x+\frac{1}{5^x}=y\end{cases}\Rightarrow y^2+5y-2=a\Leftrightarrow y^2+5y-2-a=0$ Ec.are rădăcini reale $\Leftrightarrow\Delta\geq0(1)$;Cum y>0(2) $\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}\Delta\geq0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+33\geq0\\ -a-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq-\frac{33}{4}\\ a<-2\end{cases}\Rightarrow a\in\left[-\frac{33}{4};-2\right)$	1p 1p 1p 2p
2.	$f(x)>0\Leftrightarrow\frac{mx^2+2(m+1)x+m-2}{x^2+1}>0\Leftrightarrow mx^2+2(m+1)x+m-2>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4m+1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(0;+\infty)\\ m\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow m\in(0;+\infty)\cap\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)=\varnothing$	1p 2p 2p
3.	$M=\left\{x/x\in\mathbb{Z},\lvert x\rvert\leq7\right\}=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ Pt.x≥0$\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x_1=4;x_2=1$ Pt.x<0$\Rightarrow x^2+5x+4=0\Rightarrow x_1=-4;x_2=-1$ Evenimentul $A=\{-4,-1,1,4\}$ $\Rightarrow$Evenimentul contrar lui A este: $\overline{A}=\{-7,-6,-5,-3,-2,0,2,3,5,6,7\}$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$\left(17x^5-18y\right)^{2012}=C_{2012}^0\left(17x^5\right)^{2012}(-18y)^0+C_{2012}^1\left(17x^5\right)^{2011}(-18y)^1+\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{2012}^{2012}\left(17x^5\right)^0(-18y)^{2012}$ Suma coeficienţilor este: $C_{2012}^0 17^{2012}(-18)^0+C_{2012}^1 17^{2011}(-18)^1+C_{2012}^2 17^{2010}(-18)^2+\ldots\ldots\ldots+C_{2012}^{2012}17^0(-18)^{2012}=$ $\underset{cf.form.binom.Newton}{=}\left(17+(-18)\right)^{2012}=(-1)^{2012}=1$	2p 3p
5.	$\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}=3\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)-2\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)+\left(4\vec{j}\right)=8\vec{i}-9\vec{j}$ $\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}=-2\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)+\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\vec{j}=-5\vec{i}+4\vec{j}$ $\vec{a}+\vec{b}=\left(8\vec{i}-9\vec{j}\right)+\left(-5\vec{i}+4\vec{j}\right)=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\left\lvert\vec{a}+\vec{b}\right\rvert=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$	2p 2p 1p

6.	Folosim relaţia $\arcsin x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(0;1)$ $\arcsin\frac{4}{5} = arctg\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = arctg\frac{4}{3} \Rightarrow tg\left(\arcsin\frac{4}{5}+arctg\frac{7}{24}\right)=$ $= tg\left(\text{arc}\,tg\frac{4}{3}+arctg\frac{7}{24}\right)=tg(a+b)$ unde am notăm $\begin{cases}\text{arc}\,tg\frac{4}{3}=a\\ \text{arc}\,tg\frac{7}{24}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tga=\frac{4}{3}\\ tgb=\frac{7}{24}\end{cases}$ $\Rightarrow tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}=\ldots=\frac{117}{44}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$ sunt: $\hat{1},\hat{5},\hat{7},\hat{11}$ $\Rightarrow \hat{1}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{11}=\hat{0}$	3p 2p
b)	$\det A=\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{5}\\ \hat{x}&\hat{1}&\hat{2}\\ \hat{4}&\hat{3}&\hat{1}\end{vmatrix}=\hat{3}x+\hat{11}$ $\Rightarrow$ $\det A=\hat{3}x+\hat{11}\neq\hat{0}\Rightarrow\hat{3}x\neq\hat{1}\Rightarrow x\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7},\hat{8},\hat{9},\hat{10},\hat{11},\right\}=\mathbb{Z}_{12}$ $\Rightarrow$ A este inversabilă $\forall x\in\mathbb{Z}_{12}$.	2p 2p
c)	Pentru $x=\hat{0}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{9}&\hat{5}\\ \hat{4}&\hat{7}&\hat{2}\\ \hat{8}&\hat{3}&\hat{11}\end{pmatrix}\in M(\mathbb{Z}_{12})$ Ecuaţia YA=B ⇔ Y=BA^{-1} $=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{2}\\ \hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{2}&\hat{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{9}&\hat{5}\\ \hat{4}&\hat{7}&\hat{2}\\ \hat{8}&\hat{3}&\hat{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{3}&\hat{3}\\ \hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{4}&\hat{5}&\hat{3}\end{pmatrix}$	3p 2p
2. a)	$\left.\begin{array}{l}f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+....+a_{2n-1}+a_{2n}=3^n\\ f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+....-a_{2n-1}+a_{2n}=1\end{array}\right\}\Rightarrow a_1+a_3+....+a_{2n-1}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=$ $=\frac{3^n-1}{2}$	1p 3p 1p
b)	Cf.teor.împărţirii cu rest a polinoamelor $\Rightarrow$ $f=(X+2)^2\cdot q+ax+b, a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow f(-2)=-2a+b=3^n\ (1)$ $f'=2(X+2)q+(X+2)^2q'+a\Rightarrow f'(-2)=a\,(2)$	3p

Dar $f'=n\left(X^2+X+1\right)^{n-1}\left(2X+1\right)\Rightarrow f'(-2)=n\cdot 3^{n-1}\cdot(-3)=-n\cdot 3^n\ (3)$

$\overset{din(2)si(3)}{\Rightarrow}\ a=-n\cdot 3^n$ de unde $b=3^n\left(1-2n\right)$ — 2p

c) f(x)=f(-x) $\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^n=\left(x^2-x+1\right)^n$;cum $x^2-x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ — 2p

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^n=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\Rightarrow\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};$$

$k\in\left\{0,1,....,n-1\right\}$

Pentru k=0 $\Rightarrow$ x$_0$=0

Pentru $k=\overline{1,n-1}$ avem

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{-1+\cos\alpha+i\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2i^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-ictg\frac{\alpha}{2}$$ — 2p

Deci $x^2+ixctg\frac{\alpha}{2}+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-i\left(ctg\frac{k\pi}{n}\pm\sqrt{4+ctg^2\frac{k\pi}{n}}\right)}{2};k=\overline{1,n-1}$ — 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ — 1p

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 1p

Semnul lui $f'(x)$: — 2p

x	$-\infty$	-1 $+\infty$
$x+2$		+ +
$x+1$		+ +
$f'(x)$		+ +
$f(x)$		$-\infty$ ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗ $+\infty$

$\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie. — 1p

b) Se arată că pe intervalul (-1;0)avem $f(x)<0\Rightarrow$ — 1p

$$A(\alpha)=-\int_\alpha^0 f(x)dx=-\int_\alpha^0\left(x+\ln(1+x)\right)dx=-\int_\alpha^0 xdx-\int_\alpha^0\ln(1+x)dx=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_\alpha^0-\int_\alpha^0 x'\cdot\ln(1+x)dx=0+\frac{\alpha^2}{2}-\left[x\cdot\ln(1+x)\Big|_\alpha^0-\int_\alpha^0\frac{x}{1+x}dx\right]=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}-\left[0-\alpha\cdot\ln(1+\alpha)-\int_\alpha^0\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx\right]=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\cdot\ln(1+\alpha)+x\Big|_\alpha^0-\ln(1+x)\Big|_\alpha^0=$$ — 3p

$$=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\cdot\ln(1+\alpha)-\alpha+\ln(1+\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1),$$ — 1p

c)	$\lim_{\alpha\to-1} A(\alpha)=\lim_{\alpha\to-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\right)=\lim_{\alpha\to-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)+\underbrace{\lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\ln(\alpha+1)}_{not.L}=$ $=\frac{3}{2}+L=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$ Unde $L\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\ln(\alpha+1)=\lim_{\alpha\to-1}\frac{\ln(\alpha+1)}{\frac{1}{\alpha+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{\alpha\to-1}\frac{\frac{1}{\alpha+1}}{-\frac{1}{(\alpha+1)^2}}=\lim_{\alpha\to-1}-(1+\alpha)=0$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_1^e xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_1^e=\frac{e^2-1}{2}$ $I_1=\int_1^e x\ln xdx\overset{prin\ parti}{=}\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx=\left.\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right)\right\vert_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$ $=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2}=\frac{e^2+1}{4}$	2p 3p
b)	Folosim metoda integrării prin părţi⇒ $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\ln x)^n dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right)\right\vert_1^e-n\int_1^e(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=$ $=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\cdot I_{n-1}$ Am găsit $I_n=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\cdot I_{n-1}\Big\vert\cdot 2\Rightarrow 2I_n+nI_{n-1}=e^2$	3p 2p
c)	Şirul $(I_n)_{n\ge0}$ este descrescător⇒ $\begin{cases} I_{n+1}-I_n\le0\\ I_{n+1}-I_n\overset{cf.b)}{=}\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}\cdot I_n-I_n=\frac{e^2}{2}-I_n\left(\frac{n+1}{2}+1\right)=\frac{e^2}{2}-I_n\frac{n+3}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{e^2}{2}-I_n\frac{n+3}{2}\le0\Rightarrow I_n\frac{n+3}{2}\ge\frac{e^2}{2}\Rightarrow I_n\ge\frac{e^2}{n+3}(1)$ Analog avem: $\begin{cases} I_{n-1}-I_n\ge0\\ I_{n-1}-I_n\overset{cf.b)}{=}\frac{e^2}{n}-\frac{2}{n}\cdot I_n-I_n=\frac{e^2}{n}-I_n\left(\frac{2}{n}+1\right)=\frac{e^2}{n}-I_n\frac{n+2}{n}\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{e^2}{n}-I_n\frac{n+2}{n}\ge0\Rightarrow I_n\frac{n+2}{n}\le\frac{e^2}{n}\Rightarrow I_n\le\frac{e^2}{n+2}(2)$ $\Rightarrow\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$	2p 2p 1p

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$C_{x-3}^{0}=1$ $C_{x-1}^{2}=\frac{(x-1)!}{(x-3)!\cdot 2!}=\frac{(x-3)!\cdot(x-2)(x-1)}{(x-3)!\cdot 2}=\frac{(x-2)(x-1)}{2}$ $C_{x}^{x-2}=\frac{x!}{(x-x+2)!\cdot(x-2)!}=\frac{(x-2)!(x-1)x}{2(x-2)!}=\frac{(x-1)x}{2}$ Numerele $2C_{x-3}^{0};C_{x-1}^{2};C_{x}^{x-2}$ sunt în progresie aritmetică $\Rightarrow 2C_{x-3}^{0}+C_{x}^{x-2}=2C_{x-1}^{2}$ $\Rightarrow 2+\frac{x(x-1)}{2}=2\cdot\frac{(x-2)(x-1)}{2}\Leftrightarrow -x^2+5x=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\left(nu\,convine\right)\\ x_2=5\end{cases}\Rightarrow S=\{5\}$	1p 1p 1p 1p 1p
2.	$x_1+x_2=-2(m-1)$ $x_1x_2=8(m^2-1)$ Calculam $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-16(m^2-1)=4(-3m^2-2m+5)$ Fiind o funcţie de gradul II în *m*,aceasta ia valoarea maximă egală cu $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{16}{3}$ obţinută pentru $m=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$	1p 1p 2p 1p
3.	$M=\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$ Deoarece ordinal radicalului trebuie sa fie un nr.natural ≥2, numărul x! va fi totdeauna un număr par $\Rightarrow\frac{2x^2+x-21}{5-4x-x^2}\ge 0\ \Rightarrow x\in\left(-5,-\frac{7}{2}\right]\cup(1,3]$ Cum $x\in\mathbb{N}$ si x ≥2 $\Rightarrow A=\{2,3\}$	1p 3p 1p
4.	$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}\Rightarrow$ $z^{20}=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)}{2^{10}(\cos 35\pi+i\sin 35\pi)}=2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}-35\pi\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}-35\pi\right)\right)=$ $=2^{10}\left(\cos\left(-\frac{95\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{95\pi}{3}\right)\right)=2^{10}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)=$ $=2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2^{10}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^{9}\left(1+i\sqrt{3}\right)$	3p 2p
5.	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=32$ Dar $C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=2^n$ $\Rightarrow 2^n=32\Rightarrow$n=5	1p 1p 1p

	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow T_4=C_5^3\left(2x^2\right)^2\left(-5y\right)^3=-5000x^4y^3$	2p
6.	Ecuaţia dreptei BC este: x+2y-4=0 $A\in BC \Leftrightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	„ $\Rightarrow$” Ştim $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0};\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3 \Rightarrow \begin{cases} pt.a=\hat{0}\Rightarrow \hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}=\hat{0}\\ pt.a=\hat{1}\Rightarrow \hat{1}+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow \hat{b}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{b}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\right)\Rightarrow\\ pt.a=\hat{2}\Rightarrow\hat{1}+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{b}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\right)\end{cases}$ $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$ „$\Leftarrow$”-se verifică direct	3p 2p
b)	Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{a}&\hat{b}\\-\hat{b}&\hat{a}\end{pmatrix}\in M$;calculam $A^2=\begin{pmatrix}\hat{a}^2-\hat{b}^2 & \hat{2}\hat{a}\hat{b}\\ -\hat{2}\hat{a}\hat{b} & \hat{a}^2-\hat{b}^2\end{pmatrix}$ Relaţia $A^2+I_2=O_2\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{a}^2-\hat{b}^2+\hat{1}=\hat{0}(1)\\ \hat{2}\hat{a}\hat{b}=\hat{0}(2)\end{cases}$ Din (2) $\Rightarrow \hat{a}=\hat{0}$ sau $\hat{b}=\hat{0}$ Pentru $\hat{a}=\hat{0}\overset{in(1)}{\Rightarrow}\hat{b}^2=\hat{1}\Rightarrow\begin{cases}\hat{b}=\hat{1}\\ \hat{b}=\hat{2}\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix}\in M$ sau $A=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{2}\\-\hat{2}&\hat{0}\end{pmatrix}\in M$ Pentru $\hat{b}=\hat{0}\overset{in(1)}{\Rightarrow}\hat{a}^2+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow\hat{a}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{a}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\ in\ \mathbb{Z}_3\right)$	2p 1p 2p
c)	Mulţimea M are 9 elemente Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{a}&\hat{b}\\-\hat{b}&\hat{a}\end{pmatrix}\in M\Rightarrow \det\left(A\right)=\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\overset{cf.a)}{\Leftrightarrow}\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}=O_2$ Celelalte 8 elemente din M au determinantul $\neq 0\Rightarrow$ celelalte 8 matrice sunt inversabile	2p 2p 1p
2. a)	$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\sigma\tau\neq\tau\sigma$	2p 2p 1p
b)	Not.nr.inversiunilor permutării σ cu $m\left(\sigma\right)$ şi signatura cu $\varepsilon^{m(\sigma)}=\left(-1\right)^3=-1$ $\Rightarrow m\left(\sigma\right)=2+1=3\Rightarrow\varepsilon^{m(\sigma)}=\left(-1\right)^3=-1\Rightarrow\sigma$ permutare impară	1p 2p

	$m(\tau)=1 \Rightarrow \varepsilon^{m(\tau)}=(-1)^1=-1 \Rightarrow \tau$ permutare impară	2p
c)	$\sigma x=\tau \Rightarrow x=\sigma^{-1}\tau$ Cum $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\sigma \Rightarrow x=\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$D_f=?$ Condiţia: $1+\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x}>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$
Asimptota orizontală: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ln 1=0 \Rightarrow ec.asimp.oriz.spre\pm\infty$ este y=0
Asimptote verticale: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty \Rightarrow ec.asimp.vertic.este\ \ x=-2$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty \Rightarrow ec.asimp.vertic.este\ \ x=0$</td><td>2p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Calculăm $f'(x)=-\frac{2}{x(x+2)};D_{f'}=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$
Semnul lui f':
$$\begin{array}{c|ccc|c|ccc} x & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & - & - & - & & - & - & - \\ \hline f(x) & 0 & \searrow\searrow\searrow\searrow & -\infty & & +\infty & \searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow & 0 \end{array}$$
$\Rightarrow$ funcţia f este strict descrescătoare pe domeniul său</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$x_n=\frac{f(1)+f(2)+f(3)+......+f(n)}{n}=$
$\frac{\ln\left(1+\frac{2}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{3}\right)+......+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n}=$
$=\frac{\ln\left(\left(1+\frac{2}{1}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)......\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}{n}=$
$\frac{\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot.......\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)}{n}=$
$=\frac{\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{n}=\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{n}=0$</td><td>3p
2p</td></tr>
</table>

2. a)	$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^0\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^1\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$	2p 3p
b)	$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(\cos x)^{n-1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'(\cos x)^{n-1}\,dx=$ $=\sin x\cdot(\cos x)^{n-1}\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\cos x)^{n-2}\cdot\left(-\sin^2 x\right)dx=$ $=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-2}\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx=$ $=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-2}\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$ $\Rightarrow I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}$ $\Rightarrow nI_n=(n-1)I_{n-2}\Big\vert :n\neq 0$ $\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},(\forall)\ n\in\boldsymbol{N},n\geq 2$	3p 2p
c)	$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to[0;1],\ f(x)=\cos x\Rightarrow$ $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=$ $=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2x dx+\frac{\pi}{2}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}(\sin 2x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(\sin\pi-\sin 0)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

< >

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Notăm cu x cel mai mic unghi şi raţia prin q$\Rightarrow\begin{cases}x+xq+xq^2+xq^3=360\\ xq^3=9xq\end{cases}$	2p

	$\Rightarrow \begin{cases} x+xq+xq^2+xq^3=360 \\ q^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+xq+xq^2+xq^3=360 \\ q=\pm 3 \end{cases}$ pt.ca este vorba de masuri de unghiuri,q= -3 nu convine ⇒q=3(inlocuim în prima ecuaţie) ⇒x·40=360⇒x=9 Finalizare:unghiurile sunt 9˚;27˚;81˚;243˚	2p 1p
2.	$\Delta=1 \Rightarrow V\left(\frac{2m-1}{2m};\frac{-1}{4m}\right)$ Ecuaţia primei bisectoare:y=x(notam dreapta cu *d)* $V \in d \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m}=\frac{-1}{4m} \Rightarrow 4m^2-m=0 \Rightarrow m_1=0(nu\ convine);m_2=\frac{1}{4}$	2p 1p 2p
3.	Notăm $\left[\frac{x+3}{4}\right]=k,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x-2}{3}=k,k\in\mathbb{Z}$ ⇒x=3k+2(1) Avem $k \le \frac{x+3}{4} < k+1/\cdot 4 \Rightarrow 4k \le x+3 < 4k+4 \overset{folos.(1)}{\Rightarrow} 4k \le 3k+5 < 4k+4/-5$ $\Rightarrow \begin{cases} k \le 5 \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow k \in \{2,3,4,5\} \Rightarrow S=\{8,11,14,17\}$	2p 2p 1p
4.	Not. $z=1+i\sqrt{3} \Rightarrow \lvert z\rvert=\sqrt{1+3}=2$ şi $\begin{cases} \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\varphi=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \Rightarrow z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $z^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)(1)$ Analog,pt. $z=1-i\sqrt{3}$ avem $\lvert z\rvert=2,\varphi=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\Rightarrow z^n=2^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)(2)$ Egalitatea devine: $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2^n/:2^n \ne 0\left(stim\,2^n>0,\forall n\in\mathbb{Z}\right)$ $\Rightarrow 2\cos\frac{n\pi}{3}=1 \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow n=\pm1+6k,k\in\mathbb{Z}$	2p 2p 1p
5.	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,0\le k\le n \Rightarrow T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}$ Termenii dezvoltarii sunt raţionali ⇔ exponentul 5-k este multiplu de nr.2⇒ $5-k\in\{0,2,4,6,8,.......\}$ Pentru *5-k=0⇒k=5(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5) \Rightarrow T_6=C_5^5\left(\sqrt{2}\right)^0=1$ Pentru *5-k=2⇒k=3(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5) \Rightarrow T_4=C_5^3\left(\sqrt{2}\right)^2=20$ Pentru *5-k=4⇒k=1(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5) \Rightarrow T_2=C_5^1\left(\sqrt{2}\right)^4=20$ Pentru *5-k=6⇒k=-1*∉ ℕ $\Rightarrow T_2+T_4+T_6=41$	2p 1p 1p 1p
6.	$PQ=\sqrt{\left(x_P-x_Q\right)^2+\left(y_P-y_Q\right)^2} \Rightarrow AB=\sqrt{10};AC=\sqrt{37};BC=\sqrt{29}$ Avem AC>BC>AB⇒ $\sphericalangle B$ are măsura cea mai mare	3p 1p 1p

	$\Rightarrow$(cf.teor.cosinusului) $\cos B=\frac{\sqrt{290}}{290}$	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta(x)=e^{2x^2+2x+2a}+2e^{-x^2-x-a}-e^0-e^0-e^0=$ $=e^{2(x^2+x+a)}+2e^{-(x^2+x+a)}-3$	3p 2p
b)	$\left.\begin{array}{l}\Delta(x)=0\\ not.e^{x^2+x+a}=t\end{array}\right\}\Rightarrow t^2+2\cdot\frac{1}{t}-3=0\Leftrightarrow t^3-3t+2=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=t_2=1\\ t_3=-2\end{cases}$ Avem (1) $e^{x^2+x+a}=1\Rightarrow x^2+x+a=0$; rădăcini reale strict negative $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-4a\ge 0\Rightarrow a\le\frac{1}{4}\\ S=-1<0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow a\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$ Avem (2) $e^{x^2+x+a}=-2$;ecuatia nu are solutii	3p 1p 1p
c)	Pentru a=1 $\Rightarrow$ $\Delta(x)=e^{2(x^2+x+1)}+2e^{-(x^2+x+1)}-3$ $not.e^{x^2+x+1}=t\Rightarrow\Delta(t)=\frac{t^3-3t+2}{t}=\frac{(t-1)^2(t+2)}{t}$	2p 2p 1p
2. a)	$x\perp(-1)=x+(-1)+1=x,\forall x\in\mathbb{Z}$ $(-1)\perp x=(-1)+x+1=x,\forall x\in\mathbb{Z}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	$(x\circ y)\circ z=(ax+by-1)\circ z=a(ax+by-1)+bz-1=a^2x+aby+bz-a-1(1)$, $x\circ(y\circ z)=x\circ(ay+bz-1)=ax+b(ay+bz-1)-1=ax+aby+b^2z-b-1(2)$, $\overset{(1)\equiv(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}a^2=a\\ b=b^2\\ -a-1=-b-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(a-1)=0\\ b(b-1)=0\\ a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0;a_2=1\\ b_1=0;b_2=1\\ a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b=0\left(nu\,convine\right)\\ a=b=1\end{cases}$	2p 2p 1p
c)	$f(x\perp y)=f(x)\circ f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}.$ $f(x\perp y)=f(x+y+1)=x+y+1+2=x+y+3,\forall x,y\in\mathbb{Z}.$ $f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-1=x+2+y+2-1=x+y+3,\forall x,y\in\mathbb{Z}.$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases}x,x\in[0,+\infty)\\ \frac{mx}{2x+m},x\in(-\infty,0)\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\Rightarrow f$ nu admite asimptotă orizontală spre +∞ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{mx}{2x+m}=\frac{m}{2}$, cu $m>0\Rightarrow f$ admite asimptotă orizontală spre - ∞ cu ecuatia $y=\frac{m}{2}$ Asimp.oblică:	1p 1p 1p 1p

	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1;n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x)=0\Rightarrow y=x$ este ecuatia asimptotei oblice spre + ∞ Asimptota verticala: $\begin{cases} l_s\left(-\frac{m}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{m}{2}\\ x<-\frac{m}{2}}}f(x)=\frac{-\frac{m^2}{2}}{0_-}=+\infty \\ l_d\left(-\frac{m}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{m}{2}\\ x>-\frac{m}{2}}}f(x)=\frac{-\frac{m^2}{2}}{0_+}=-\infty \end{cases}\Rightarrow x=-\frac{m}{2}$ este ecuaţia asimptotei verticale a funcţiei *f*	1p
b)	$f'(x)=\begin{cases}1,x\in[0,+\infty)\\ \frac{m^2}{(2x+m)^2},x\in(-\infty,0)\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}\end{cases}$ Să dem.că f este derivabilă în $x_0=0:\begin{cases} f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{mx}{2x+m}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{mx}{x(2x+m)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{m}{2x+m}=\frac{m}{m}=1\\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{x}=1\end{cases}$ $\Rightarrow f'(0)=1$ $\begin{array}{c\|lcl\|lcl} x & -\infty & & -\frac{m}{2} & & 0 & +\infty \\ \hline f'(x) & ++++++++++++ & & & ++++++++++1 & +++++++++++++++++++++ & \\ \hline f(x) & \frac{m}{2}\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow & & +\infty & -\infty\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow & 0\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow & +\infty \end{array}$ $\Rightarrow$ *f* este strict crescătoare pe domediul de definiţie	2p 2p 1p
c)	Din b) observăm că pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{m}{2}\right)$ avem $f(x)>\frac{m}{2}>0\Rightarrow f$ nu are soluţii Pentru $x\in\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$ valorile lui *f* sunt strict crescătoare de la - ∞ la +∞ $\Rightarrow f$ are o singura soluţie reală situată în intervalul $\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$,anume x=0	2p 3p
2. a)	$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^n\left(1+tg^2x\right)dx=\frac{(tgx)^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},n\in\mathbb{N},n\geq2$ Calculăm $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$ şi ţinând seama de recurenţa de mai sus ,obţinem $I_2=1-I_0=1-\frac{\pi}{4}$	3p 2p

b)	Avem că $tg^{n}x \ge 0, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ prin integrare,obţinem $I_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}$ Deoarece tgx≤1, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n (tgx-1)\,dx \le 0, \forall n \in \mathbb{N}$ sau $I_{n+1} \le I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ deci şirul este descrescător. Atunci $0 \le I_n \le I_0, \forall n \in \mathbb{N}$,deci şirul este şi mărginit. $\Rightarrow$ sir convergent	2p 2p 1p
c)	Deoarece $I_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi folosind relaţia de recurenţă de la a) $\Rightarrow$ $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \ge I_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$, sau $I_{n+2} \le \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$ Atunci $0 \le I_n \le \frac{1}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ şi aplicând criteriul cleştelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

***Prof:* Şerban George-Florin**

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a^2-2a+1=(a-1)^2$ $a^2-2a+1=(a-1)^2=i^2=-1$	3p 2p
2.	f (1)=1 , $f(f(1))=1$ $f^{-1}(f(1))=1$ $f(f(1))-f^{-1}(f(1))$=1-1=0	1p 2p 2p
3.	$8^x=27$ $x=log_8{}^{27}$	2 p 3 p
4.	Cazuri favorabile : 27 , 64 . Cazuri posibile : 10 ,11 ,......,99 - sunt 90 cazuri posibile . P(A)$=\frac{nr(cazfav)}{nr(cazpos)}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BC}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}+\vec{j}=2\cdot\vec{j}$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$ este egala cu 2 .	2p 2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{720}$	2p

	$R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{126}{\sqrt{720}}$	1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=1+a^2$ $\det A^3=(1+a^2)^3$ $\det A^3=(1+a^2)^3=1+3a^2+3a^4+a^6$	2p 2p 1p
b)	$A^2=\begin{pmatrix}1-a^2 & -2a\\ 2a & 1-a^2\end{pmatrix}$, $2\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2a\\ 2a & 2\end{pmatrix}$, $(a^2+1)\cdot I_2=\begin{pmatrix}a^2+1 & 0\\ 0 & a^2+1\end{pmatrix}$, $A^2-2\cdot A+(a^2+1)\cdot I_2=O_2$	3p 2p
c)	Matricea A este inversabilă deoarece $\det A=1+a^2\neq 0$ $A^2-2\cdot A+(a^2+1)\cdot I_2=O_2$, înmulţesc cu A^{-1} $A-2\cdot I_2+(a^2+1)\cdot A^{-1}=O_2$, $(a^2+1)\cdot A^{-1}-2\cdot I_2$**=-A**	1p 2p 2p
2. a)	R=f(-2) Teorema restului sau schema împărţirii . f(-2)=-15=R	2 p 3p
b)	$f=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)$, $f(-2)=-(2+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot(2+x_3)$ $(2+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot(2+x_3)=-f(-2)=15$	3p 2p
c)	Dacă f ar avea rădăcini întregi acestea ar fi printre divizorii întregi a lui 5 , adică 1 , -1 , 5, -5 . f (1)=-6 , f (-1)=-6 , f (5)=90 , f (-5)=-150 . Deci f nu are rădăcini întregi .	2p 3 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x^4}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$	1p 3p 1p
b)	y=mx+n , $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$ $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$ $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{-x}{x^2+1})=0$ y=x este asimptotă oblică la ∞ .	1p 1p 1p 2p
c)	$f(n)\ge 1$, $n^3\ge n^2+1$, $n^3-n^2\ge 1$, $n^2(n-1)\ge 1$ adevărat pentru orice n natural diferit de 0 şi 1 . f(1)=$\frac{1}{2}$ $a_n=f(1)+f(2)+.....+f(n)>\frac{1}{2}+1+1+.....+1=\frac{1}{2}+n-1=n-\frac{1}{2}$ $a_{n+1}-a_n=f(n+1)>0$, şirul a_n este strict crescător , deci are limită . $\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}(n-\frac{1}{2})=\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1 y\cdot e^{y+1}dy$ am făcut schimbarea de variabilă x-1=y $I_1=\int_0^1 y\cdot e^{y+1}dy=\int_0^1 y\cdot(e^{y+1})'dy=e^2-0-\int_0^1 e^{y+1}dy=e^2-(e^2-e)=e$ Am aplicat integrarea prin părţi .	1p 3p 1p

b)	$In=\int_0^1 y^n\cdot(e^{y+1})'\,dy=e^2-0-n\int_0^1 y^{n-1}\cdot e^{y+1}dy$ Am aplicat integrarea prin părţi . $In=e^2-n\int_0^1 y^{n-1}\cdot e^{y+1}dy=e^2-n\cdot I_{n-1}$	1p 1p 3p
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 y^n\cdot(y-1)\cdot e^{y+1}dy<0$ Şirul I_n este strict descrescător . Deci $I_n\le I_1=e$, $I_n\le e$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

***Prof:* Şerban George-Florin**

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4=\frac{10+16}{2}=13$, r =13-10 =3 , $a_1=4$ $a_n=a_1+(n-1)r$, $a_{50}=4+49\cdot 3=151$	3p 2p
2.	$min(f(x))=\frac{-\Delta}{4a}$ $\Delta=b^2-4ac=4$	1p 1p 3p

	$min(f(x))=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-4}{4}=-1$	
3.	$3^{3x+6}=3^4$ 3x+6=4 , 3x= -2 S={$-\frac{2}{3}$}	1p 2p 2p
4.	Cazuri favorabile : 12 , 21, 13 , 31 , 15, 51 , 17 , 71 (8 cazuri favorabile).Cazuri posibile : 10 ,11 ,......,99 - sunt 90 cazuri posibile . P(A)= $=\frac{nr(cazfav)}{nr(cazpos)}=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$	2p 3p
5.	M(x,y) , $(x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=5\cdot(-2-x)\vec{i}+5\cdot(3-y)\vec{j}$ x-1=-10-5x , x = $-\frac{9}{6}$, y+1=15 -5y , y = $\frac{14}{6}$, M ($-\frac{9}{6}$, $\frac{14}{6}$)	2p 3p
6.	$sin^3 x=cos^3 x$. Dacă cos x=0 rezultă că $x=\frac{\pi}{2}$, $sin\frac{\pi}{2}=1$, deci $x=\frac{\pi}{2}$ nu este soluţie a ecuaţiei . Presupun că $cos\,x\neq 0$, $tg^3 x=1$, dar tgx>0 deci tgx=1 $x=\frac{\pi}{4}$ S={$\frac{\pi}{4}$}.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	detA(x)=0 , detA(x)= x^3-3x+2 detA(x)= $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$=0 S={1,-2}	2p 2p 1p
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}2-x^2 & 1 & 1\\ 1 & 2-x^2 & 1\\ 1 & 1 & 2-x^2\end{pmatrix}$	3p 2p

c)	$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$ $A^{-1}(2)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$	1p 4p
2. a)	$2\circ 3=\sqrt{2^2\cdot 3^2-2^2-3^2+2}$ $2\circ 3=\sqrt{2^2\cdot 3^2-2^2-3^2+2}=\sqrt{25}=5$ $2\circ 3=5$	1p 3p 1p
b)	$x\circ e=e\circ x=x$, există $e\in(1,\infty)$, $\forall x\in(1,\infty)$ $\sqrt{x^2\cdot e^2-x^2-e^2+2}=\sqrt{e^2\cdot x^2-e^2-x^2+2}=x$ $(e^2-2)(x^2-1)=0$, e= $\sqrt{2}\in(1,\infty)$	1p 1p 3p
c)	$x\circ y=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, $x\circ x=\sqrt{(x^2-1)^2+1}$ $x\circ x\circ x\circ x=\sqrt{(x^2-1)^2+1}\circ\sqrt{(x^2-1)^2+1}=\sqrt{(x^2-1)^4+1}=2$ $(x^2-1)^4=3$, $x^2-1=\sqrt[4]{3}$, $x^2=\sqrt[4]{3}+1$, $x=\sqrt{\sqrt[4]{3}+1}\in(1,\infty)$, $S=\{\sqrt{\sqrt[4]{3}+1}\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(e^x)'-x'-1'$ $f'(x)=e^x-1-0$ $f'(x)=e^x-1$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=e^x-1$=0 , $e^x=1$, x=0 .	1p 1p

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 ∞</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>- - - - 0 + + + ...+</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>∞ ╲ ╲ ╲ 0 ╱ ╱ ╱</td></tr>
</table>
Punctul O (0 ,0) punct de minim .
</td>
<td>1p
2p</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>$f(x)\ge f(0)=0$, pentru orice x număr real .
$e^x \ge x+1$
$e^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}+1>1,4+1=2,4=\frac{12}{5}$</td>
<td>1p
1p
3p</td>
</tr>
<tr>
<td>2.
a)</td>
<td>$\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c=F(x)$
$F(\sqrt{e-1})=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+c$, c=1
$F(x)=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+1$</td>
<td>2p
2p
1p</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>$0\le x^n f(x)=\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\le x^{n+1}$, $\forall x\in[0,1]$
Integrez de la 0 la 1 .
Notez $I_n=\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx$, $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}\cdot(x-1)}{x^2+1}dx<0$, deci şirul I_n este strict descrescător , deci are limită .
$0\le\int_0^1 x^n f(x)dx\le\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$
Se trece la limită $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx=0$</td>
<td>1p
1p
2p
1p</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>$\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx=\int x^2e^xdx$. Se integrează prin părţi de două ori .
$\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx=\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int xe^x$</td>
<td>1p
1p</td>
</tr>
</table>

	$\int (x^4+1)\cdot e^x \cdot f(x^2)dx = x^2e^x - 2\int xe^x = x^2e^x - 2\int x(e^x)' dx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$ $\int (x^4+1)\cdot e^x \cdot f(x^2)dx = = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$, $c \in R$	1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

***Prof:* Şerban George-Florin**

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4 = \frac{26+16}{2} = 21$, r =21-16 =5 , $a_1 = 6$, $a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_{10} = 6 + 9\cdot 5 = 51$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2} = \frac{(6+51)\cdot 10}{2} = 285$	3p 2p
2.	$V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ $\frac{-b}{2a}$ =0 , $\frac{-\Delta}{4a}$ =1 Punctul de maxim este V (0,1)	1p 2p 2p
3.	Condiţie x-5>0 , x>5 , $x \in (5,\infty)$ $x - 5 = 2^2 = 4$, x=9$\in (5,\infty)$ S={9}	1p 2p 2p
4.	$\overline{1bc}$: $\overline{102}$, $\overline{103}$, $\overline{104}$, $\overline{120}$, $\overline{123}$, $\overline{124}$, $\overline{130}$, $\overline{132}$, $\overline{134}$, $\overline{140}$, $\overline{142}$, $\overline{143}$	2p

	adică $A_4^2=12$ Avem în total $4\cdot A_4^2=48$ numere .	3p
5.	M(x,y) , $(x-2)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=2\cdot(-2-x)\vec{i}+2\cdot(3-y)\vec{j}$ x-2=-4-2x , $x=-\frac{2}{3}$, y+1=6 -2y , $y=\frac{5}{3}$, M $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$	2p 3p
6.	$\cos^2 x=\cos 2x=2\cos^2 x-1$ $\cos^2 x=1$, cos x >0 , cos x=1 , $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, x=0 S={0} .	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	det A=0 deoarece liniile 1 şi 3 coincid . $det(A^{10})=(detA)^{10}=0$	2p 3p
b)	$A^2(x)=\begin{pmatrix}2x^2 & 0 & 2x^2\\ 0 & x^2 & 0\\ 2x^2 & 0 & 2x^2\end{pmatrix}\in M_3(R)$ $A(x)+A^2(x)+A^3(x)+A^4(x)=\begin{pmatrix}S & 0 & S\\ 0 & T & 0\\ S & 0 & S\end{pmatrix}$ unde $S=x+2x^2+4x^3+8x^4=x\cdot(1+2x+4x^2+8x^3)=\frac{x\cdot[(2x)^4-1]}{2x-1}=\frac{x\cdot(16x^4-1)}{2x-1}$, daca $x\neq\frac{1}{2}$, daca $x=\frac{1}{2}$ atunci S=2 . $T=x+x^2+x^3+x^4=\frac{x\cdot(x^4-1)}{x-1}$,dacă $x\neq 1$. Dacă x=1 , T=4 .	1p 2p 1p 1p
c)	$det(A(2)\cdot {}^tA(2))=0$	1p 2p

	$A(2)\cdot {}^{t}A(2)=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&4&0\\8&0&8\end{pmatrix}$ Există un minor de ordinul 2 nenul $\begin{vmatrix}8&0\\0&4\end{vmatrix}=32$, $rang(A(2)\cdot {}^{t}A(2))=2$	2p
2. a)	Aplic relaţiile lui Viete : $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$	1p 1p 2p 1p
b)	Aplic teorema restului , $R=f(1+i)$ $R=f(1+i)=(1+i)^4+16=(1+2i+i^2)^2+16=-4+16=12$	2p 3p
c)	$f=x^4+16=x^4+8x^2+16-8x^2=(x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2$ $f=x^4+16=(x^2+4+2\sqrt{2}x)\cdot(x^2+4-2\sqrt{2}x)$ f este reductibil in R[x]	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=x'-(arctgx)'=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$ $f''(x)=(\frac{x^2}{x^2+1})'=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x'-(arctgx)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{3}$ Am aplicat regula lui L Hospital .	1p 1p 1p 2p

c)	ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0) este : $y-f(0)=f^{'}(0)\cdot(x-0)$ f (0)=0 , $f^{'}(0)=0$. **y** =0 ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0)	1p 2p 2p
2. a)	$I_0=\int_0^1 f_0(x)dx=\int_0^1 x^{'}arctgxdx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$ (am aplicat integrarea prin părţi) $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)^{'}}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}ln(2)$ $I_0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln(2)$	2p 2p 1p
b)	$I_1=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x\cdot arctgxdx=\int_0^1(\frac{x^2}{2})^{'}arctgxdx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx$ (am aplicat integrarea prin părţi) $\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x^2+1})dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=1-\frac{\pi}{4}$ $I_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$	2p 2p 1p
c)	Folosim inegalitatea $arctgx\le x$, $\forall x\in[0,1]$ $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n\cdot(x-1)\cdot arctgxdx<0$, deci şirul I$_n$ este strict descrescător , deci are limită $0\le\int_0^1 x^n\cdot(arctgx)dx\le\int_0^1 x^n\cdot xdx=\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$	1p 1p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta1

Prof:Soare Roxana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Notăm $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ şi $b=\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert z\rvert = 2^{2012}$	3p 2p
2.	$\Delta = 49$ $x \in \left[-2, \frac{1}{3}\right] \cap Z$ $x \in \{-2, -1, 0\}$	1p 2p 2p
3.	$sinx + \sqrt{3}cosx = 1 \Leftrightarrow sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $x+\frac{\pi}{3} \in \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in Z\right\}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$	1p 2p 2p
4.	Între 1 şi 200 sunt $\left[\frac{200}{3}\right] = 66$ numere divizibile cu 3, $\left[\frac{200}{5}\right]$=40 numere divizibile cu 5, $\left[\frac{200}{15}\right]$ =13 numere divizibile cu 15 , deci de la 1 la 200 sunt 66+40-13=93 numere divizibile cu 3 sau cu 5 , deci 200-93=107 nu sunt divizibile nici cu 3 , nici cu 5.	2p 3p
5.	$(a+1)(2a+1)-(2a-1)(3a+1)=0$ $a_1 = 1-\sqrt{2}$	2p 3p

	$a_2 = 1 + \sqrt{2}$	
6.	$R = \frac{abc}{4S}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{455}$ $R = \frac{144}{\sqrt{455}}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$I_2 = A(0) \in G$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = A(2) \in G$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = A(a+b-3ab)$ $a \neq \frac{1}{3}, b \neq \frac{1}{3} \Rightarrow a+b-3ab \neq \frac{1}{3} \Rightarrow A(a+b-3ab) \in G$⇒G parte stabilă a lui $GL_2(IR)$ $(A(a))^{-1} = A\left(\frac{a}{3a-1}\right) \in G$	2p 1p 2p
c)	$(A(a))^2 = A(2a-3a^2)$ $(A(a))^3 = A(9a^3 - 11a^2 + 3a)$ $a \in \{-1,0,2\}$	1p 2p 2p
2. a)	$Z_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\hat{1}^4 = \hat{1}$ $\hat{2}^4 = \hat{1}$ $\hat{3}^4 = \hat{1}$ $\hat{4}^4 = \hat{1}$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$f(\hat{0}) = \hat{4}, f(\hat{1}) = \hat{0}, f(\hat{2}) = \hat{0}, f(\hat{3}) = \hat{0}, f(\hat{4}) = \hat{4}$, deci rădăcinile în Z_5 ale polinomului f sunt $\hat{1}, \hat{2},, \hat{2}, \hat{3}$	3p 2p

c)	$X+\hat{4} \mid f, (X+\hat{3})^2 \mid f, X+\hat{2} \mid f \Rightarrow$ $\Rightarrow f = \hat{2}(X+\hat{2})(X+\hat{3})^2(X+\hat{4})$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dreapta y=1 este asimptotă orizontală către $-\infty$ și către $+\infty$ f nu admite asimptote oblice dreapta x= -1 este asimptotă verticală	2p 1p 2p
b)	$\lim_{x\to\infty} x^3 \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 \ln\frac{x^3-1}{x^3+1} =$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x^3-1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^3}} =$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^6}{x^6-1} =$ =-2	1p 1p 2p 1p
c)	$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)+1}{x(x-1)+1}$ $f(2)\cdot f(3)\cdot \cdots \cdot f(n) = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ $\lim_{n\to\infty} f(2)\cdot f(3)\cdot \cdots \cdot f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}$	1p 3p 1p
2. a)	$a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ $a_{n+1} - a_n = \ln\frac{n(n+2)^3}{(n+3)(n+1)^3} < 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este șir strict descrescător. (1) $a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ mărginit inferior. (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ convergent.	2p 2p 1p

b)	$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} =$ $=\lim_{n\to\infty} ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2} =$ $=ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2} =$ $= lne =$ $=1$	1p 1p 1p 2p
c)	$a_1+a_2+\cdots+a_n = ln\frac{2(n+1)}{n+2}$ $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = ln2$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Soare Roxana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1+2r=5 \\ a_1+5r=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ r=2 \end{cases}$ $S_{100}=\dfrac{100(2a_1+99r)}{2}=10000$	3p 2p
2.	$x_V=\dfrac{m+1}{2}$ $y_V=\dfrac{-m^2+2m+7}{4}$ V$\in P: y=-x^2+2x+1$	1p 2p 2p
3.	C.E. $3x^2-2x+8\geq 0, 3x^2-2x+3\geq 0 \Rightarrow x\in IR.$ Notăm $3x^2-2x+3=y\geq 0$ şi obţinem: $\sqrt{y+5}+\sqrt{y}=5 \Leftrightarrow 2\sqrt{y(y+5)}=2(10-y)$ C.E $y\leq 10 \Rightarrow y\in[0,10]$ Se obţine $y=4 \Leftrightarrow 3x^2-2x+3=4 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0$ $x\in\left\{-1,\dfrac{1}{3}\right\}$	1p 2p 2p

4.	$f(-2)=f(2)\Rightarrow$ definim funcţii de pe o mulţime cu 4 elemente cu valori într-o multime cu 6 elemente Se pot defini 6^4=1296 funcţii.	2p 3p
5.	M este punctul care împarte segmentul [BC] în raportul $\frac{2}{5}$ $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$	2p 3p
6.	$cosx=-\dfrac{12}{13}$ $tg\frac{x}{2}=\dfrac{sinx}{1+cosx}$ $tg\frac{x}{2}=5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$detA=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&1&2\\3&-2&6\end{vmatrix}=0$ $d_1=\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow$ ⇒rangA=2.	2p 2p 1p
b)	$d_{car}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&3\\3&-2&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang\bar{A}=2=rangA\Rightarrow sis$tem compatibil nedeterminat. Notăm $z=\alpha$ şi obţinem $x=2-2\alpha, y=1$	3p 2p
c)	Avem $\lvert 2-2\alpha_0+1+\alpha_0\rvert\leq 3\Leftrightarrow\lvert\alpha_0-3\rvert\leq 3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3\leq\alpha_0-3\leq 3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\leq\alpha_0\leq 6\Rightarrow$ sistemul are 7 soluţii cu proprietatea $\lvert x_0+y_0+z_0\rvert\leq 3$	1p 2p 2p

2. a)	$x*y=2xy-6x-6y+18+3=$ $=2x(y-3)-6(y-3)+3=$ $=2(x-3)(y-3)+3$	1p 3p 1p
b)	$(x*y)*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3,\forall x,y,z\in IR \quad (1)$ $x*(y*z)=4(x-3)(y-3)(z-3)+3,\forall x,y,z\in IR \quad (2)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow (x*y)*z=\ x*(y*z),\forall x,y,z\in IR\Rightarrow legea$ “$*$" este asociativă.	2p 2p 1p
c)	Prin inducție $\underbrace{x*x*x*....*x}_{de\ n\ ori}=2^{n-1}(x-3)^n+3,\forall n\in IN^*$ $\underbrace{x*x*x*....*x}_{de\ 2012\ ori}=2^{2011}(x-3)^{2012}+3$ $2^{2011}(x-3)^{2012}+3=2^{2011}+3\Rightarrow x\in\{2,4\}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$f_3'(x)=3x^2+6x$
$f_2(x)=x^2$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_3'(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x}{x^2}=3$</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f_n'(x)=n(1+x)^{n-1}-n$
$f_n'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>∞</td></tr>
<tr><td>$f_n'(x)$</td><td>/</td><td>-----------------------------------</td><td>0</td><td>++</td><td></td></tr>
<tr><td>$f_n(x)$</td><td>/</td><td>↓</td><td>0</td><td>↑</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>min</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>2p
1p
2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$f_n''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\geq 0\ \forall x\in(-1,\infty),\forall n\in IN,n\geq 2$
$\Rightarrow f_n$ convexă pe $(-1,\infty),\forall n\in IN,n\geq 2$</td><td>3p
2p</td></tr>
</table>

2. a)	$f: IR \to IR, f(t) = (t^3 - 3t + 2)e^{3t}$ este continuă pe IR, deci admite primitive pe IR. Fie $G: IR \to IR$ o primitivă a lui f . Atunci $F(x) = G(x) - G(0)$ $\Rightarrow F'(x) = f(x) = (x^3 - 3x + 2)e^{3x}$	2p 2p 1p
b)	$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$ $x_3 = -2\ este\ punct\ de\ minim\ și$ F↘ pe intervalul $(-\infty, -2]$ şi F↑ pe [-2,∞)	1p 1p 1p 2p
c)	$F''(x) = 3(x - 1)(x^2 + 2x - 1)e^{3x}$ Punctele de inflexiune sunt $x_1 = 1, x_2 = -1 - \sqrt{2}, x_3 = -1 + \sqrt{2}$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Soare Roxana

- ♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- ♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- ♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} b_1\cdot q=6\\ b_1\cdot q^4=162\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} q=3\\ b_1=2\end{cases}$ $S_{2012}=3^{2012}-1<3^{2012}$	3p 2p
2.	$x^2+2x+5\geq 4$ $x^2+4x+8\geq 4$ $(x^2+2x+5)(x^2+4x+8)\geq 16$	2p 2p 1p
3.	$arctg3=x\Leftrightarrow tgx=3$ $cos2x=\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ $cos2x=\dfrac{1-9}{1+9}=-\dfrac{4}{5}$	1p 2p 2p
4.	$\dfrac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\dfrac{2(100-k)}{k+1}$ $\frac{2(100-k)}{k+1}\geq 1\Leftrightarrow k\leq 66\frac{1}{3}\Rightarrow$ cel mai mare termen este T_{68}	2p 3p

5.	ABCD paralelogram $\Leftrightarrow\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$ de unde rezultă D(-3,3)	3p 2p
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AF}\rvert cos(\widehat{CAF})$ $m(\widehat{CAF})=90^0$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=0.$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix} m^2 & 2m & 1 \\ 1 & m^2 & 2m \\ 2m & 1 & m^2\end{pmatrix}$ $detA=\begin{vmatrix} m^2 & 2m & 1 \\ 1 & m^2 & 2m \\ 2m & 1 & m^2\end{vmatrix}=(m^3+1)^2$ $detA=0\Leftrightarrow m=-1$	2p 2p 1p
b)	Pentru m=-1 se obţine sistemul : $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0\end{cases}$ $d_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq0\Rightarrow rangA=2$ Notăm $z=\alpha\ \Rightarrow x=\alpha, y=\alpha$⇒S= $\{(\alpha,\alpha,\alpha)/\alpha\in IR\}$	1p 2p 2p
c)	$\alpha^4+\alpha^4+\alpha^4\leq48\Leftrightarrow3\alpha^4\leq48\Leftrightarrow\alpha^4\leq16$ $\alpha\in\{-2,-1,0,1,2\}$, deci 5 soluţii ale sistemului verifică proprietatea din enunţ.	3p 2p
2. a)	a poate lua 7 valori b poate lua 7 valori Mulţimea M are 49 elemente.	2p 2p 1p
b)	Dacă $A=O_2\Rightarrow detA=\hat{0}.$	1p

	Dacă $detA = \hat{0} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \hat{0}$. $\forall x \in Z_7 \Rightarrow x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ Dacă $a \neq \hat{0} \Rightarrow a^2 + b^2 \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$, deci $a^2 + b^2 = \hat{0} \Rightarrow a = b = \hat{0}$	2p 2p
c)	$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{6} & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \hat{3}b \\ \hat{2}b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \hat{4}b & \hat{2}a + \hat{3}b \\ \hat{6}a + \hat{2}b & a + \hat{4}b \end{pmatrix}$ Se obţine sistemul : $\begin{cases} a + \hat{4}b = \hat{2} \\ \hat{6}a + \hat{2}b = \hat{4} \end{cases}$ cu soluţia $a = \hat{5}, b = \hat{1}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dreapta $x = -\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta f nu are puncte de discontinuitate, deci nu admite alte asimptote verticale dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p 1p 2p
b)	$f'(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{2}{2x+1} =$ $= \frac{4x+2-4x-6}{(2x+3)(2x+1)} =$ $= \frac{-4}{(2x+3)(2x+1)} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ f strict descrescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$	1p 1p 1p 2p
c)	$f''(x) = \frac{32(x+1)}{(2x+3)^2(2x+1)^2}$ $f''(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow f\ nu\ are$ puncte de inflexiune.	3p 2p
2.	Definim funcţia $f: [0, \infty) \to IR, f(x) = \ln(1+x) - x$	1p

a)	$f'(x)=\frac{-x}{1+x}\le 0,\forall x\in[0,\infty)$	2p
	$\Rightarrow$ f este strict descrecătoare pe $[0,\infty)\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow f(x)\le 0,\forall x\in[0,\infty)$	1p
b)	$I_{n+1}\le I_n$	2p
	$I_n\ge 0$	2p
	(I_n) monoton descrescător şi mărginit inferior implică (I_n) convergent.	1p
c)	$0\le \ln(1+x)\le x,\forall x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x^n\ln(1+x)\le x^{n+1},\forall x\in[0,1]\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow 0\le I_n\le \frac{1}{n+2}\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n=0.$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}=7-4\sqrt{3}$, $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2}}=7-4\sqrt{3}$. $a=0\in\mathbb{Z}$;	2p 2p 1p
2.	Din $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow$ $\frac{x^2-6+4x+3}{2}=3x\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$.	1p 2p 2p
3.	$-\frac{\Delta}{4a}=1\Leftrightarrow$ $-\frac{5m^2+10m+9}{4m}=1$ $\Rightarrow 5m^2+14m+9=0\Rightarrow m\in\left\{-\frac{9}{5},-1\right\}$	1p 2p 2p
4.	Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x^2+3x+1=0$. $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.	2p 3p
5.	Vectorii $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\frac{a-2}{-8}=\frac{-4}{a+2}$ Din $a^2-4=32\Rightarrow a\in\{-6;6\}$.	2p 3p
6.	Se scrie mai întâi ecuaţia dreptei (AB), după formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Rezultă, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1-2}\Rightarrow x+y-1=0$. Distanţa de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C,AB)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	1p 2p 2p

	şi este egală cu $\frac{\lvert 4+3-1\rvert}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2-aA)(I_2-bA)=I_2-bA-aA+abA^2=I_2-(a+b-ab)A=X(a+b-ab)$, deoarece A^2 = A; Cum $X(a)\cdot X(1)=X(a+1-a\cdot 1)=X(1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{0;1;2;...,2014\}\Rightarrow$ $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot ...\cdot X(2014)=X(1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4&-2\\10&5\end{pmatrix}$;	2p 3p
b)	Cum $X(a)=I_2-a\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5a&2a\\-10a&-4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5a&-2a\\10a&1+4a\end{pmatrix}$. Atunci, $\det(X(a))=\begin{vmatrix}1-5a&-2a\\10a&1+4a\end{vmatrix}=(1-5a)(1+4a)+2a\cdot 10a=1-a$; $\det(X(a))=0\Leftrightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$. Pentru a = 1 rezultă că există o singură matrice neinversabilă;	2p 2p 1p
c)	Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a)\cdot(X(a))^{-1}=I_2$. Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b-ab)=I_2\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1-5(a+b-ab)&-2(a+b-ab)\\10(a+b-ab)&1+4(a+b-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b=\frac{a}{a-1}$; Aşadar, pentru $b=\frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume $(X(a))^{-1}=X(b)=X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.	1p 2p 2p
2. a)	$x^2+1=0\Rightarrow x=\pm i$ $g(X)=(X-i)(X+i)$.	3p 2p
b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=X^2+1\Leftrightarrow f(i)=f(-i)=0$ ceea ce este adevărat deoarece $f(i)=(i^2+i+1)^{10}+(i^2+1)^{10}+1=i^{10}+1=i^2+1=-1+1=0$. Analog pentru f(-i).	2p 3p
c)	$f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$ $=C_{10}^0(X^2+1)^{10}+C_{10}^1(X^2+1)^9\cdot X+C_{10}^2(X^2+1)^8\cdot X^2+.......+C_{10}^{10}X^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$	

	$=2(X^2+1)^{10}+10(X^{19}+9X^{17}+...)+....=$ Observăm că a_{19} este coeficientul lui X^{19} prin urmare $a_{19}=10$.	2 p 2 p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(2x-4)e^{x^2-4x+2}$; $f'(0)=-4e^2$;	3p 2p
b)	f este crescătoare pe $[2;\infty)$ deoarece $f'(x)\rangle 0$ și este descrescătoare pe $(-\infty;2]$ deoarece $f'(x)\langle 0$. x=2 este punct de extrem local.	2p 2p 1p
c)	Cum f este descrescătoare pe $[0;1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(1)$. Se calculează f(1) și f(0), $\Rightarrow \frac{1}{e}\le f(x)\le e$	3p 2p
2. a)	$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x+2}dx=\int_0^1\left(x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}\right)dx=$ $\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-9\ln(x+2)\right)\right\vert_0^1=\frac{10}{3}-9\ln\frac{3}{2}$.	2p 3p
b)	$V=\pi\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{(x+2)^2}\right)dx$ $=\pi\left.\left(x-6\ln(x+2)-\frac{9}{x+2}\right)\right\vert_0^1=\pi\left(\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}\right)$.	3p 2p
c)	Fie $f:[1;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Cum f '(x) este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe [1;2]. Din $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{4}$. După care se integrează inegalitatea, $0\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$;	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a^2=18-2\cdot\sqrt{(9+6\sqrt{2})(9-6\sqrt{2})}\Rightarrow$ $a^2=12, a\rangle 0\Rightarrow a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. $(a-2\sqrt{3})^2=0$.	3p 2p
2.	r =7 $a_n=a_1+(n-1)\cdot r\Rightarrow 192=3+(n-1)\cdot 7$ n=28 Rezultă 3 + 10 + 17 +….+ 192 = 2730	1p 2p 2p
3.	Relațiile lui Viete: $x_1+x_2=-4,\ x_1\cdot x_2=1;$ $\frac{x_1-1}{x_1+2}+\frac{x_2-1}{x_2+2}=\frac{2x_1x_2+x_1+x_2-4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=2$.	2p 3p
4.	Condiții de existență: $x\in(3;\infty)$. Ecuația dată este echivalentă cu $(x-3)(x-1)^2=(x-2)^3\Rightarrow$ $x^2-5x+5=0$. $S=\left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	1p 2p 2p
5.	$\sin(90^0+x)=\cos x,\ \cos(180^0-x)=-cosx$ $\sin(180^0-x)=\sin x,\ \cos(90^0+x)=-\sin x$ Suma dată este egală cu 0.	2p 2p 1p
6.	Din teorema cosinusului $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$ se obține AC=5 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(3)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}4&-1&2\\2&6&-1\\2&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$ $A(3)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}-6&-2&5\\8&-3&0\\6&2&-5\end{pmatrix}$.	3p 2p
b)	Calcul A(x)+A(-x) Calculul determinantului det(A(x)+A(-x))=0	3p 2p
c)	c)Calculul determinantului $x^3+5x^2+6x=0$ $x\in\{-3,-2,0\}$.	2p 2p 1p
2. a)	Se calculează f(2) şi se egalează cu expresia dată în enunţ. f(2)= 8+4m+2n+p = 2(2m+n+9) de unde rezultă că p=10.	2p 3p
b)	Din x^2 +x-2=0 rezultă x_1= - 2 şi x_2 =1. $f(X)\vdots g(X)=(X-1)(X+2)\Leftrightarrow\begin{cases}f(-2)=0\\f(1)=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2n=-2\\m+n=-11\end{cases}\Rightarrow m=-4,\ n=-7.$	1p 2p 2p
c)	Cum $f(X)=X^3-4X^2-7X+10=(X^2+X-2)(X-5)=$ f(1)=0 aşadar, produsul $=(X+2)(X-1)(X-5)\Rightarrow$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)$ îl conţine pe f(1) prin urmare este egal cu zero.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=3x+2x\ln x$. $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$.	3p 2p
b)	$f''(x)=5+2\ln x$.	3p

	f este convexă pe $\left[\frac{1}{e^2\sqrt{e}},\infty\right)$ și concavă pe $\left(-\infty,\frac{1}{e^2\sqrt{e}}\right]$.	2p
c)	ecuația tangentei în punctul $A(x_0,y_0)$ este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. $y_0=f(x_0)\Rightarrow y_0=f(1)=1\Rightarrow$ Ecuația dreptei este $y-1=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=3(x-1)\Rightarrow 3x-y-2=0$	1p 1p 3p
2. a)	Din condițiile de continuitate și derivabilitate a lui f se obține $\begin{cases}a+b=2\\2a+b=-2\end{cases}$. Din rezolvarea sistemului rezultă $a=-4,b=6$.	3p 2p
b)	F(x) este primitiva lui f $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$ F este convexă deoarece $F''(x)=f'(x)=\frac{2}{x-2}\rangle 0,\ \forall x\in(2;\infty)$.	2p 3p
c)	$\int_0^1\frac{1}{-4x^2+6x+2}dx=\int_0^1\frac{1}{-4\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2\right]}dx=$ $=-\frac{1}{2\sqrt{17}}\left[\ln\left\|\frac{7-\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}}\right\|-\ln\left\|\frac{3-\sqrt{17}}{3+\sqrt{17}}\right\|\right]$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Stan Adrian

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(1)+f(2)+.....+f(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-2n$	1p 2p

	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $S = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} - 2n$	2p
2.	$a_m - a_n = (m-n)\cdot r$ $\quad a_{26} - a_{18} = (26-18)\cdot r \Leftrightarrow 178-122 = 8r \Rightarrow r = 7$ $a_{18} - a_1 = (18-1)\cdot r \Leftrightarrow 122 - a_1 = 17\cdot 7 \Rightarrow a_1 = 3$. $S_{26} = \frac{(a_1 + a_{26})\cdot n}{2} = \frac{(3+178)\cdot 26}{2} = 181\cdot 13 = 2353$.	1p 2p 2p
3.	Ecuația dată este echivalentă cu $3^x\left(9+1+\frac{1}{9}\right) = 273 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{91}{9} = 273 \Rightarrow$ $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$.	3p 2p
4.	$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow 39 = 9 - 3xy \Rightarrow xy = -10$. Sistemul dat devine $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(-2;5),(5;-2)\}$.	2p 3p
5.	Mijlocul lui $[BC]$ este $M(1;-5)$ iar panta dreptei AB este 3. Ecuația dreptei AM este $y - y_M = m(x - x_M)$, $3x - y - 8 = 0$.	2p 3p
6.	Se calculează $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{8}$. $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. Din teorema sinusurilor se obține $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A + I_3) = 2$	2p 3p
b)	A + m I_3 este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A + mI_3) \neq 0$ Calculul determinantului matricei $A + mI_3$ si rezolvarea ecuației $\det(A + mI_3) = 0$	3p 2p

	Concluzia, $\det(A+mI_3)\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}-\{0\}$	
c)	$(A+I_3)^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ $(A+I_3)^*=\begin{pmatrix}4 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $X=(A+I_3)^{-1}=\dfrac{1}{\det(A+I_3)}\cdot(A+I_3)^*$	1p 3p 1p
2. a)	$f(\hat{1})=\hat{2}a+\hat{1}$ $\hat{2}a+\hat{1}=\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	2p 3p
b)	$a=\hat{3}\Rightarrow f(x)=x^2+x$ $f(x)=\hat{2}\Leftrightarrow x^2+x=\hat{2}$ $x\in\{\hat{1},\hat{3}\}$	1p 2p 2p
c)	$f\,\vdots\,(x+\hat{1})\Leftrightarrow f(-\hat{1})=\hat{0}\Leftrightarrow f(\hat{4})=\hat{0}$ $a=\hat{1}\Rightarrow f(x)=x^2+\hat{4}x+\hat{3}$ $f(\hat{4})=\hat{1}+\hat{1}+\hat{3}=\hat{0}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{-x^2+3x-1}{e^x}$; $f'(0)=-1$.	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ $y=0$ ecuația asimptotei către ∞.	3p 2p
c)	$f''(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{e^x}$	2p

	$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=4.$ Atunci, $f''(x) \rangle 0, \forall x\in(-\infty;1]\cup[4;\infty)$	3p
2. a)	f admite primitive pe R $\Leftrightarrow$ f este continuă pe R Se studiază continuitatea în 1: $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=f(1)=0 \Rightarrow$ f este continuă în 1, deci si pe R.	2p 3p
b)	$\int_0^2 f(x)dx=I_1+I_2$ unde $I_1=\int_0^1 (e^{x-1}-1)dx=\left.(e^{x-1}-x)\right\vert_0^1=-\frac{1}{e}$ şi $I_2=\int_1^2 (x^3-1)dx=\left.(\frac{x^4}{4}-x)\right\vert_1^2=\frac{11}{4}$. $\int_0^2 f(x)dx=\frac{11}{4}-\frac{1}{e}$	2p 2p 1p
c)	$g(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=x-1$ $Vol_{Cg}=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 (x-1)^2dx=$ $Vol_{Cg}=\pi\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right\vert_1^2=\frac{\pi}{3}$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Stoica Alina Codruţa

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2^{x^2+5}=4^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x^2+5}=\left(2^2\right)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x^2+5}=2^{2x+4}$ $x^2+5=2x+4 \Rightarrow x^2-2x+1=0$ $x=1$	2p 2p 1p
2.	$\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=2m \end{cases}$ $x_1x_2-2x_1-2x_2+2=0$	3p 2p
3.	Condiţii de existenţă : $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ şi $x\in[1;+\infty) \Rightarrow x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ $x^2-3=(x-1)^2 \Rightarrow -3=2x+1$ $x=2\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	2p 2p 1p
4.	$2x-1\in\{1,3,5,15\}$ $x\in\{1,2,3,8\}$ $p=\frac{1}{4}$	2p 2p 1p
5.	$m_{MN}=-\frac{2}{3}$ şi panta mediatoarei segmentului MN este $\frac{3}{2}$ Panta paralelei prin P este $\frac{3}{2}$ Ecuaţia paralelei prin P este $3x-2y+3=0$	2p 1p 2p

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1 \Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{25}$ Deoarece $\sin x<0$ pentru $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ avem $\sin x=-\frac{1}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 4 & m\end{pmatrix}$ $\det A=-3m+24$	2p 3p
b)	Pentru m=6 avem $\det A=0$ Studierea compatibilităţii sistemului: sistem compatibil simplu nedeterminat Găsirea soluţiei sistemului: $x=\frac{\alpha}{3}, y=\frac{6-4\alpha}{3}, z=\alpha$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$	1p 2p 2p
c)	Pentru $m\neq 6$ avem $\det A\neq 0$ Aplicarea regulii lui Cramer şi aflarea soluţiei x=0, y=2, z=0. Pentru $m=6$ avem $\det A=0$ şi sistemul este compatibil conform punctului b.	2p 2p 1p
2. a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6y+18+3$ $=2x(y-3)-6(y-3)+3=$ $2(x-3)(y-3)+3$	2p 2p 1p
b)	$x\circ x=2x^2-12x+21$ $2x^2-12x+21=11$ $x^2-6x+5=0$ cu soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=5$	1p 2p 2p
c)	Arată că $x\circ 3=3, \forall x\in\mathbb{R}$ Avem $x=1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2014}$ Operaţia fiind asociativă avem că $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2014}=x\circ\sqrt{9}=x\circ 3=3$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre ∞ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0}=(-\infty)\cdot\frac{1}{0_+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & +++++++++++++++++++ & 0 & ----------------------- & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow & \end{array}$ $x=e$ punct de maxim	2p 1p 2p
c)	$e<\pi$, deoarece f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$ $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln\left(e^{\pi}\right)>\ln\left(\pi^{e}\right)\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$	2p 3p
2. a)	$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$ $=-x\cos x+\sin x+c$	3p 2p
b)	$\int x^n\sin x\,dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx$ $\int x^{n-1}\cos x\,dx=x^{n-1}\sin x+(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx$ Finalizare $I_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x+n(n-1)I_{n-2}$	2p 2p 1p
c)	$x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 0\le\sin x\le1$ $0\le x^n\sin x\le x^n$	1p 2p 2p

	$0 \le \int x^n \sin x \; dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Stoica Alina Codruţa

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 5-\log_2 3=\log_2\frac{5}{3}$ $\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{12}{5}=\log_2 4$ $\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2\cdot 1=2$	2p 2p 1p
2.	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{2}^k=C_8^k 2^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ avem 5 termeni raţionali Dezvoltarea are 9 termeni, deci 4 termeni vor fi iraţionali	2p 2p 1p
3.	$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\overline{z}=a-bi$ $3a-bi=6+i$ $a=2, b=-1$	1p 2p 2p
4.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-1-4+m)^2+(2-4-m)^2}$ $\sqrt{(m-5)^2+(m+2)^2}=5$ $m^2-3m+2=0$ cu soluţiile $m_1=1$ şi $m_2=2$.	2p 2p 1p
5.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ $\sqrt{(5-m)^2+(2+m)^2}=5$ $m^2-3m+2=0$ cu soluţiile $m_1=1$ şi $m_2=2$	2p 1p 2p

6.	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\cos60^\circ$ $a^2=36+16-48\cdot\frac{1}{2}=28\Rightarrow a=2\sqrt7$ $p=10+2\sqrt7$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x=0$ avem $A(0)=\begin{pmatrix}2014^0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(0)=I_3\Rightarrow I_3\in G$	2p 3p
b)	Pentru $x,y\in\mathbb{R}$ avem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^x&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2014^y&0&0\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^{x+y}&0&0\\0&1&x+y\\0&0&1\end{pmatrix}\in G\ ,\ x+y\in\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$A^2(x)=A(x)A(x)=A(2x)=\begin{pmatrix}2014^{2x}&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\det A^2(x)=\begin{vmatrix}2014^{2x}&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{vmatrix}\Rightarrow$ $2014^{2x}=2014\Rightarrow2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
2. a)	$x,y\in(3,+\infty)\Rightarrow x-3>0,\ y-3>0$ $x\circ y=xy-3x-3y+12=(x-3)(y-3)+3>3\Rightarrow x\circ y\in(3,+\infty)$	2p 3p
b)	$x\circ x=x\Rightarrow x^2-3x-3x+12=x$	3p 2p

	$\Rightarrow x^2-7x+12=0$ cu soluțiile $x_1=3$ și $x_1=4$	
c)	Verificăm dacă $f(x+y)=f(x)\circ f(y)$ $f(x+y)=e^{x+y}+3$ $f(x)\circ f(y)=(f(x)-3)(f(y)-3)+3=(e^x+3-3)(e^y+3-3)+3=e^x\cdot e^y+3=e^{x+y}+3$ Fie $x_1,x_2\in R$, din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{x_1}+3=e^{x_2}+3\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ deci f injectivă Din $f(x)=y\Rightarrow e^x+3=y\Rightarrow e^x=y-3\Rightarrow x=\ln(y-3)\in R$ pentru $y\in(3,+\infty)$ deci f surjectivă Așadar f bijectivă Cum f este morfism bijectiv rezultă că f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\cos\frac{1}{x}$ este funcție mărginită $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$ f este continuă	2p 2p 1p
b)	$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ $f'(0)=0$	2p 3p
c)	$a_n=\frac{1}{n^3}\cos n^3+\frac{2}{n^3}\cos\frac{n^3}{2}+\frac{3}{n^3}\cos\frac{n^3}{3}+...+\frac{n}{n^3}\cos\frac{n^3}{n}$ $\lvert a_n\rvert\le\frac{n+1}{2n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$	1p 2p 2p
2. a)	Dacă $F:(0,+\infty)\to R$ este o primitivă a lui $f:(0,+\infty)\to R$ atunci F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$ $F'(x)=f(x)=\ln x-x$	1p 1p

	$F''(x)= f'(x)=(\ln x-x)' =(\ln x)' -x' =\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ $\frac{1-x}{x}<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$, deci F concavă pe $(1,+\infty)$	2p 1p
b)	$\int(x-f(x)+\ln x)^2dx=\int(x-\ln x+x+\ln x)^2dx=$ $=\int(2x)^2dx=\int 4x^2dx=$ $=4\frac{x^3}{3}+C$	2p 2p 1p
c)	$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x-x}{x}=\frac{1}{x}\ln x-1$ $G(x)=\int g(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}\ln x-1\right)dx=\int\frac{1}{x}\ln xdx-\int dx=\int(\ln x)'(\ln x)dx-\int dx=\frac{\ln^2 x}{2}-x+C$ $G(1)=\frac{\ln^2 1}{2}-1+C=-1+C$ $-1+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{3}{2}$ deci $G(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-x+\frac{3}{2}$	1p 2p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Stoica Alina Codruţa

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1$ deci $z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$	2p 3p
2.	Avem între rădăcini relaţia $x_2-x_1=3$ şi din relaţiile lui Viete pentru ecuaţia f(x)=0 mai avem $x_2+x_1=-a$ deci $x_2=\frac{3-a}{2}$ care verifică ecuaţia $f(x)=0$ Din ecuaţia $a^2+8a-9=0$ se obţin soluţiile $a=1$ şi $a=-9$.	1p 2p 2p
3.	Condiţii de existenţă $\begin{cases}x+1>0\\ x>0\end{cases}$ adică $x\in(0;+\infty)$ Folosind proprietăţile logaritmilor avem $\lg(x+1)x=\lg 90$ rezolvând ecuaţia $x^2+x-90=0$ obţinem soluţia $x=9$.	1p 2p 2p
4.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}=2-\frac{1}{2^{2014}}$ $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right]=1$ $\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right\}=1-\frac{1}{2^{2014}}$	2p 2p 1p
5.	Dacă notăm $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v}$ obţinem prin calcul vectorial $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{v}$ adică $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{v}\right\|=3\cdot 10=30$	2p 3p

6.	$\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}\sqrt{y_1^{\,2}+y_2^{\,2}}}=\dfrac{-2}{\sqrt{41}\sqrt{13}}<0$ deci unghiul este obtuz	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Prin calcul direct obţinem $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e$	2p 3p
b)	b) Vom avea ecuaţia $\sigma^{2014}\cdot x=e\Rightarrow\sigma\cdot x=e$. cu soluţia $x=\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	c) Notăm $\alpha=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3\cdot\sigma_4\cdot\sigma_5\cdot\sigma_6$ cu o ordonare oarecare a factorilor şi avem $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(\sigma_1)\cdot\varepsilon(\sigma_2)\cdot\varepsilon(\sigma_3)\cdot\varepsilon(\sigma_4)\cdot\varepsilon(\sigma_5)\cdot\varepsilon(\sigma_6)=(-1)^{m(\sigma_1)+\varepsilon(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)}=-1$ adica σ este permutare impara.	1p 2p 2p
2. a)	$f(\hat{0})=f(\hat{1})=m$ $f(\hat{2})=m+\hat{1}$ $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=\hat{1}+\hat{3}m=\hat{1}$	1p 2p 2p
b)	$f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{2}$ $f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow x_1=\hat{2}$ $f=(x-\hat{2})(x^2+x+\hat{2})=(x+\hat{1})(x^2+x+\hat{2})$ Verificăm şi că $\hat{2}$ nu este rădăcină dublă	2p 1p 2p
c)	Dacă $m=\hat{2}$ atunci f este reductibil cum am văzut la punctul a)	2p

	Dacă $m=\hat{0}$ atunci f este reductibil deoarece $f=x^2\left(x+\hat{2}\right)$	1p
	Dacă $m=\hat{1}$ atunci $\begin{matrix} f\left(\hat{0}\right)=f\left(\hat{1}\right)=\hat{1} \\ f\left(\hat{2}\right)=\hat{1}+\hat{1}=\hat{2} \end{matrix}$ adică f ireductibil **peste** $\mathbb{Z}_3\left[X\right]$.	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	1p
	$f'(x)=\left(e^x+x^2\right)'=e^x+2x$	2p
	$f'(1)=e^1+2\cdot1=e+2$	1p
	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e+2$	1p
b)	$f''(x)=\left(e^x+2x\right)'=e^x+2$	3p
	$f''(x)=e^x+2>0,\ \forall x\in R$ deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x+x^2\right)=\infty+\infty=\infty$ rezultă că f nu are asimptotă orizontală spre ∞	2p
	Căutăm asimptotă oblică $y=mx+n$ spre ∞	1p
	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x^2}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+2x}{1}=\infty+\infty=\infty$	2p
	rezultă că f nu are asimptotă oblică spre ∞	
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$	2p
	$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big\vert_0^1=\frac{\ln2}{2}$	3p
b)	Pentru $x\in[0,1]\Rightarrow0\le\frac{x^n}{1+x^{2n}}\le x^n$	2p
	Se integrează inegalităţile şi se obţine că $I_n\le\frac{1}{n+1}$ pentru orice n natural nenul.	3p

c)	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx \Rightarrow 0\le \frac{x^n}{1+x^{2n}}\le x^n \Rightarrow 0\le \int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx\le \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ pentru $\alpha\in\left[0;1\right]$ folosind criteriul cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=0$ Dacă $\alpha>1$ avem $I_n(\alpha)=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx+\int_1^{\alpha}\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$ Fie c∈ (1, α) avem $\int_1^{\alpha}\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx=F\left(\alpha\right)-F\left(1\right)=\left(\alpha-1\right)\frac{c^n}{1+c^{2n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)\frac{c^n}{1+c^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)\frac{1}{\frac{1}{c^n}+c^n}=0$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2+3i}{1+i}=\frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2}=\frac{5+i}{2}$ $\frac{2+3i}{1+i}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{2+3i}{1+i}\right)=\frac{5}{2}$.	3p 2p
2.	Știm că, în ipoteza $a<0$, funcția $f(\mathrm{x})=\mathrm{ax}^2+bx+c$ are valoarea maximă $f_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$. În cazul nostru, $\Delta=3^2-4\cdot(-1)\cdot 1=13$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{13}{4\cdot(-1)}=\frac{13}{4}$. Prin urmare, $f_{\max}=\frac{13}{4}$.	1p 2p 2p
3.	Încercăm să încadrăm numărul $\log_3 534$ între două numere naturale consecutive. Avem $3^5<534<3^6$ și, ținând cont de faptul că funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(\mathrm{x})=\log_3 x$ este strict crescătoare, putem afirma că $\log_3 3^5<\log_3 534<\log_3 3^6$, adică $5<\log_3 534<6$. Atunci $[\log_3 534]=5$.	1p 2p 2p
4.	Există 90 numere naturale cu două cifre, și anume cele de la 10 până la 99. Prin urmare, avem 90 cazuri posibile. Cazurile favorabile sunt numerele naturale pentru care cifra zecilor este cu 2 mai mare decât cifra unităților, adică numerele $20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97$. Prin urmare, avem 8 cazuri posibile. Probabilitatea este $P=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$.	2p 2p 1p
5.	Punctul $A(-1,2)$ aparține dreptei dacă $2=-a+b$ (am înlocuit $x=-1$ și $y=2$ în relația $y=ax+b$). Punctul $B(0,3)$ aparține dreptei dacă $3=b$ (am înlocuit $x=0$ și $y=3$ în relația $y=ax+b$). Din $2=-a+b$ și $3=b$ obținem $a=1$. Așadar, $a=1$ și $b=3$.	2p 2p 1p
6.	Știm că $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ și $\cos(2k\pi+x)=\cos x$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$. Avem $\sin(2014\pi)=\sin 0=0$ și $\cos(2013\pi)=\cos(2012\pi+\pi)=\cos\pi=-1$. Deci $\cos^2(2013\pi)+\sin(2014\pi)=(-1)^2+0=1$.	1p 3p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Elementul 1 din a doua linie a permutării σ are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 2). Elementul 2 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Elementul 3 are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 4). Elementul 4 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Deci numărul de inversiuni este $m(\sigma)=1+0+1+0=2$. Signatura permutării este $\epsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$, de unde rezultă că permutarea σ este pară.	3p 2p

b)	$\tau^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$. $\tau^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$. $\tau^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$. Avem $A=\left\{\tau,\tau^2,\tau^3,e\right\}$. Prin urmare, mulțimea A are patru elemente.	1p 1p 1p 2p
c)	Din $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ rezultă că $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$. Avem $x=\tau\sigma^{-1}$, adică $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$. Prin urmare, $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$.	2p 2p 1p
2. a)	Evident, 1 și 2 sunt numere raționale. Avem că $2^2-3\cdot1=4-3=1$. Așadar, $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\in H$.	1p 2p 2p
b)	Trebuie să arătăm că pentru orice elemente $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$, avem că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$. Din $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$ rezultă că $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, iar $a^2-3b^2=1$ și $c^2-3d^2=1$. Avem $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd&3(\mathrm{ad}+\mathrm{bc})\\ad+bc&ac+3bd\end{pmatrix}$. Cum $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, rezultă că $ac+3bd,ad+bc\in\mathbb{Q}$. În plus, $(ac+3bd)^2-3\cdot(ad+bc)^2=a^2c^2+6abcd+9b^2d^2-3a^2d^2-6abcd-3b^2c^2=$ $a^2c^2-3a^2d^2-3b^2c^2+9b^2d^2=a^2(c^2-3d^2)-3b^2(c^2-3d^2)=(\mathrm{a}^2-3\mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2-3\mathrm{d}^2)=1\cdot1=1$. Am arătat astfel că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$. În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.	1p 1p 1p 1p 1p
c)	Fie $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$. Avem $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd&3(\mathrm{ad}+\mathrm{bc})\\ad+bc&ac+3bd\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca+3db&3(\mathrm{da}+\mathrm{cb})\\ad+cb&ca+3db\end{pmatrix}$. Cum înmulțirea numerelor raționale este comutativă, rezultă că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$, adică înmulțirea este comutativă pe H.	1p

	Știm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este asociativă. Cum mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor, va rezulta că „$\cdot$” este asociativă pe H. Matricea $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$ este element neutru, adică pentru orice element $\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\in H$, avem $\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$. Fie $\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\in H$. Avem $\begin{vmatrix}a & 3b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2-3b^2=1\neq 0$, de unde rezultă că matricea $\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$ este inversabilă. Prin urmare, $(\mathrm{H},\cdot)$ este grup abelian.	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(\mathrm{x})=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)'=\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+x+2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}=$ $=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}{x^2+x+2}=\frac{2(x^2+x+2)-x(2x+1)}{2(x^2+x+2)\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{x+4}{2(x^2+x+2)\sqrt{x^2+x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.	2p 3p
b)	Avem $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $2\left(x^2+x+2\right)\sqrt{x^2+x+2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Semnul funcției $f\,'$ este dat de semnul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(\mathrm{x})=\mathrm{x}+4$. Așadar, funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-4]$ și crescătoare pe intervalul $[-4,+\infty)$.	2p 1p 2p
c)	Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece se obține din operații cu funcții continue. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$. Conform subpunctului b), funcția f are un punct de minim $x=-4$. Obținem $f_{\min}=-\frac{2\sqrt{14}}{7}$. Atunci $\mathrm{Im}(f)=\left[-\frac{2\sqrt{14}}{7},1\right)$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$-x+3-\frac{x}{x^2+9}=\frac{(-x+3)(x^2+9)}{x^2+9}-\frac{x}{x^2+9}=$ $=\frac{-x^3-9x+3x^2+27-x}{x^2+9}=$	2p 2p

	$\frac{-x^3+3x^2-10x+27}{x^2+9}=f(\mathrm{x})$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	1p
b)	$\int_1^9\left(x-3+f(\mathrm{x})\right)^2\mathrm{d}x=\int_1^9\left(x-3-x+3-\frac{x}{x^2+9}\right)^2\mathrm{d}x=\int_1^9\frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x=$	2p
	$=-\frac{1}{2}\int_1^9 x\cdot\left(\frac{x}{x^2+9}\right)'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+9}\Big\vert_1^9+\frac{1}{2}\int_1^9\frac{1}{x^2+9}\mathrm{d}x=$	2p
	$-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{90}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}\Big\vert_1^9=\frac{1}{6}\left(\mathrm{arctg}\,3-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)$.	1p
c)	Facem schimbarea de variabilă $x=f(\mathrm{t})$. Atunci $\mathrm{d}x=f\,'(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t$.	1p
	Atunci $\int_{\frac{19}{10}}^{3}f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^0 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=$	1p
	$=-t\cdot f(t)\Big\vert_0^1+\int_0^1 f(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t=-f(1)+\int_0^1\left(-t+3-\frac{t}{t^2+9}\right)\mathrm{d}t=-\frac{19}{10}-\frac{t^2}{2}\Big\vert_0^1+3t\Big\vert_0^1-\frac{1}{2}\ln(t^2+9)\Big\vert_0^1=$	2p
	$=-\frac{19}{10}-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem că $2x-3=3i$ sau $2x-3=-3i$, iar de aici obținem soluțiile $x_1=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ și $x_2=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$.	3p 2p
2.	Vârful unei parabole $y=ax^2+bx+c$ este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. În cazul nostru, $\Delta=4(3m+1)^2-4m=4(9\mathrm{m}^2+5m+1)=36\left(\mathrm{m}^2+\frac{5}{9}m+\frac{1}{9}\right)=36\left[\left(m+\frac{5}{18}\right)^2+\frac{11}{324}\right]>0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a}=-9\left[\left(m+\frac{5}{18}\right)^2+\frac{11}{324}\right]<0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că vârful parabolei se află sub axa Ox pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	1p 2p 2p
3.	Pentru existența expresiei $\log_2\sqrt{x+3}$ impunem condiția $x+3>0$, adică $x\in(-3,+\infty)$. Ecuația dată, pentru $x\in(-3,+\infty)$, este echivalentă cu ecuația $\sqrt{x+3}=2$. Ridicând la pătrat, obținem $x+3=4$, de unde rezultă că $x=1\in(-3,+\infty)$ este soluția ecuației date.	1p 2p 1p 1p
4.	Termenul general este $T_{k+1}=\mathrm{C}_7^k\,x^{7-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=\mathrm{C}_7^k\,2^k\,x^{7-2k}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,7\}$. Trebuie să avem $7-2k=3$, de unde se obține $k=2$. Termenul care conține pe x^3 este $T_3=T_{2+1}=\mathrm{C}_7^2\,2^2\,x^3=84x^3$.	3p 1p 1p
5.	$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$, iar de aici rezultă că $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$.	3p 2p
6.	Aplicăm formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 a+\cos^2 a=1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$. Știind că $\sin a=\frac{3}{5}$, avem $\cos^2 a=1-\frac{9}{25}$. În cadranul II, funcția cosinus este negativă. De aceea, din $\cos^2 a=\frac{16}{25}$ va rezulta $\cos a=-\frac{4}{5}$. Avem $\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$.	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea M este inversabilă dacă și numai dacă $\det(M)\neq 0$. Avem $\det(M)=\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ m-1 & 3 & 1\\ 2+m & 2-m & 1\end{vmatrix}=3m+4+2m-m^2+m+2m-2-6-3m+m^2-2m-2m+2=m-2$ Din $\det(M)\neq 0$ deducem că $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	1p 3p 1p
b)	Avem $\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ m-1 & 3 & 1\\ 2m & 2-m & 1\end{vmatrix}=3m+4m+2m-m^2-2+m-6m-2m+m^2-2m+2=0$. Cum $\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ m-1 & 3 & 1\\ 2m & 2-m & 1\end{vmatrix}=0$, rezultă că punctele A, B și C sunt coliniare.	3p 2p
c)	Am văzut la punctul a) că $\det(M)=m-2$. Dacă $m\neq 2$, atunci $\operatorname{rang}(M)=3$. În cazul în care $m=2$, avem $\det(M)=0$. Cum $\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$, va rezulta că $\operatorname{rang}(M)=2$. Așadar, $\operatorname{rang}(M)\geq 2$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	1p 1p 2p 1p
2. a)	Avem $\hat{0}+\hat{1}+\dots+\widehat{14}=\hat{0}+(\hat{1}+\widehat{14})+(\hat{2}+\widehat{13})+\dots+(\hat{7}+\hat{8})=$ $\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}$.	3p 2p
b)	$\hat{2}\cdot\hat{k}\neq\hat{6}$, pentru orice $\hat{k}\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{14}\}\setminus\{\hat{3}\}$ și $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{6}$. Prin urmare, ecuația $\hat{2}\cdot x=\hat{6}$ are în $\mathbb{Z}_{15}$ soluția $x=\hat{3}$.	3p 2p
c)	Un element $\hat{k}\in\mathbb{Z}_{15}$ este inversabil dacă și numai dacă numerele naturale k și 15 sunt prime între ele. Elementele neinversabile sunt acele elemente $\hat{k}\in\mathbb{Z}_{15}$ pentru care k are un divizor comun netrivial cu 15, adică $\hat{0},\hat{3},\hat{5},\hat{6},\hat{9},\widehat{10},\widehat{12}$. Astfel am demonstrat că sunt 7 elemente neinversabile ale inelului $\mathbb{Z}_{15}$.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}}{x-1}=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x-5)}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\frac{x-5}{x-1}}=+\infty$	2p 3p
b)	Calculând formal, obținem:	3p

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}\right)'=\frac{\left(x^3-7x^2+11x-5\right)'}{3\sqrt[3]{\left(x^3-7x^2+11x-5\right)^2}}=\frac{3x-11}{3\sqrt[3]{(x-1)(x-5)^2}}$$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$. — 2p

Pe de altă parte, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to5} f'(x)=+\infty$. Conform teoremei reciproce a teoremei lui Lagrange, rezultă că funcția f nu este derivabilă în $x=1$ și în $x=5$.

Prin urmare, domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

c) Avem că $\sqrt[3]{(x-1)^4(x-5)^2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$. Semnul derivatei f' este dat de funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{1;5\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-14x+11$. Putem astfel să întocmim următorul tabel de monotonie: — 2p

x	$-\infty$		1		$\frac{11}{3}$		5		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +		- - - - - - - -	0	+ + + + + +		+ + + + + +	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$	↗	0	↗	

— 2p

Punctul $x=\frac{11}{3}$ este punct de minim local. Punctul $x=1$ este punct de maxim local. — 1p

2\. a) Funcția $x\mapsto\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ este continuă pe intervalul $[1,2]$. Prin urmare, există $I_2=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$. — 2p

Avem $I_2=\int_1^2\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)'dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=e-\sqrt{e}$. — 3p

b) Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n\in\mathbb{N}$. — 1p

$$I_{n+1}=\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'dx=$$ — 3p

$$=-\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2-(n-1)\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx=-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+e-(n-1)I_n$$

Deci $I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$. — 1p

c) Folosind monotonia integralei, din relația $0\leq\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq\frac{e}{x^n}$, $(\forall)x\in[1,2]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$ rezultă — 2p

$\int_1^2 0\,dx\leq\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx\leq\int_1^2\frac{e}{x^n}dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$. — 2p

	Avem $\int_1^2 0\,\mathrm{d}x=0$, $\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=I_n$ și $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\le\frac{\mathrm{e}}{n-1}$, $(\forall)\mathrm{n}\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Am obținut că $0\le I_n\le\frac{\mathrm{e}}{n-1}$, $(\forall)\mathrm{n}\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Trecând la limită, avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem $b_4=b_2\cdot q^2$, de unde rezultă că $q^2=\frac{b_4}{b_2}=\sqrt{\frac{243}{27}}=3$. Acum putem scrie că $b_{10}=b_4\cdot q^6=\sqrt{243}\cdot 3^3=243\sqrt{3}$.	3p 2p
2.	$f(x)=2^{x^2-4x+3}=2^{(x-1)(x-3)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $f(1)=2^{(1-1)(1-3)}=2^0=1$ și $f(3)=2^{(3-1)(3-3)}=2^0=1$. Am găsit că $f(1)=f(3)$, ceea ce ne demonstrează că funcția f nu este injectivă.	2p 2p 1p
3.	Ecuația dată se mai poate scrie sub forma $3^x-3^x\cdot3^1+2\cdot3^x\cdot3^2=32$. Dând factor comun se obține $3^x\left(1-3^1+2\cdot3^2\right)=32$, adică $3^x\cdot16=32$. Din $3^x=2$ se obține soluția $x=\log_3 2$.	1p 3p 1p
4.	Putem avea trei situații: $f(1)=\mathrm{f}(2)=4$, $f(1)=\mathrm{f}(2)=5$, respectiv $f(1)=4$ și $f(2)=5$. Așadar, există trei funcții cu proprietatea că $f(1)\le f(2)$.	4p 1p
5.	Determinăm mai întâi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$. Avem $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\vec{i}+(4-3)\vec{j}$, de unde rezultă că $\overrightarrow{AB}(-3,1)$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $C(1,-2)$ și are direcția vectorului $\overrightarrow{AB}$ este: $d:\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{1}$, adică $d:x+3y+5=0$.	2p 3p
6.	Folosim formulele $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ și $\mathrm{tg}\left(a+b\right)=\frac{\mathrm{tg}\,a+\mathrm{tg}\,\mathrm{b}}{1-\mathrm{tg}\,a\cdot\mathrm{tg}\,b}$. Atunci ecuația dată se poate rescrie $\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,\pi}{1-\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,\pi}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$, adică $\mathrm{tg}^2x=1$. Obținem astfel că $\mathrm{tg}\,x=1$ sau $\mathrm{tg}\,x=-1$. Ținând cont de faptul că $x\in[0,3\pi]$, obținem $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right\}$.	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&1\\1&1&b\end{vmatrix}\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1-a&1-a\\1&0&b-1\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}1-a&1-a\\0&b-1\end{vmatrix}=(1-\mathrm{a})(\mathrm{b}-1)$.	3p 2p

b)	Dacă $a=0$ și $b=2$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=-1 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$. Din prima ecuație și a doua ecuație ale sistemului obținem $x-1=0$, adică $x=1$. Cu a doua ecuație și a treia ecuație ale sistemului se obține $\begin{cases} y+z=-1 \\ y+2z=-2 \end{cases}$. Folosind metoda eliminării, rezultă că $y=0$ și $z=-1$.	1p 2p 2p
c)	Dacă $b=1$, sistemul de ecuații devine $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z=a-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$. Observăm că prima ecuație și a treia ecuație ale sistemului duc la egalitatea $0=-1$, de unde rezultă că sistemul este incompatibil.	2p 3p
2. a)	$\begin{array}{rrrrr\|rrr} 8X^4 & +2X^3 & -13X^2 & +7X & -1 & X^2 & +X & -1 \\ \cline{6-8} -8X^4 & -8X^3 & +8X^2 & & & 8X^2 & -6X & +1 \\ \cline{1-5} / & -6X^3 & -5X^2 & +7X & -1 & & & \\ & 6X^3 & +6X^2 & -6X & & & & \\ \cline{2-5} & / & X^2 & +X & -1 & & & \\ & & -X^2 & -X & +1 & & & \\ \cline{3-5} & & / & / & / & & & \end{array}$ Deoarece am obținut restul $r=0$, rezultă că $f\,\vdots\left(X^2+X-1\right)$.	4p 1p
b)	Avem $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$. Din relațiile lui Viète obținem $x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3=-\frac{7}{8}$ și $x_1x_2x_3x_4=-\frac{1}{8}$. Atunci $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{8}{1}\right)=7$.	2p 2p 1p
c)	Conform subpunctului a), avem că $f=\left(X^2+X-1\right)\left(8X^2-6X+1\right)$. Ecuația $f(x)=0$ se reduce la rezolvarea a două ecuații de gradul doi: $x^2+x-1=0$, respectiv $8x^2-6x+1=0$. Ecuația $x^2+x-1=0$ are discriminantul negativ și va avea ca soluții două numere complexe conjugate. Discriminantul ecuației $8x^2-6x+1=0$ este $\Delta=4$. Obținem soluțiile $x_1=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ și $x_2=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$. În concluzie, polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Vom folosi metoda inducției matematice. Avem $a_1=\frac{1}{2}\in(0,1)$ și etapa de verificare este parcursă. Presupunem că $a_k\in(0,1)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Să arătăm că $a_{k+1}\in(0,1)$.	1p

	$a_k \in (0,1) \Rightarrow \mathrm{a}_k^2 \in (0,1) \Rightarrow \mathrm{a}_k^2+1 \in (0,2) \Rightarrow a_k\left(\mathrm{a}_k^2+1\right) \in (0,2) \Rightarrow \frac{a_k\left(\mathrm{a}_k^2+1\right)}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} \in (0,1)$. Deci $a_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	1p 2p 1p
b)	Cum $a_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit. Pentru studiul monotoniei, din $a_{n+1} = \frac{a_n\left(\mathrm{a}_n^2+1\right)}{2}$ rezultă că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2+1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Însă $\mathrm{a}_n^2+1 \in (0,2)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, va rezulta că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Fiind monoton și mărginit, șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.	1p 2p 2p
c)	Fie $L \in [0,1]$ limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Având în vedere relația de recurență, putem afirma că $L = \frac{L(L^2+1)}{2}$, adică $L(\mathrm{L}^2-1)=0$. Cum șirul este descrescător, va rezulta că $L=0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2+1}{2} = \frac{1}{2}$. Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.	1p 1p 2p 1p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^x = 1 = f(0)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\cos x = 1$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(0)$, rezultă că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$. Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ deoarece este egală cu produsul a două funcții continue (funcția de gradul întâi și funcția exponențială). Funcția f este continuă pe $(0,+\infty)$ deoarece este restricție a funcției cosinus. Am arătat că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	2p 1p 1p 1p
b)	Din teorema de existență a primitivelor, funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(\mathrm{x}) = \int_0^x f(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t$ este o primitivă a funcției f. Avem $\int_0^x (\mathrm{t}+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (\mathrm{t}+1)\mathrm{e}^t\Big\|_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x$ și $\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t\Big\|_0^x = \sin x$. O primitivă a funcției f este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(\mathrm{x}) = \begin{cases} x\mathrm{e}^x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$.	1p 3p 1p
c)	$V = \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{dx} =$ $= \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos x(\sin x)'\,\mathrm{dx} = \pi\cos x\sin x\Big\|_{\pi/3}^{\pi/2} + \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{dx} =$ $-\frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \pi x\Big\|_{\pi/3}^{\pi/2} - \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{dx} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{dx}$	2p 2p

	Atunci $V=\dfrac{\pi(2\pi-3\sqrt{3})}{24}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\alpha\in\mathbb{C}$ este soluție a ecuației $mz^2+nz+p=0$, unde m, n, $p\in\mathbb{C}$, dacă $m\alpha^2+n\alpha+p=0$. Avem $\left(2-i\sqrt{3}\right)^2=4-4i\sqrt{3}+3i^2=1-4i\sqrt{3}$. Atunci $\left(2-i\sqrt{3}\right)^2-4\left(2-i\sqrt{3}\right)+7=1-4i\sqrt{3}-8+4i\sqrt{3}+7=0$. Prin urmare, $2-i\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $z^2-4z+7=0$.	1p 2p 1p 1p
2.	Deoarece $x\in[3;9]$, rezultă că $\lvert \mathrm{x}-3\rvert=\mathrm{x}-3$. Avem $\lvert \mathrm{x}-5\rvert=\begin{cases}x-5, & x\geq 5\\ 5-x, & x<5\end{cases}$. Atunci $f:[3;9]\to\mathbb{R},\ f(\mathrm{x})=\begin{cases}2, & 3\leq x<5\\ 2x-8, & 5\leq x\leq 9\end{cases}$. Funcția $\mathrm{g}:[5;9]\to\mathbb{R}, g(\mathrm{x})=2x-8$ este strict crescătoare. Prin urmare, $f_{\max}=2\cdot 9-8=10$. Cum $f_{\min}=2$, rezultă că $f_{\max}+f_{min}=10+2=12$.	1p 1p 1p 2p
3.	Avem $2x^2+x+4=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că expresia $\sqrt{2x^2+x+4}$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Impunem condiția ca $8-x\geq 0$, adică $x\in(-\infty,8]$. Prin ridicare la pătrat, din $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$ obținem ecuația $x^2+17x-60=0$. Discriminantul ecuației este $\Delta=529$. Soluțiile ecuației $x^2+17x-60=0$ sunt $x_1=3$ și $x_2=-20$. Cum $-20\notin(-\infty,8]$, rezultă că ecuația $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$ are soluția $x=3$.	2p 1p 1p 1p
4.	Numărul funcțiilor $f:A\to B$ este egal cu $3^4=81$. Există $3^4-\mathrm{C}_3^1 2^4+\mathrm{C}_3^2 1^4=36$ funcții surjective. Probabilitatea cerută este $P=\frac{36}{81}$.	2p 2p 1p
5.	Distanța dintre punctele $A\left(2\mathrm{m}+1,2\right)$ și $B\left(2,2m\right)$ este $AB=\sqrt{(2\mathrm{m}+1-2)^2+(2-2m)^2}=$ $=\sqrt{8m^2-12m+5}$. Avem de rezolvat ecuația irațională $\sqrt{8m^2-12m+5}=5$. Expresia $\sqrt{8m^2-12m+5}$ are sens pentru orice $m\in\mathbb{R}$, deoarece $8m^2-12m+5=8\left[\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\right]>0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	2p 1p

	Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{8m^2-12m+5}=5$ devine $2m^2-3m-5=0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $m_1=-1$ și $m_2=\frac{5}{2}$.	2p
6.	Notăm cu R raza cercului circumscris triunghiului ABC și vom folosi formula $R=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{4\cdot \mathcal{A}_{ABC}}$.	1p
	Semiperimetrul triunghiului ABC este $p=\frac{8+8+10}{2}=13$.	1p
	Folosind formula lui Heron, $\mathcal{A}_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, obținem $\mathcal{A}_{ABC}=5\sqrt{39}$.	2p
	Atunci $R=\frac{8\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 5\sqrt{39}}=\frac{32\sqrt{39}}{39}$.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $m=0\in\mathbb{R}$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^0\end{pmatrix}$.	3p
	Avem $I_3=A(0)\in M$.	2p
b)	Fie m, $n\in\mathbb{R}$. Avem $A(\mathrm{m})\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1&m&0\\0&1&0\\0&0&3^m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&m+n&0\\0&1&0\\0&0&3^{m+n}\end{pmatrix}=A(\mathrm{m+n})$.	5p
c)	$A(1)+\mathrm{A}(2)+\cdots+A(2014)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3^1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&3^2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1&2014&0\\0&1&0\\0&0&3^{2014}\end{pmatrix}=$	1p
	$=\begin{pmatrix}1+2+\cdots+2014&1+2+\cdots+2014&0\\0&1+2+\cdots+2014&0\\0&0&3^1+3^2+\cdots+3^{2014}\end{pmatrix}$.	2p
	Cum $1+2+\cdots+2014=1007\cdot 2015$ și $3^1+3^2+\cdots+3^{2014}=\frac{3^{2015}-3}{2}$, rezultă că $A(1)+\mathrm{A}(2)+\cdots+A(2014)==\begin{pmatrix}1007\cdot 2015&1007\cdot 2015&0\\0&1007\cdot 2015&0\\0&0&\frac{3^{2015}-3}{2}\end{pmatrix}$.	2p
2. a)	$e\in\mathbb{Z}$ este element neutru pentru legea de compoziție „ $\circ$” dacă $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.	1p
	Avem $x\circ e=x,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow xe-2x-2e+6=x,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (\mathrm{x}-2)(\mathrm{e}-3)=0,\forall x\in\mathbb{Z}$.	2p
	De aici deducem că $e=3$. Cum $3\circ x=3x-6-2x+6=x,\forall x\in\mathbb{Z}$, rezultă că $e=3$ este element neutru.	2p
b)	$x^2\star(x-1)=0\Leftrightarrow x^2+x-1-1=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$.	3p
	Discriminantul ecuației $x^2+x-2=0$ este $\Delta=9$. Soluțiile sunt $x_1=-2\in\mathbb{Z}$ și $x_2=1\in\mathbb{Z}$.	2p

c)	Elementul neutru al legii de compoziție „$\star$” este 2. Într-adevăr, $x\star 2 = x+2-2 = x$ și $2\star x = 2+x-2 = x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.	1p
	Fie a, $b\in\mathbb{Z}$ pentru care $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{ax}+\mathrm{b}$ este un izomorfism de inele. Atunci f trimite elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ în elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, adică $\begin{cases}\mathrm{f}(2)=0\\ \mathrm{f}(3)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=0\\ 3a+b=1\end{cases}$. Obținem $a=1$ și $b=-2$. Izomorfismul este în mod necesar de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}-2$.	2p
	Arătăm că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}-2$ este izomorfism de inele. Avem $f(\mathrm{x}\star y) = \mathrm{x}+\mathrm{y}-2-2 = x-2+y-2 = f(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{Z}$ și $f(\mathrm{x}\circ\mathrm{y}) = \mathrm{xy}-2\mathrm{x}-2\mathrm{y}+4 = \mathrm{x}(\mathrm{y}-2)-2(\mathrm{y}-2) = (\mathrm{x}-2)(\mathrm{y}-2) = \mathrm{f}(\mathrm{x})\cdot f(y), \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{Z}$. Prin urmare, f este un morfism de inele.	1p
	Arătăm acum că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}-2$ este bijectivă. Fie $y\in\mathbb{Z}$. Avem $f(\mathrm{x}) = y \Leftrightarrow x-2 = y \Leftrightarrow x = y+2\in\mathbb{Z}$, adică ecuația $f(\mathrm{x}) = y$ are soluție unică. Prin urmare, funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}-2$ este bijectivă.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Fie $x\in\mathbb{R}$. Cum $\mathrm{e}^x > 0, \forall x\in\mathbb{R}$, avem în particular că $\mathrm{e}^x+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este bine definită.	1p
	Știm că $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$. Atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+x+2\right) = -\infty$.	2p
	Știm că $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+x+2\right) = +\infty$.	2p
b)	Avem $\mathrm{e}^x+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Funcția $x\mapsto\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind egală cu raportul a două funcții derivabile (funcțiile $x\mapsto 1$ și $x\mapsto\mathrm{e}^x+1$).	1p
	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de două funcții derivabile, anume funcțiile $x\mapsto\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ și $x\mapsto x+2$.	1p
	Avem $f\,'(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+x+2\right)' = \dfrac{1'\cdot(\mathrm{e}^x+1)-1\cdot(\mathrm{e}^x+1)'}{(\mathrm{e}^x+1)^2}+1+0 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.	2p
	Cum $\mathrm{e}^x > 0, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $f\,'(\mathrm{x}) > 0, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	1p
c)	Punctul $P(\mathrm{a},\mathrm{b})$ este centru de simetrie al graficului funcției f dacă și numai dacă $f(\mathrm{x})+\mathrm{f}(2\mathrm{a}-\mathrm{x}) = 2b$, pentru orice element x din domeniul de definiție al funcției f.	1p
	În cazul acestei probleme, trebuie să arătăm că $f(\mathrm{x})+\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = 5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	2p
	Într-adevăr, $f(\mathrm{x})+\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+x+2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}-x+2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+4 = 5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	2p
2. a)	Funcția f este continuă pe $[0,+\infty)$ ca produs de funcții continue. Atunci funcția F este derivabilă pe $[0,+\infty)$ și $F\,'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, pentru orice $\mathrm{x}\in[0,+\infty)$.	2p

	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, avem $\frac{x}{6}\ge 0$ și $e^{-\frac{x}{3}}>0$.	2p
	Deducem astfel că $F'(x)=\frac{x}{6}\cdot e^{-\frac{x}{3}}\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, egalitatea având loc doar pentru $x=0$. Prin urmare, funcția F este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.	1p
b)	Fie $x\in[0,+\infty)$. $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{t}{6}e^{-\frac{t}{3}}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x t\left(e^{-\frac{t}{3}}\right)'dt=$	3p
	$-\frac{1}{2}te^{-\frac{t}{3}}\Big\vert_{t=0}^{t=x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{3}}\Big\vert_{t=0}^{t=x}=\frac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)$.	2p
c)	Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{3}}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{3}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}}=0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x}{3}}=0$.	2p
	Atunci $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)=\frac{3}{2}$. În plus, $F(0)=0$.	1p
	Am văzut la subpunctele anterioare că funcția F este continuă și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$. Așadar, ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[F(0),\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\right)$. Ținând cont de faptul că $F(0)=0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{3}{2}$, am demonstrat că ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[0,\frac{3}{2}\right)$.	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 5

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{2}>\sqrt{1}=1>\frac{1}{2}$ Cum $8=\sqrt{2^6}<\sqrt[3]{3^6}=9$, rezultă că $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. Prin urmare, $\sqrt{2}\in\left(\frac{1}{2},\sqrt[3]{3}\right)$.	2p 2p 1p
2.	Determinăm mai întâi coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei cu axa Ox. Pentru aceasta, rezolvăm ecuația $f(x)=0$. În cazul nostru, discriminantul este $\Delta=7^2-4\cdot1\cdot10=9$. Obținem soluțiile $x_1=-5$ și $x_2=-2$. Punctele de intersecție ale parabolei cu axa Ox sunt $A(-5;0)$ și $B(-2;0)$. Distanța cerută este $AB=\|-2-(-5)\|=\|3\|=3$.	1p 3p 1p
3.	Impunem condiția de existență a logaritmului: $4^x-6>0$, adică $x\in(\log_4 6,+\infty)$. Ecuația dată, pentru $x\in(\log_4 6,+\infty)$, este echivalentă cu ecuația $4^x-6=2^x$, adică $\left(2^x\right)^2-2^x-6=0$. Notăm $2^x=y$, $y>0$, și obținem ecuația $y^2-y-6=0$, care are soluțiile $y_1=-2$ și $y_2=3$. Ținând cont de faptul că $y>0$, deducem că putem păstra doar soluția $y=3$. Din $2^x=3$ se obține $x=\log_2 3$. Cum $\log_4 6=\log_{2^2}6=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_2\sqrt{6}<\log_2\sqrt{9}=\log_2 3$, rezultă că $\log_2 3\in(\log_4 6,+\infty)$. Așadar, ecuația $\log_2\left(4^x-6\right)=x$ are soluția $x=\log_2 3$.	1p 1p 1p 1p 1p
4.	Cardinalul mulțimii $\{1,3,6,8\}$ este egal 4. Atunci numărul cazurilor posibile este egal cu $4\cdot4=16$. Produsul a două numere naturale pare este par. Produsul dintre un număr natural impar și un număr natural par este par. Cazurile favorabile vor fi: $(a,b)\in\{(1,6),(1,8),(3,6),(3,8),(6,1),(6,3),(6,6),(6,8),(8,1),(8,3),(8,6),(8,8)\}$ Probabilitatea cerută este $P=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.	2p 2p 1p
5.	Cei doi vectori sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{2}{a}=\frac{3a+1}{3-a}$. Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$, atunci obținem că $2(3-a)=a(3a+1)$, adică ecuația de gradul al doilea $a^2+a-2=0$. Discriminantul ecuației este $\Delta=9$. Obținem soluțiile $a_1=-2$ și $a_2=1$.	2p 3p
6.	Avem $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.	2p

	Atunci $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ m & -1 & -1\end{vmatrix}=2+m-2+4m+1+1=5m+2$. Rezolvând ecuația $5m+2=0$, obținem $m=-\frac{2}{5}$.	3p 2p
b)	Dacă $m\neq-\frac{2}{5}$, atunci sistemul este compatibil determinat. Pentru $m=-\frac{2}{5}$, conform subpunctului a), determinantul matricei sistemului este nul. Matricea sistemului are rangul egal cu 2, deoarece $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\neq0$. Considerăm determinantul caracteristic $d_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & n\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-n+2$. Sistemul este incompatibil pentru $m=-\frac{2}{5}$ și $n\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	1p 1p 1p 1p 1p
c)	Deoarece x_0, y_0 și z_0 sunt în progresie aritmetică, deducem că $2y_0=x_0+z_0$, adică $x_0-2y_0+z_0=0$. Dacă sistemul admite soluția (x_0,y_0,z_0), atunci din a doua ecuație a sistemului obținem că $x_0-2y_0+z_0=n$. În concluzie, $n=0$.	2p 2p 1p
2. a)	Ecuația $g(x)=\hat{0}$, adică $x+\hat{3}=\hat{0}$, are în $\mathbb{Z}_5$ soluția $x=\hat{2}$. Cum polinomul g divide polinomul f, trebuie ca $f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$, adică $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$. Ecuația $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$ este echivalentă cu $\hat{2}a=\hat{2}$. Obținem astfel soluțiile $a=\hat{1}$ și $a=\hat{3}$.	2p 1p 2p
b)	Pentru $a=\hat{1}$, obținem $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$. Pe de altă parte, avem $\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)=X^3+X^2+X+\hat{1}$. Prin urmare, $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)$.	1p 3p 1p
c)	Cum $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$, avem $f\left(\hat{0}\right)=\hat{0}^3+\hat{0}^2+\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}\neq\hat{0}$, $f\left(\hat{1}\right)=\hat{1}^3+\hat{1}^2+\hat{1}+\hat{1}=\hat{4}\neq\hat{0}$, $f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}^3+\hat{2}^2+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$,	2p 1p

	$f\left(\hat{3}\right)=\hat{3}^3+\hat{3}^2+\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$, $f\left(\hat{4}\right)=\hat{4}^3+\hat{4}^2+\hat{4}+\hat{1}=\hat{0}$. În concluzie, ecuația $f(x)=\hat{0}$ are în $\mathbb{Z}_5$ soluțiile $x=\hat{2}$, $x=\hat{3}$ și $x=\hat{4}$.	1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-xe^2}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^2}{1}=-e^2\in\mathbb{R}^*$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+e^2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. Atunci $y=-e^2x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.	2p 2p 1p
b)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru că se obține prin operații cu funcții derivabile. $f'(x)=e^x-e^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Fie $A\left(a,e^a-ae^2\right)$ un punct oarecare al graficului funcției f. Tangenta în punctul $A\left(a,e^a-ae^2\right)$ la graficul funcției f are panta egală cu $f'(a)=e^a-e^2$. Cum tangenta la graficul funcției f trebuie să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y=1$, rezultă că are loc egalitatea $e^a-e^2=0$ (dreptele paralele au pante egale). De aici obținem că $a=2$. Punctul căutat este $A\left(2,-e^2\right)$.	1p 2p 2p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{f'(x)}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{e^x-e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\overset{(1^\infty)}{=}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(1+\frac{e^x-e^2-xe^2+2e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}}=\sqrt{e}$, pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{2e^2(x-2)}=\frac{1}{2}$.	2p 1p 2p
2. a)	Din $1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ va rezulta că $t\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $\cos t>0$, pentru orice $t\in[0,1]$. Cum $t^n\ge0$, pentru orice $t\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $t^n\cos t\ge0$, $(\forall)$ $t\in[0,1]$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\int_0^1 t^n\cos t\,dt\ge0$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}^*$, cee ce înseamnă că $x_n\ge0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	2p 2p 1p
b)	Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $t\in[0,1]$ considerăm că $u(t)=t^{n+1}$ și $v(t)=\sin t$. Funcțiile u și v sunt derivabile pe $[0,1]$, iar $u'(t)=(n+1)t^n$ și $v'(t)=\cos t$. Funcțiile u' și v' sunt continue pe $[0,1]$. Atunci: $x_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\,dt=t^{n+1}\sin t\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 t^n\sin t\,dt=\sin1-(n+1)y_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Așadar, $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	2p 3p
c)	Cum $0\le t^n\cos t\le t^n$, $(\forall)$ $t\in[0,1]$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $0\le x_n\le\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}^*$.	2p

	Aplicând criteriul cleștelui, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Conform punctului anterior, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.	1p
	Avem $y_{n+1} = (n+1)\,\mathrm{x}_n - \cos 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică $n\,\mathrm{x}_n = \mathrm{y}_{n+1} - x_n + \cos 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită în această egalitate, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 6

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem $\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)=\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{10}+1\right)=$ $\log_3(10-1)=\log_3 9=2$.	3p 2p
2.	Scriem relațiile lui Viète: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m \end{cases}$. Atunci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2m$. Cum $x_1^2+x_2^2=10$, obținem ecuația $4-2m=10$. Rezultă că $m=-3$.	2p 2p 1p
3.	Rezolvând ecuația $5^x+1=26$, obținem $x=2$. Atunci $g(26)=g\left(f(2)\right)=2$.	2p 3p
4.	Mulțimea $A=\{1;2;3;4;5\}$ are $2^5=32$ submulțimi. Numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^2=10$. Atunci probabilitatea cerută este $P=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cdot\cos 30^\circ=8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$. $\left\|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2+2\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=8^2+3^2+24\sqrt{3}=73+24\sqrt{3}$.	2p 3p
6.	Avem $\cos\frac{17\pi}{36}=\cos\frac{18\pi-\pi}{36}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{36}\right)=\sin\frac{\pi}{36}$. Atunci $\sin\frac{\pi}{36}-\cos\frac{17\pi}{36}=\sin\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36}=0$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)-(-2)\cdot(-2)=-6-4=-10\neq 0$. Atunci matricea A are rangul egal cu 2.	3p 2p
b)	$A\cdot{}^tA=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$. $\det\left(A\cdot{}^tA\right)=\begin{vmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{vmatrix}=17^2-8^2$. $17^2-8^2=(17-8)(17+8)=9\cdot 25=15^2$ și deci $\det\left(A\cdot{}^tA\right)$ este pătrat perfect.	2p 2p 1p

c) $$^{t}A\cdot A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{pmatrix}.$$ 2p

Atunci $\det\left({}^{t}A\cdot A\right)=\begin{vmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{vmatrix}=169\cdot8-48-48-144\cdot8-52-52=200-96-104=0$. 3p

2. a) Ecuația $g(\mathrm{x})=0$ are soluțiile $y_1=-i$ și $y_2=i$. 1p

Vom aplica schema lui Horner pentru determinarea restului împărțirii polinomului f la polinomul g.

$$\begin{array}{c|cccc} & X^3 & X^2 & X^1 & X^0\\ & 1 & 1 & 2 & 2\\ \hline -i & 1 & -i+1 & 1-i & -i+1\\ \hline i & 1 & 1 & 1 & 1\\ & X^1 & X^0 & X^1 & X^0\end{array}$$ 3p

1p

Restul căutat este $r=X+1$.

b) Avem $f=X^3+X^2+2X+2=X^2(X+1)+2(X+1)=(X+1)(X^2+2)$. 2p

Una dintre rădăcinile polinomului f este egală cu -1, ceea ce conduce la anularea unuia dintre factorii produsului $(1+x_1)(1+\mathrm{x}_2)(1+\mathrm{x}_3)$. De aici se deduce imediat că $(1+x_1)(1+\mathrm{x}_2)(1+\mathrm{x}_3)=0$. 3p

c) Rădăcinile polinomului f sunt $x_1=-1$, $x_2=-i\sqrt{2}$ și $x_3=i\sqrt{2}$. Atunci 2p

$g(x_1)=(-1)^2+1=2$, $g(x_2)=\left(-i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$ și $g(x_3)=\left(i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$. 2p

Avem $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)=2\cdot(1-2i)^2=2(-3-4\mathrm{i})=-6-8i$. 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f(0)=\frac{3}{2}$. Așadar, trebuie să scriem ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, fiind egală cu raportul a două funcții derivabile. 1p

$f'(\mathrm{x})=\left(\frac{4x+3}{3x+2}\right)'=\frac{4(3\mathrm{x}+2)-3(4\mathrm{x}+3)}{(3\mathrm{x}+2)^2}=-\frac{1}{(3\mathrm{x}+2)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, iar de aici deducem că $f'(0)=-\frac{1}{4}$. 2p

Ecuația tangentei în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$ la graficul funcției f este: $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(\mathrm{x}-0)$, adică

$y=-\frac{1}{4}\mathrm{x}+\frac{3}{2}$. 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(\mathrm{x})-\frac{x}{3x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+2}\right)^{x\,(1^\infty)}=$ 2p

	$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.	3p
c)	$f''(\mathrm{x})=\left(-\frac{1}{(3\mathrm{x}+2)^2}\right)'=\frac{6}{(3\mathrm{x}+2)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$. Avem $\mathrm{g}'(\mathrm{x})=\left(5^x\right)'f'\left(5^x\right)=5^x\ln5\cdot f'\left(5^x\right)$ și $\mathrm{g}''(\mathrm{x})=5^x\ln^2 5\cdot f'\left(5^x\right)+5^x\ln5\cdot f''\left(5^x\right)$. Deci $\mathrm{g}''(\mathrm{x})=\frac{5^x\ln^2 5\left(3\cdot5^x-2\right)}{\left(3\cdot5^x+2\right)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Punctul $x=\log_5\frac{2}{3}$ este punct de inflexiune.	1p 1p 2p 1p
2. a)	Dacă funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$, atunci funcția f trebuie să fie continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$. Din condiția de continuitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(2^x+m\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(2nx+\sin x\right)$, adică $m+1=0$. Prin urmare, $m=-1$. Din condiția de derivabilitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(\mathrm{x})-\mathrm{f}(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(\mathrm{x})-\mathrm{f}(0)}{x-0}\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2^x-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2nx+\sin x}{x}$, adică $2n+1=\ln2$. Așadar, $n=\ln\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$. Funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$ pentru $m=-1$ și $n=\ln\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.	2p 2p 1p
b)	Pentru $m=-1$ și $n=1$ obținem funcția $f(\mathrm{x})=\begin{cases}2^x-1, & x\le0\\2x+\sin x, & x>0\end{cases}$. Conform subpunctului a), pentru $m=-1$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. În particular, funcția f este continuă pe $\left[-1,\frac{\pi}{3}\right]$. Prin urmare, funcția f este integrabilă pe $\left[-1,\frac{\pi}{3}\right]$. $\int_{-1}^{\frac{\pi}{3}}f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_{-1}^{0}\left(2^x-1\right)\mathrm{dx}+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\mathrm{x}+\sin x)\,\mathrm{dx}=$ $=\left(\frac{2^x}{\ln2}-x\right)\Big\|_{-1}^{0}+x^2\Big\|_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\Big\|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2\ln2}-1+\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\ln2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{9}$.	2p 2p 1p
c)	$\mathcal{A}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(2\mathrm{nx}+\sin x)\,\mathrm{dx}=$ $=x^2n\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-\cos x\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{3}{2}+\frac{8\pi^2n}{9}$.	1p 3p

	$\mathcal{A}=5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{8\pi^2 n}{9}=5 \Leftrightarrow n=\frac{63}{16\pi^2}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$	2p
	$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=\log_{3^{-1}}\left(3^{-3}\right)=\frac{-3}{-1}=3$	2p
	$\log_2\frac{1}{8}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=0$	1p
2.	$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$	1p
	$V_f\left(1,\mathrm{a}-1\right)$, $V_g\left(\frac{b}{4},1+\frac{b^2}{8}\right)$	2p
	Se obţine sistemul: $\frac{b}{4}=1, a-1=1+\frac{b^2}{8}$, $a=b=4$	2p
3.	$\log_9\left(x+1\right)=\log_{3^2}\left(x+1\right)=\frac{1}{2}\log_3\left(x+1\right)$	2p
	Se obţine $\frac{3}{2}\log_3\left(x+1\right)=\frac{3}{2}$	2p
	$\log_3\left(x+1\right)=1, x=2$	1p
4.	Numărul cazurilorposibile este $70-6=64$	2p
	Mulţimea cazurilor favorabile este $\left\{3^2,4^2,...,8^2\right\}\cup\left\{2^3,3^3,4^3\right\}$, 8 cazuri	2p

	$p=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$	1p
5.	$x_B=\frac{x_A+x_M}{2}, y_B=\frac{y_A+y_M}{2}$ $M(5,2)$	2p 3p
6.	Se verifică relaţia $AB^2+AC^2=BC^2$, triunghiul este dreptunghic, $m(\measuredangle A)=90^0$ $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=120$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ $A^2-2A=O_2$	2p 2p 1p
b)	$X(\text{p})X(\text{q})=(I_3+pA)(I_3+qA)=I_3+pA+qA+pqA^2$ $X(\text{p})X(\text{q})=X(\text{p}+q+2pq)$	3p 2p
c)	Conform b), $X(2)X\left(-\frac{2}{5}\right)=X\left(2-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}\right)=X(0)=\text{I}_3$ Din i), rezultă $\left(X(2)\right)^{-1}=X\left(-\frac{2}{5}\right)$	3p 2p
2. a)	Se aplică teorema lui Bézout, $f(1)=0$. $a=-3$	3p 2p

b)	$\frac{x_1+1}{x_1}+\frac{x_2+1}{x_2}+\frac{x_3+1}{x_3}=1+\frac{1}{x_1}+1+\frac{1}{x_2}+1+\frac{1}{x_3}=3+\frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3}$ Se aplică relaţiile lui Viète, se obţine 0	3p 2p
c)	$f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=-2$ Dreapta $y=x-2$ este asimptotă oblică către $+\infty$	2p 2p 1p
b)	$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}=2f'(0)$ $f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$, $f'(0)=2$, finalizare.	3p 2p
c)	Ecuaţia tangentei la grafic este: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ Se obţine: $y+1=2x$, sau $2x-y-1=0$	3p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\rvert_0^1=1-\ln 2$ $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x-x}{x+1}dx=\int_0^1 xdx-I_1=\ln 2-\frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^n}{x+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ Pentru $x\in[0,1]$ avem $x^{n+1}\le x^n$, rezultă $I_{n+1}\le I_n$, şirul (I_n) este descrescător şi mărginit, deci convergent	2p 2p

	Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	1p
c)	$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \le I_n + I_n = 2I_n \Rightarrow \frac{n}{2(n+1)} \le nI_n$ $\frac{1}{n+1} = I_{n+1} + I_n \ge I_{n+1} + I_{n+1} = 2I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \le \frac{1}{2(n+1)}, I_n \le \frac{1}{2n}, \ \mathrm{n} I_n \le \frac{1}{2}$ Din $\frac{n}{2(n+1)} \le nI_n \le \frac{1}{2}$, cu teorema cleştelui se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$A = \{2,4,6,...,100\}$, $card(A) = 50$ $B = \{5,10,15,...,100\}$, $card(\mathrm{B}) = 20$ $A \cap B = \{10, 20, 30,...,100\}$, $card(A \cap B) = 10$ $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 60$	1p 1p 1p 2p
2.	$\frac{^{2-i)}5}{2+i} + \frac{^{2+i)}a}{2-i} = \frac{5(2-\mathrm{i}) + \mathrm{a}(2+\mathrm{i})}{2^2 - i^2} =$ $\frac{10 + 2a + (a-5)i}{5}$ Finalizare, $a = 5$	2p 2p 1p

3.	Cu notaţia $2^x = y$, ecuaţia devine: $y^2-5y+6=0$ Obţinem: $y_1=2, y_2=3$ $2^x=2, x_1=1,\ \ 2^x=3, x_2=\log_2 3$	1p 2p 2p
4.	$A_x^2=x(x-1)$ $C_x^{x-2}=C_x^2=\frac{x(x-1)}{2}$ Obţinem: $\frac{3x(x-1)}{2}=18, x(x-1)=12$ Finalizare, $x=4$	1p 1p 2p 1p
5.	A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$ Finalizare, $m=14$	3p 2p
6.	$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{8}{9}$ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=6$, $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=6$. (Relaţiile lui Viète) $f\left(x_1+x_2+x_3\right)-f\left(x_1x_2x_3\right)=0$	3p 2p
b)	Adunând x_2 în relaţia $x_1+x_3=2x_2$, obţinem $3x_2=x_1+x_2+x_3=6$, $x_2=2$ $x_2=2$ verifică ecuaţia, $m=11$	3p 2p

c)	$x_1=1, x_2=2, x_3=3$ Se obține $C_3^3+C_5^1+C_4^2=12$	3p 2p
2 a)	$A^2=O_3$	5p
b)	$BC=(I_3+A)(I_3-A)=I_3-A^2=I_3$ $CB=(I_3-A)(I_3+A)=I_3-A^2=I_3$ $BC=CB$	2p 2p 1p
c)	$BC=CB=I_3$ $B^{-1}=C$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ $\begin{array}{c\|ccc} \text{x} & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline f'(\text{x}) & - - - - - - - - - - - - - - & 0 & + + + + + + + + + + + + \end{array}$ $x=0$ este punct de minim.	2p 1p 1p 1p
b)	$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $f''(x)>0, \forall x \in R$, graficul funcţiei f nu are puncte de inflexiune	3p 2p
c)	$g_0(x)=f(x)+f'(x)-e^x=0$ Se obţine $g_{n+1}(x)=g_n^{'}(x)$, Se obţine $g_n(x)=0, \forall n \in N$	2p 1p 2p

2. a)	Fie F o primitivă a funcţiei f $\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in(-2,\infty)$ $F''(x)=f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2},\forall x\in(-2,\infty)$ $F''(x)>0,\forall x\in(-2,\infty)$, F este convexă	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(\text{x}+2)}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$ $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2+3\text{x}+2)'}{x^2+3x+2}dx=\ln\left(x^2+3x+2\right)\Big\vert_0^1$ $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\ln 3$	2p 2p 1p
c)	Soluţia 2 $\int_x^{3x}f(t)dt\geq\int_x^{3x}dt=2x\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\int_x^{3x}f(t)dt=\infty$ Se aplică regula lui L'Hospital, $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(\text{t})dt}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_x^{3x}f(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(F(3x)-F(x))'}{1}=\lim_{x\to\infty}(3f(3x)-f(x))...$ $=\lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{6x+3}{3x+2}-\frac{2x+3}{x+2}\right)=4$ …………………………………………………………………………………………………… Soluţuia 2 $\int_x^{3x}f(t)dt=\int_x^{3x}\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_x^{3x}\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt$ $\int_x^{3x}f(t)dt=\int_x^{3x}\frac{2t+3}{t+2}dt=(2t-\ln(\text{t}+2))\Big\vert_x^{3x}=4x+\ln\frac{x+2}{3x+2}$	2p 2p 1p 2p 2p

	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\ln\frac{x+2}{3x+2}\right)=4$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

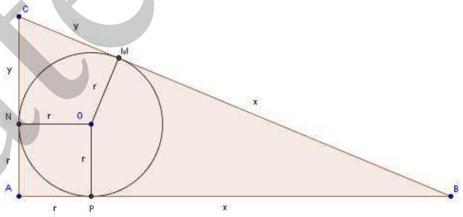
Varianta 3

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$7<\sqrt{50}<7{,}1$ Produsul este egal cu 0	3p 2p
2.	$2^3=4^{2x-1}\Rightarrow 2^3=\left(2^2\right)^{2x-1}$ $2^3=2^{4x-2}$ $4x-2=3, x=\frac{5}{4}$	2p 1p 2p
3.	$\lvert\sqrt{2}-i\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$ $\lvert z\rvert=\left(\sqrt{3}\right)^6=27$	3p 2p
4.	Se obţine: $\log_2\frac{2-x}{2+x}=\log_2\frac{1}{2}$, cu condiţiile $2-x>0, 2+x>0$ $\frac{2-x}{2+x}=\frac{1}{2}$, $2+x=2(2-x), x=\frac{2}{3}$	3p 2p

5.	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-3$	2p
	$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}$	2p
	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h_A,\ \ \sqrt{2}\cdot h_A=3\ ,\ \ h_A=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	1p
6.	Soluţia 1	
	Aria triunghiului este $S=\frac{5\cdot 12}{2}=30$	2p
	Lungimea ipotenuzei este egală cu 13, semiperimetrul este $p=\frac{a+b+c}{2}=15$	2p
	$r=\frac{S}{p}=2$	1p
	....	
	Soluţia 2 Fie O centrul cercului şi M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile  BC, CA, AB ale triunghiului ABC.	
	Patrulaterul ANOP este pătrat cu latura r, iar $BM\equiv BP=x, CM\equiv CN=y$. (Tangente dintr-un punct exterior la cerc).	3p
	Lungimea ipotenuzei este 13. Obţinem sistemul: $\begin{cases} r+x=12 \\ r+y=5 \\ x+y=13 \end{cases}$, $r=2$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}$	2p
	$\Delta=m-4$	3p

b)	Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\Delta \neq 0$ $m \in R-\{4\}$	3p 2p
c)	Pentru $m=4$, $rang\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&5\\1&3&4\end{pmatrix}=2$ Notăm $z=\alpha\in Z$ şi obţinem sistemul: $\begin{cases}2x+y=-3\alpha\\3x+2y=-5\alpha\end{cases}$ Sistemul are soluţia: $\begin{cases}x=-\alpha\\y=-\alpha\ ,\ \alpha\in Z\\z=\alpha\end{cases}$ $x_0^2+y_0^2+z_0^2\le 3 \Leftrightarrow \alpha^2\le 1, \alpha\in\{-1,0,1\}$	2p 1p 1p 1p
2. a)	$\begin{cases}x\perp y=7\\x\circ y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10\\xy-3(x+y)+5=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=10\\xy=25\end{cases}$ Se rezolvă sistemul, $x=y=5$	2p 1p 2p
b)	$e_1=3$ e_1 este elementul neutru al legii de compoziţie ,,$\perp$" , rezultă $e_1\perp e_2=e_2$ e_2 este elementul neutru al legii de compoziţie ,,$\circ$" , rezultă $e_2\circ e_1=e_1$ $(e_1\perp e_2)\circ e_1=e_1=3$	2p 1p 1p 1p
c)	$x\circ y=(x-3)(y-3)+3$ $x\circ x\circ y=11\Leftrightarrow(x-3)^2(y-3)=8$ $\begin{cases}(x-3)^2=1\\y-3=8\end{cases}$, $(x,y)\in\{(2,11),(4,11)\}$	1p 1p 1p 1p

<table>
<tr><td></td><td>$\begin{cases}(x-3)^2=4\\ y-3=2\end{cases}$, $(x,y)\in\{(1,5),(5,5)\}$</td><td>1p</td></tr>
</table>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>Tangentele la grafice sunt perpendiculare dacă $f'(a)g'(a)=-1$
$f'(x)=2ax-3x^2$, $g'(x)=4x^3-3ax^2$,
Obţinem $-a^5=-1, a=1$</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f''(x)=2a-6x$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\frac{a}{3}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''(x)</td><td>+ + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - - -</td></tr>
</table>
$x=\frac{a}{3}$ este punct de inflexiune</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$g''(x)=12x^2-6ax$
$g''(x)=0, x_1=0, x_2=\frac{a}{2}$
Graficul funcţiei g nu are puncte de inflexiune dacă $x_1=x_2, a=0$</td><td>2p
2p
1</td></tr>
<tr><td>2.
a)</td><td>Fie F o primitivă a funcţiei f, avem $F'(x)=f(x)$
$F''(x)=f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}$
$x=\sqrt{3}$ este punct de inflexiune</td><td>2p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f(x)=x+2+\frac{3}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+2+3x$
$\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln x+c$</td><td>2p
2p</td></tr>
</table>

	$\int f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\ln x+2x+\frac{3x^2}{2}+c$	1p
c)	Soluția 1	
	$\int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x tdt=\frac{x^2-1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt=\infty$	2p
	Se aplică regula lui L'Hospital, $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(\text{t})dt}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_1^x f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=...$	2p
	$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}$	1p
	…… Soluția 2	
	$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(t+2+\frac{3}{t}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}+2t+3\ln t\right)\Big\vert_1^x=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln x-\frac{5}{2}$	2p
	$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(\text{t})dt}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+2x+3\ln x-\frac{5}{2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3\ln x}{x^2}-\frac{5}{2x^2}\right)=...$	2p
	Finalizare, $\frac{1}{2}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$[x]=y;\ y\in\mathbb{Z};\ \ 2y^2-3y+1=0;\ \ y_1=1;\ \ y_2=\frac{1}{2}$ $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=1\Rightarrow[x]=1\Rightarrow x\in[1,2)$	3p 2p
2.	$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $r=\lvert z\rvert=2,\ \ \alpha=\frac{5\pi}{3}$ $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	1p 3p 1p
3.	$T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{100-k}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^{k}$ $\frac{100-k}{3}=5,\ \ k=85$ $T_{86}=C_{100}^{85}x^5a^{42}\sqrt{a}$	1p 2p 2p
4.	$\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos a=3\sin a$ $\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ \ a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right);\ \ \cos a=\frac{3\sqrt{10}}{10}$	2p 3p
5.	$\vec{u}\cdot\vec{v}=-8$ $-8<0\Rightarrow$ concluzia	2p 3p
6.	$m_{BC}=-2$	2p

	$y-y_A=m_{BC}\left(x-x_A\right)$ $y=-2x+11$	1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}$ $\beta\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$ $\alpha\beta\neq\beta\alpha$	2p 2p 1p
b)	$x=\beta\alpha^{-1};\ \alpha^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$\beta^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}$ $x\in\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}\right\}$	2p 1p 2p
2. a)	$a=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-x^2+x-1$ $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3-\left(-1\right)^2+\left(-1\right)-1=-1-1-1-1$ $f\left(-1\right)=-4$	1p 3p 1p
b)	$a=1\Rightarrow x^3-x^2+x-1=0\Rightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)=0$ $x_1=1,\ x_2=-i,\ x_3=i$	3p 2p
c)	$x_1+x_2+x_3=1;\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a;\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$	2p

	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)+3$ $10=1-2a-a\cdot 1+3$ $a=-2$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+x+1$ $f'(x)=3\cdot 5x^4+15\cdot 4x^3-10\cdot 3x^2-90\cdot 2x+1$ $f'(x)=15x^4+60x^3-30x^2-180x+1$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=15x^4+60x^3-30x^2-180x+m$ $f''(x)=60x^3+180x^2-60x-180$ $f''(x)=0\Rightarrow x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=-3$	1p 1p 3p
c)	*f* continuă $f''(x)>0,\ (\forall)x\in(-3,-1)\cup(1,\infty);\ f''(x)<0,\ (\forall)x\in(-\infty,-3)\cup(-1,1)$ Punctele de inflexiune: $A(-3;-54-3m+n);\ B(-1;-68-m+n);\ C(1;-82+m+n)$ $\begin{vmatrix}-3 & -54-3m+n & 1\\ -1 & -68-m+n & 1\\ 1 & -82+m+n & 1\end{vmatrix}=0$	 1p 2p 2p
2. a)	$\mathcal{I}_1=\int_0^1(1+x)2^x dx=(1+x)\frac{2^x}{\ln 2}\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx$ $=\frac{3}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}$	3p 2p
b)	$\mathcal{I}_{n+1}-\mathcal{I}_n=\int_0^1(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x dx$ $(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x\geq 0,\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow(\mathcal{I}_n)_{n\geq 1}$ șir crescător	3p 2p

c)	$\mathcal{I}_n = (1+x)^n \frac{2^x}{\ln 2}\Big\|_0^1 - \int_0^1 n(1+x)^{n-1}\frac{2^x}{\ln 2}dx$ $\mathcal{I}_n = \frac{2^n \cdot 2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{n}{\ln 2}\mathcal{I}_{n-1}$ $\mathcal{I}_n \cdot \ln 2 = 2^{n+1} - 1 - n\mathcal{I}_{n-1}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{50} = a_1 + 49r$ $a_{50} = -144$	3p 2p
2.	$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ $T_8 = C_{20}^7 (2x)^{14} (-y)^7$ $T_8 = -C_{20}^7 \cdot 2^{14} \cdot x^{14} y^7$	1p 2p 2p
3.	$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{256}$ $\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{216}$ $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[12]{280}$	2p 2p 1p
4.	$\sin 105^{\circ} = \sin(60^{\circ} + 45^{\circ})$	2p

	$\sin 105^{\circ}=\sin 60^{\circ}\cos 45^{\circ}+\sin 45^{\circ}\cos 60^{\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	3p
5.	$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{m+1}{\sqrt{m^{2}+1}\cdot\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{m+1}{\sqrt{m^{2}+1}\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow m=0$	2p 3p
6.	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,p=\frac{a+b+c}{2}$ $p=7$ $S=2\sqrt{14}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=2m^{3}-4m+2$ $\det A=2\left(m^{3}-2m+1\right)\vdots_{2}\ ,(\forall)m\in\mathbb{Z}$	3p 2p
b)	$m=1\Rightarrow \det A=0$ Sistemul este compatibil simplu nedeterminat $S=\left\{(4-u\ ;0\ ;u)/u\in\mathbb{C}\right\}$	1p 2p 2p
c)	$\det A\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{1\,;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ $x=\frac{2(2m-1)}{m^{2}+m-1}\ ,y=\frac{2(m-1)}{m^{2}+m-1}\ ,z=\frac{2(2m-1)}{m^{2}+m-1}$	2p 3p
2. a)	$(\forall)x,y\in G\Rightarrow x*y\in G$ $x*y=(x+2)(y+2)-2$ $(x+2)(y+2)>0\Rightarrow x*y>-2$	1p 2p 2p

b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ (\forall)x,y,z\in G$ $x*y=y*x,\ (\forall)x,y\in G$ $e=-1$ $x^{'}=\frac{1}{x+2}-2$ $(G,*)$ grup	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f:G\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}(x)=\ln(x+2)$ - izomorfism $f(x*y)=f(x)+f(y),\ (\forall)x,y\in G$ f - bijectivă	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$y-f(1)=f^{'}(1)(x-1)$ $f^{'}(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ $y=x-1$	1p 2p 2p
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$ asimptotă verticală la dreapta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre ∞	2p 3p
c)	$g(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in(0,1),\ g$ continuă pe $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ $g^{'}(x)=-\frac{2}{x^3},\ x\in(0,1),\ g$ derivabilă pe $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ $(\exists)c\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ a.î. $g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)=g^{'}(c)\cdot\frac{1}{6}$	1p 1p 2p

	$c=\frac{1}{\sqrt[3]{15}}$	1p
2. a)	$4\mathcal{I}_n+\mathcal{I}_{n+1}=\int_0^1 x^n dx$ $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	3p 2p
b)	$\mathcal{I}_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x+4}dx$ $\mathcal{I}_2=\int_0^1\left(x-4+\frac{16}{x+4}\right)dx$ $\mathcal{I}_2=-\frac{7}{2}+16\ln\frac{5}{4}$	1p 2p 2p
c)	$\mathcal{I}_{n+1}-\mathcal{I}_n\le 0,\ (\forall)n\ge 1\Rightarrow(\mathcal{I}_n)_{n\ge 1}$ monoton descrescător $\mathcal{I}_n\ge 0,\ (\forall)n\ge 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{I}_n=0$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3^5}$	3p

	$\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}=5$	2p
2.	$z^4=81$ $z^2=9;\ z^2=9i^2$ $z_1=3;\ z_2=-3;\ z_3=3i;\ z_4=-3i$	1p 2p 2p
3.	$\Delta=4$ $G_f \cap Ox=\{A(1,0);B(3,0)\}$ $f(0)=3 \Rightarrow G_f \cap Oy=\{C(0,3)\}$	1p 2p 2p
4.	$A=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $A=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$	3p 2p
5.	$f:\{1,2,3,...,10\}\to\{1,2,3,...,10\}$, f surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=1$	2p 3p
6.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{AC}$ $\left\|2\cdot\overrightarrow{AC}\right\|=2\cdot AC$ $AC=\sqrt{29}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right\|=2\sqrt{29}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=0$ $\text{rang } A=1$	2p 3p
b)	$A^2=10A$ $P(n): A^n=10^{n-1}A, (\forall) n\geq 2$ (demonstrația) $A^{2014}=10^{2013}A$	2p 2p 1p

c)	$\det B=11$ $B^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}8&-2&-1\\-6&7&-2\\-9&-6&8\end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$f(X)=X^4+4X^3$ $x^4+4x^3=0\Rightarrow x^3(x+4)=0$ $x_1=x_2=x_3=0,\ x_4=-4$	1p 2p 2p
b)	$x_1=x_2=m+n\sqrt{3},\ x_3=x_4=m-n\sqrt{3}$ rădăcinile lui f $x_1+x_2+x_3+x_4=-4\Rightarrow m=-1;\ x_1x_3=x_2x_4=m^2-3n^2=1-3n^2$ $(x_1+x_3)(x_2+x_4)+x_1x_3+x_2x_4=0\Rightarrow n=1$ sau $n=-1$ $a=2,\ b=1$	1p 1p 1p 2p
c)	$f'(x)=4x^3+12x^2-4a$ $x=1$ rădăcină dublă $\Rightarrow f(1)=0$ și $f'(1)=0$ $a=4,\ b=\frac{11}{4}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f continuă $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ f derivabilă pe $(0,2)$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1\in[0,2]$ $f'(x)>0,\ (\forall)x\in(0,1)$	1p 1p

	$f^{'}(x)<0,\ (\forall)x\in(1,2)$ $A(1;1)$ punct de maxim $B(0,0);\ C(2,0)$ puncte de minim	1p 2p
c)	$f^{''}(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\sqrt{2x-x^2}},\ x\in(0,2)$ $f^{''}(x)<0,\ (\forall)x\in(0,2)$ f concavă	2p 2p 1p
2. a)	$\mathcal{I}_1=-\cos x+C$ $\mathcal{I}_2=\dfrac{2x-\sin 2x}{4}+C$ $\mathcal{I}_3=-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$	1p 2p 2p
b)	$\mathcal{I}_n=\int \sin^{n-1}x(-\cos x)^{'}\,dx$ $\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(\mathcal{I}_{n-2}-\mathcal{I}_n)$ $n\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\mathcal{I}_{n-2}$	1p 2p 2p
c)	$24\mathcal{I}_6=-4\sin^5 x\cos x+20\mathcal{I}_4;\ 20\mathcal{I}_4=-5\sin^3 x\cos x+15\mathcal{I}_2$ $15\mathcal{I}_2=\dfrac{15}{4}(2x-\sin 2x)+C$ $24\mathcal{I}_6=-4\sin^5 x\cos x-5\sin^3 x\cos x+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{15}{2}\sin x\cos x+C$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.</td><td>$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}\in \mathbf{Z}\Leftrightarrow \frac{5}{x-1}\in \mathbf{Z}$
$\Leftrightarrow x-1\in\{-5,-1,1,5\}\Leftrightarrow x\in\{-4,0,2,6\}$</td><td>3p
2p</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2},n\geq 1$
$n=1\Rightarrow a_1=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3};\ \ n=4\Rightarrow a_4=\frac{12-1}{6}=\frac{11}{6}$
$S_4=\frac{(a_1+a_4)\cdot 4}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{11}{6}\right)=2\cdot\frac{13}{6}=\frac{13}{3}$</td><td>1p
2p
2p</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$x^2-2(m-2)x+m>0,(\forall)x\in R\Leftrightarrow \Delta<0$
$\Delta=b^2-4ac=4(m-2)^2-4m=4(m^2-5m+4)$
$m^2-5m+4=0\Rightarrow\begin{matrix}m_1=1\\ m_2=4\end{matrix}$
<table>
<tr><td>m</td><td>$-\infty$ 1 4 ∞</td></tr>
<tr><td>m^2-5m+4</td><td>+ + + + 0 - - - - - - 0 + + + + + + +</td></tr>
</table>
$m^2-5m+4<0\Leftrightarrow m\in(1,4)$</td><td>1p
2p
2p</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!},0\leq k\leq n$
$A_{12}^7=\frac{12!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$</td><td>2p
3p</td></tr>
</table>

5.	$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{3}$ Din $AA' \perp BC \Rightarrow m_{AA'}=-\frac{1}{m_{BC}}=3$ Ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție: $y-y_0=m(x-x_0)$ $AA': y-5=3(x-2) \Leftrightarrow AA': 3x-y-1=0$	2p 3p
6.	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos a+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)=\cos a+$ $=2\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a+\frac{2\pi}{3}+a}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a-\frac{2\pi}{3}-a}{2}=$ $=\cos a+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos(-a)=\cos a+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos a=\cos a-\cos a=0$	1p 1p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&1-1\\-1+1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&-1+1\\1-1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ Deci $A\cdot B=B\cdot A=O_2$	2p 2p 1p
b)	$(A+B)^n=C_n^0A^n+C_n^1A^{n-1}\cdot B+C_n^2A^{n-2}\cdot B^2+...+C_n^{n-1}A\cdot B^{n-1}+C_n^nB^n=$ $=A^n+C_n^1A^{n-2}\cdot AB+...+C_n^{n-1}AB\cdot B^{n-2}+B^n=A^n+B^n$ Deoarece $A\cdot B=B\cdot A=O_2$, conform punctului a).	3p 2p
c)	$A^{2012}+B^{2012}=(A+B)^{2012}=\left[\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]^{2012}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{2012}=$ $=(2\cdot I_2)^{2012}=2^{2012}\cdot I_2=\begin{pmatrix}2^{2012}&0\\0&2^{2012}\end{pmatrix}$	1p 2p

	$\det\left(A^{2012}+B^{2012}\right)=\begin{vmatrix} 2^{2012} & 0 \\ 0 & 2^{2012} \end{vmatrix}=2^{2012}\cdot 2^{2012}=2^{4024}$	2p
2. a)	$x^2y^2-x^2-y^2+2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1>1,(\forall)x.y\in(1,\infty)$ $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}\in M,(\forall)x,y\in(1,\infty)$ $(x*y)*z=\sqrt{\left[(x*y)^2-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=\sqrt{\left[\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=$ $=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty);$ (1) $x*(y*z)=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[(y*z)^2-1\right]+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1-1\right]+1}=$ $=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty);$ (2) Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea este asociativă pe *M*.	1p 2p 2p
b)	Să arătăm că există $e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,(\forall)x\in M$. $x*e=x,(\forall)x\in M \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x,(\forall)x\in M \Leftrightarrow$ $\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1=x^2,(\forall)x\in M \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(e^2-2\right)=0,(\forall)x\in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e=\sqrt{2}\in(1,\infty),(\forall)x\in M$ Să arătăm că oricare ar fi $x\in M$ există $x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}$. $x*x'=\sqrt{2},(\forall)x\in M \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1}=\sqrt{2},(\forall)x\in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1=2,(\forall)x\in M \Leftrightarrow x'^2-1=\frac{1}{x^2-1},(\forall)x\in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x'^2=1+\frac{1}{x^2-1}>1,(\forall)x\in(1,\infty)\Rightarrow x'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\in(1,\infty),(\forall)x\in(1,\infty)$ Deci orice element din *M* este inversabil în raport cu această lege.	3p 2p
c)	Se arată prin inducție că $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\quad n\quad ori}=\sqrt{\left(x^2-1\right)^n+1}$ $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\quad 2012\quad ori}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)^{2012}+1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^{2012}=1\Leftrightarrow x^2-1=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\in M$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x \in (-\infty,0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{1+x\cdot e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = 1$	2p
	Dacă $x \in (0,\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+x\right)}{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+1\right)} = x$	2p
	Pentru $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{1}{1+e^{0}}=\frac{1}{2}$	1p
	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$	
b)	$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{f(x)+1}=e^{x+1}$	1p 1p 1p 2p
c)	Funcția $h(x)=e^{x+1}$ este continuă și derivabilă pe domeniul de definiție $(0,\infty)$, atunci *h*	1p
	este continuă pe $[1,2]$ și derivabilă pe $(1,2)$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange:	1p
	adică există $c\in(1,2)$ astfel încât $h(2)-h(1)=(2-1)h'(c) \Rightarrow e^{3}-e^{2}=e^{c+1} \Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow e^{c+1}=e^{2}(e-1) \Rightarrow c+1=\ln e^{2}(e-1) \Rightarrow c=\ln e^{2}(e-1)-1$	1p
	Din $2<e<3 \Rightarrow 1<e-1<2 \Rightarrow e^{2}<e^{2}(e-1)<2e^{2} \Rightarrow 2<\ln e^{2}(e-1)<2+\ln 2 \Rightarrow$	
	$\Rightarrow 1<\ln e^{2}(e-1)-1<1+\ln 2<2$; deci $c\in(1,2)$.	2p
2. a)	$\int_0^4 f^{2}(x)dx=\int_0^4 (16-x^{2})dx=$	2p
	$=\left(16x-\frac{x^{3}}{3}\right)\Big\|_0^4=$	2p
	$=64-\frac{64}{3}=\frac{128}{3}$	1p

<table>
<tr><td>b)</td><td>$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx = 0$

Deoarece funcția $g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -g(x), (\forall)x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$, deci h este funcție impară.</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$

<table>
<tr><td>x</td><td>-4   0   4</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+ + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - -</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0 $\nearrow$ 4 $\searrow$ 0</td></tr>
</table>

Observăm că $0 \le f(x) \le 4 \Rightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 4x\Big|_{-4}^{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 16-(-16) = 32$.

Deci $0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 32$.</td><td>2p

1p

2p</td></tr>
</table>

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2x^3-3x^2+4x+9}{2x+1}=\frac{2x^3+x^2-4x^2-2x+6x+3+6}{2x+1}=$	
	$=\frac{x^2(2x+1)-2x(2x+1)+3(2x+1)+6}{2x+1}=\frac{(2x+1)(x^2-2x+3)+6}{2x+1}=$	3p
	$=\left(x^2-2x+3+\frac{6}{2x+1}\right)\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\frac{6}{2x+1}\in\mathbf{Z}.$	
	$2x+1\mid 6\Leftrightarrow 2x+1\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$	
	$2x+1=-6\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}\notin\mathbf{Z};\ 2x+1=-3\Leftrightarrow x=-2\in\mathbf{Z};\ 2x+1=-2\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z};$	2p
	$2x+1=-1\Leftrightarrow x=-1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=1\Leftrightarrow x=0\in\mathbf{Z};\ 2x+1=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z};$	
	$2x+1=3\Leftrightarrow x=1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=6\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\notin\mathbf{Z}$	
	$A=\{-2,-1,0,1\}.$	
2.	$y=5+\lvert x-1\rvert\Leftrightarrow\lvert x-1\rvert=y-5>0\Rightarrow\lvert y-5\rvert=y-5$	2p
	$2\lvert x-1\rvert=6\Leftrightarrow\lvert x-1\rvert=3\Leftrightarrow x-1=\pm3\Rightarrow\begin{matrix}x=4\Rightarrow y=8\\ x=-2\Rightarrow y=8\end{matrix}$	2p
	Soluția $S=\{(4,8);(-2,8)\}$.	1p
3.	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k, 0\le k\le n$; C.E. $n\ge4; n\in\mathbf{N}$	1p
	$\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\cdot\frac{2!}{4!}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow$	2p
	$\frac{(n-2)(n-3)\cdot2}{4\cdot3\cdot2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow n^2-5n+6=42\Leftrightarrow n^2-5n-36=0\Rightarrow\begin{matrix}n_1=9\\ n_2=-4\end{matrix}\Rightarrow n=9\in\mathbf{N}$	2p
4.	Fie $x_1,x_2\in(1,\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0\Leftrightarrow$	
	$(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3)=0\Leftrightarrow(x_2-x_1)[(x_2^2-1)+(x_1x_2-1)+(x_1^2-1)]=0\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow x_2-x_1=0\Leftrightarrow x_2=x_1\Rightarrow f$ funcție injectivă.	
	Din $f(1)=-2$, f continuă și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow f((1,\infty))=(-2,\infty)\Rightarrow f$ surjectivă.	3p
	f funcție injectivă și surjectivă, atunci f bijectivă.	

5.	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	1p
	$\overrightarrow{GA}=(3-3)\vec{i}+(2-4)\vec{j}=-2\vec{j}$; $\overrightarrow{GB}=(5-3)\vec{i}+(4-4)\vec{j}=2\vec{i}$	1p
	$-2\vec{j}+2\vec{i}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}=-2\vec{i}+2\vec{j}$	1p
	$(x_C-3)\vec{i}+(y_C-4)\vec{j}=-2\vec{i}+2\vec{j}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-3=-2\\ y_C-4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=1\\ y_C=6\end{cases}\Rightarrow C(1,6)$	2p
6.	$E=2\left[(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3\right]-3\left[(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2\right]=$	2p
	$=2\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]-$ $-3\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]=$	1p
	$=2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)=2-6\sin^2 x\cos^2 x-3+6\sin^2 x\cos^2 x=$ $=-1$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_x=\begin{vmatrix}-x&-1&x&1\\1&x&1&-x\\x&1&x&1\\1&-x&-1&x\end{vmatrix}\overset{\substack{c1+c3\\c2+c4}}{=}\begin{vmatrix}0&0&x&1\\2&0&1&-x\\2x&2&x&1\\0&0&-1&x\end{vmatrix}=$	2p
	$=-2\cdot\begin{vmatrix}0&x&1\\2&1&-x\\0&-1&x\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=$	2p
	$=4(x^2+1)$	1p
b)	$\det A_x=0\Leftrightarrow x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm i\in\mathbf{C}$.	1p
	Pentru $x\in\mathbf{C}-\{-i,i\}$ $rangA_x=4$	
	$x=i\Rightarrow\det A_x=0$; există $\begin{vmatrix}-i&-1&i\\1&i&1\\i&1&i\end{vmatrix}=-i^3-i+i-i^3+i+i=4i\neq0$	2p
	$x=-i\Rightarrow\det A_x=0$; există $\begin{vmatrix}i&-1&-i\\1&-i&1\\-i&1&-i\end{vmatrix}=i^3+i-i+i^3-i-i=-4i\neq0$	2p

	Deci $rangA_x=3$ pentru $x=\pm i$.	
c)	$\lvert z\rvert=\lvert x+iy\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert i\rvert=\lvert 0+1\cdot i\rvert=1;\ -\lvert i\rvert=\lvert 0-1\cdot i\rvert=1$ $S=\lvert i\rvert+\lvert -i\rvert=1+1=2$	1p 2p 2p
2. a)	$M(a)=\begin{pmatrix}2-a & a-1\\ 2-2a & 2a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a & -1+a\\ 2-2a & -1+2a\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a & a\\ -2a & 2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=A+aB$ cu $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	1p 3p 1p
b)	Arătăm că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Fie $M(x),M(y)\in G$, $M(x)M(y)=\begin{pmatrix}2-x & x-1\\ 2-2x & 2x-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-y & y-1\\ 2-2y & 2y-1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}4-2x-2y+xy+2x-2-2xy+2y & 2y-xy-2+x+2xy-2y-x+1\\ 4-4x-2y+2xy+4x-2-4xy+2y & 2y-2xy-2+2x+4xy-2y-2x+1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2-xy & xy-1\\ 2-2xy & 2xy-1\end{pmatrix}=M(xy)\in G$. Verificăm axiomele grupului: G_1 Se știe că înmulțirea matricelor este asociativă. G_2 $M(x)\cdot M(y)=M(xy)=M(yx)=M(y)\cdot M(x),(\forall)M(x),M(y)\in G$, deci înmulțirea este comutativă. G_3 $M(x)\cdot M(e)=M(x);(\forall)M(x)\in G\Leftrightarrow M(xe)=M(x);(\forall)M(x)\in G\Leftrightarrow xe=x,(\forall)x\in\mathbf{R}^*\Leftrightarrow x(e-1)=0,(\forall)x\in\mathbf{R}^*\Rightarrow e=1\in\mathbf{R}^*,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow M(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\in G$ element neutru. G_4 $M(x)\cdot M(x')=M(e);(\forall)M(x)\in G\Leftrightarrow M(xx')=M(1);(\forall)M(x)\in G\Leftrightarrow xx'=1,(\forall)x\in\mathbf{R}^*\Rightarrow x'=\frac{1}{x}\in\mathbf{R}^*,\ (\forall)x\in\mathbf{R}^*$, deci inversa oricărei matrice $M(x)$ este matricea $M\left(\frac{1}{x}\right)$.	1p 1p 1p 1p 1p

	$(G,\cdot)$ grup abelian.	
c)	Fie funcția $f:\mathbf{R}^*\to G,\ f(x)=M(x)$. 1)Funcția este funcție bijectivă prin construcție. 2) $f(x\cdot y)=M(xy)=M(x)\cdot M(y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}^*$, adică *f* este morfism de grupuri. Deci funcția *f* este izomorfism de grupuri.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\dfrac{-p}{-1}=p$; $l_d=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\ln1=0$; $f(0)=\ln1=0$ Deci $l_s=l_d=f(0)\overset{p=0}{\Rightarrow}f$ continuă în $x=0$, adică, pentru $p=0$, *f* este continuă pe $[-1,1]$.	3p 2p
b)	$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(6x+r)(x-1)-3x^2-rx}{(x-1)^2}, & x<0\\ \dfrac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3x^2-6x-r}{(x-1)^2}, & x<0\\ \dfrac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}$ $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f'(x)=-r$; $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=-3$ Dacă $f_s'(0)=f_d'(0)\Leftrightarrow r=3\Rightarrow f$ este derivabilă în $x=0$.	2p 2p 1p
c)	Funcția f verifică teorema lui Rolle, adică: *f* este continuă pe intervalul $[-1,1]$, f este derivabilă pe $(-1,1)$ și $f(-1)=f(1)$. $f(-1)=0$; $f(1)=\ln(q-2)$ $\ln(q-2)=0\Leftrightarrow q=3$ $S=p^2+q^2+r^2=0+3^2+3^2=18$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_0=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx=x\Big\|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=1$	2p

	$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = 0$, deoarece $\arcsin(-x) = -\arcsin x, (\forall) x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, deci funcția $g(x) = \arcsin x$ este funcție impară.	3p
b)	Dacă n este impar, atunci funcția $g(x) = (\arcsin x)^n$ este funcție impară, deci $I_{2n+1} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n+1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) dx = 0$. Calculăm relația de recurență pentru n par $I_{2n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n} dx = x(\arcsin x)^{2n}\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}\right)' (\arcsin x)^{2n-1} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{2n-1}\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}(2n-1)(\arcsin x)^{2n-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1)I_{2n-2} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + n\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1)I_{2n-2}$ Deci $I_{2n} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + n\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1)I_{2n-2}$	1p 1p 1p 2p
c)	$-\frac{\pi}{6} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \le (\arcsin x)^n \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ de unde, prin integrare obținem: $\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \le I_n \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \le I_n \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$, $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Fie $\alpha \in \mathbf{Z}$ o rădăcină a ecuației $x^2 - mx + 6 = 0$ atunci $\alpha^2 - m\alpha + 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m\alpha = \alpha^2 + 6 \Rightarrow m = \alpha + \frac{6}{\alpha} \in \mathbf{Z}$ dacă $\frac{6}{\alpha} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ $\alpha = -6 \Rightarrow m = -6 - 1 = -7$ $\alpha = -3 \Rightarrow m = -3 - 2 = -5$ $\alpha = -2 \Rightarrow m = -2 - 3 = -5$ $\alpha = -1 \Rightarrow m = -1 - 6 = -7$ $\alpha = 1 \Rightarrow m = 1 + 6 = 7$ $\alpha = 2 \Rightarrow m = 2 + 3 = 5$ $\alpha = 3 \Rightarrow m = 3 + 2 = 5$ $\alpha = 6 \Rightarrow m = 6 + 1 = 7$ Deci, pentru $m \in \{-7, -5, 5, 7\}$ ecuația admite rădăcini întregi.	3p 2p
2.	Dacă $x + y + z = 1$ inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - 1$ devine: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4xy + 4yz + 4zx - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ evident adevărată.	1p 2p 2p

	Observăm că pentru $x=y=z$ relația devine egalitate.	
3.	Funcția $f(x)=3^x+4^x$ este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare. Funcția $g(x)=8-x$ este funcție strict descrescătoare (este o funcție de gradul I cu coeficientul lui x este negativ). Deci ecuația dată admite soluție unică. Observăm că $x=1$ este soluție: $3^1+4^1=8-1\Leftrightarrow 7=7$	1p 2p 2p
4.	8+15=23 jucători. Observăm că antrenorul va face grupe (echipe) care nu depind de ordine, deci $C_{23}^5=\dfrac{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=23\cdot11\cdot7\cdot19$ moduri	2p 3p
5.	Fie $M(\alpha,\beta)\Rightarrow\vec{OM}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ $\vec{v}\cdot\vec{OM}=3\Leftrightarrow\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}\right)=3\Leftrightarrow3\alpha+2\beta=3$ Coordonatele punctului $M(x,y)$ verifică ecuația dreptei $3x+2y-3=0$	2p 3p
6.	$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=1\\ \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=1\\ \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow$ prin adunare: $1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow2\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Fie $A=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\1&1&m&1\\1&-1&1&n\end{pmatrix}$ matricea sistemului. $rangA=2$ dacă toți minorii de ordinul 3 sunt nuli. Deoarece $\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3\neq0$, atunci rangul matricei poate fi 2 sau 3.	2p

	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1-m-1+2m+1 = m+1$ $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 2n-1-1+1+2+n = 3n+1$ $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow 3n+1=0 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{3}$ Deci, pentru $m=-1$ și $n=-\frac{1}{3} \Rightarrow rangA = 2$.	2p 1p
b)	Considerăm $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, ecuații principale: ecuațiile 1 și a 2-a, ecuații secundare: ecuația a 3-a. Sistemul este compatibil dacă $\Delta_{car} = 0$. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p-1+1-1-2+p=0 \Leftrightarrow 3p-3=0 \Leftrightarrow p=1$. Deci pentru $p=1$ sistemul este compatibil nedeterminat.	3p 2p
c)	Necunoscute principale: *x* și *y*, necunoscute secundare *z* și *t*. Fie $z=\alpha \in \mathbf{R}$ și $t=\beta \in \mathbf{R}$; rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 2x-y=1-\alpha+\beta \\ x+y=-1+\alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y=-x-1+\alpha-\beta \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha-\beta-1 \end{cases}$ Soluția sistemului $S = \{(0,\alpha-\beta-1,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in R\}$	1p 2p 2p
2. a)	$x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow$	1p 3p

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0\Rightarrow x=1 \\ x^2+x+1=0\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon \\ x=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2 \end{cases} \end{cases}$ Deci $\varepsilon^3=1,\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$	1p
b)	$g=X^3+(a+p)X^2+(b+p)X+c+p=X^3+aX^2+pX^2+bX+pX+c+p\Rightarrow$ $g=f+p(X^2+X+1)\Leftrightarrow g-f=p(X^2+X+1)$ Pentru $\varepsilon\Rightarrow g(\varepsilon)-f(\varepsilon)=p(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0\Rightarrow\varepsilon$ rădăcină comună. Pentru $\varepsilon^2\Rightarrow g(\varepsilon^2)-f(\varepsilon^2)=p(\varepsilon^4+\varepsilon\ \ +1)=0\Rightarrow\varepsilon^2$ rădăcină comună. Deci, rădăcinile comune celor două polinoame sunt: ε și ε^2.	3p 2p
c)	Fie ε rădăcina comună a celor două polinoame. $g(\varepsilon)=\varepsilon^3+a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+p(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 1+a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+p\cdot 0=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+1=0$ și $p\in\mathbf{R}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcția f este continuă în $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=f(0)$. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{3x^2+nx-p}{x-1}=p$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(rx^2-3x+1)=\ln 1=0$; $f(0)=\ln 1=0$. Deci f este continuă în $x=0$ dacă $p=0$. f derivabilă în $x=0$ dacă f este continuă și $f_s'(0)=f_d'(0)$. $p=0\Rightarrow\left(\dfrac{3x^2+nx}{x-1}\right)'=\dfrac{(6x+n)(x-1)-3x^2-nx}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}$	2p 2p 1p

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}, & x<0\\ \dfrac{2rx-3}{rx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}$$

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}=-n$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2rx-3}{rx^2-3x+1}=-3$$

Deci f este derivabilă în $x=0$ dacă $n=3$.

b) Condițiile teoremei lui Rolle sunt: f este continuă pe $[-1,1]$; f este derivabilă pe $(-1,1)$; $f(-1)=f(1)$, atunci există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f'(c)=0$. — 1p, 1p

Pentru $p=0$, f este continuă pe $[-1,1]$ și pentru $p=0$ și $n=3$ f este derivabilă în $x=0$. — 1p

$f(-1)=0$; $f(1)=\ln(r-2)$. — 2p

$$f(-1)=f(1)\Leftrightarrow \ln(r-2)=0\Leftrightarrow r-2=1\Rightarrow r=3\in\left(\frac{3}{2},\infty\right).$$

$3x^2-3x+1>0$, deci are sens logaritmul.

c) Observăm că $f'(0)=-3\Rightarrow m=-3$ — 1p

$y-y_0=f'(0)(x-x_0)$ — 1p

Dar $x_0=0; y_0=0\Rightarrow$ — 1p

Ecuația tangentei este $y=-3x$ — 2p

2. a) Pentru a explicita funcția $f(x)$, studiem monotonia funcției $g(t)=t^2-2t$ — 2p

$t_V=1; g(1)=-1$ — 2p

t	$-\infty$	$t\le x$	1	$t\le x$	∞
$g(t)=t^2-2t$	↘		-1	↗	

— 1p

Pentru $x\in(-\infty,1)\Rightarrow g(t)$ este strict descrescătoare, adică $t\le x\Rightarrow g(x)\le g(t)$, atunci $\inf g(t)=g(x)=x^2-2x$.

	Pentru $x\in[1,\infty)\Rightarrow g(t)$ este strict crescătoare, adică $1\le t\le t\Rightarrow g(1)\le g(t)\le g(x)$ atunci $\inf g(t)=g(1)=-1$. Deoarece $h(t)=8-3t$ este strict descrescătoare pe **R**, atunci $t\le x\Rightarrow g(x)\le g(t)$, deci $\inf g(t)=g(x)=8-3x$. Așadar $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\in(-\infty,1)\\ -1, & x\in[1,3]\\ 8-3x, & x\in(3,\infty)\end{cases}$.	
b)	$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^3(-1)dx+\int_3^4(8-3x)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right\vert_0^1-x\Big\vert_1^3+\left.\left(8x-\frac{3}{2}x^2\right)\right\vert_3^4=$ $=\frac{1}{3}-1-3+1+32-24-24+\frac{27}{2}=-19+\frac{83}{6}=-\frac{31}{6}$	1p 1p 1p 2p
c)	Observăm că funcția *f* este continuă pe intervalul $[0,4]$ și $f(x)\le 0,(\forall)x\in[0,4]$, atunci $aria(\Gamma_f)=-\int_0^4 f(x)dx=\frac{31}{6}$. $vol(C_f)=\pi\int_0^4 f^2(x)dx=\pi\left[\int_0^1(x^2-2x)^2dx+\int_1^3(-1)^2dx+\int_3^4(8-3x)^2dx\right]=$ $=\pi\left[\int_0^1(x^4-4x^3+4x^2)dx+x\Big\vert_1^3+\int_3^4(64-48x+9x^2)dx\right]=$ $=\pi\left[\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\right\vert_0^1+3-1+\left.(64x-24x^2+3x^3)\right\vert_3^4\right]=$ $=\pi\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}+2+64(4-3)-24(16-9)+3(64-27)\right)=$ $=\pi\left(\frac{23}{15}+1+64-168+111\right)=\pi\left(\frac{23}{15}+8\right)=\frac{143}{15}\pi$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Prof: Viorica Lungana

◆ **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

◆ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

◆ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Relațiile lui Viéte pentru ecuația $x^2-2(a-1)x-2a+1=0$ sunt: $x_1+x_2=2(a-1)$, $x_1x_2=1-2a$ $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}\ge\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}\ge\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2}-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\ge0$ $\Rightarrow\frac{8(a-1)^3-6(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}-\frac{2(a-1)}{1-2a}\ge0\Leftrightarrow\frac{4(a-1)^3-3(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}-\frac{a-1}{1-2a}\ge0$ $\Rightarrow\frac{4(a-1)^3-4(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}\ge0\Rightarrow(a-1)^3-(a-1)(1-2a)\ge0\Rightarrow$ $\Rightarrow(a-1)(a^2-2a+1-1+2a)\ge0\Leftrightarrow a^2(a-1)\ge0\Rightarrow\begin{matrix}a-1\ge0\\a=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a\ge1\\a=0\end{matrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow a\in[1,\infty)\cup\{0\}$.	3p 2p
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g^2(x)+2g(x)+2=g^2(x)+2g(x)+1+1=(g(x)+1)^2+1=$ $=(x^2+2x+1)^2+1=x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x+1=x^4+4x^3+6x^2+4x+2$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^2(x)+2f(x)=(x^2+2x+2)^2+2(x^2+2x+2)=$ $=x^4+4x^2+4+4x^3+4x^2+8x+2x^2+4x+4=x^4+4x^3+10x^2+12x+8$ $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow x^4+4x^3+6x^2+4x+2=x^4+4x^3+10x^2+12x+8\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x^2+8x+6=0\Leftrightarrow 2x^2+4x+3=0$	2p 2p 1p

	$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8 < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.	
3.	Fie $A = \{1,2,...,10\}$ și $B = \{2,3,...,10\}$ Mulțimea A are 2^{10} submulțimi, iar mulțimea B are 2^9 submulțimi. Numărul submulțimilor care îl conțin pe 1 este $2^{10} - 2^9 = 2^9(2-1) = 2^9 = 512$	1p 2p 2ps
4.	$\log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = 1 + \log_7 4 \Leftrightarrow \log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 7 + \log_7 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 28 \Rightarrow 4\cdot 2^x - 2^{x-1} = 28 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8\cdot 2^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow 7\cdot 2^x = 56 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$	2p 3p
5.	$E(x) = \sin^2 x + 2\cos x\cos a\cos(a+x) - \cos^2(a+x) =$ $= \sin^2 x + \cos(a+x)[2\cos x\cos a - \cos a\cos x + \sin a\sin x] =$ $= \sin^2 x + (\cos a\cos x - \sin a\sin x)(\cos x\cos a + \sin a\sin x) =$ $= \sin^2 x + \cos^2 x\cos^2 a - \sin^2 x\sin^2 a = \sin^2 x + (1-\sin^2 x)(1-\sin^2 a) - \sin^2 x\sin^2 a =$ $= \sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 a + \sin^2 x\sin^2 a - \sin^2 x\sin^2 a = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$	2p 3p
6.	Imaginea punctului $P(2,3)$ prin simetrie de centru $P_0(x_0, y_0)$ este punctul $P'(4,-5)$, adică punctul P_0 este mijlocul segmentului PP', rezultă: $x_0 = \frac{x_P + x_{P'}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;\ y_0 = \frac{y_P + y_{P'}}{2} = \frac{3-5}{2} = -1 \Rightarrow P_0(3,-1)$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$. $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3a + 2a + 1 + 2 - a^2 - 3 = -a^2 - a$ $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$ Deci pentru $a \in \mathbf{R} - \{-1,0\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ există A^{-1}.	2p 2p 1p

b)	Pentru $a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}$; $\det A=-1-1=-2\neq 0$ $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&5\\2&3&3\\9&4&12\end{pmatrix}$ $B=\frac{1}{\det A}\left(A^2-3A-5I_3\right)=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4&1&5\\2&3&3\\9&4&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\-3&3&-3\\-6&-3&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\right]=$ $=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-1&1&0\\3&1&-2\end{pmatrix}$	1p 2p 2p
c)	Folosim formula Hamilton – Cayley pentru matricea de ordinul 3: $A^3-TrA\cdot A^2+TrA^*\cdot A-\det A\cdot I_3=0$ $TrA=1-1+3=3$ $TrA^*=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33}=-4+1-2=-5$ $A^3-3A^2-5A+2I_3=0\Leftrightarrow A\left(A^2-3A-5I_3\right)=-2I_3\Leftrightarrow A\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(A^2-3A-5I_3\right)\right]=I_3$ $\Rightarrow A^{-1}=B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-1&1&0\\3&1&-2\end{pmatrix}$ calculată la punctul b).	1p 2p 2p
2. a)	$x*y=1+(x-1)^{\ln(y-1)}=1+e^{\ln(x-1)^{\ln(y-1)}}=1+e^{\ln(y-1)\ln(x-1)},(\forall)x,y\in G$, (1) $y*x=1+(y-1)^{\ln(x-1)}=1+e^{\ln(y-1)^{\ln(x-1)}}=1+e^{\ln(x-1)\ln(y-1)},(\forall)x,y\in G$, (2) Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este comutativă.	2p 2p 1p
b)	$(x*y)*z=1+(x*y-1)^{\ln(z-1)}=1+\left[1+(x-1)^{\ln(y-1)}-1\right]^{\ln(z-1)}=1+(x-1)^{\ln(y-1)\ln(z-1)}$, $(\forall)x,y,z\in G$, (1) $x*(y*z)=1+(x-1)^{\ln(y*z-1)}=1+(x-1)^{\ln\left[1+(y-1)^{\ln(z-1)}-1\right]}=1+(x-1)^{\ln(y-1)^{\ln(z-1)}}=$ $=1+(x-1)^{\ln[z-1]\ln(y-1)},(\forall)x,y,z\in G$, (2)	2p 2p 1p

	Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este asociativă.	
c)	Dacă $x=y=z$, atunci din asociativitatea legii obținem $x*x*x=1+(x-1)^{\ln^2(x-1)}$. $x*x*x=e^{27}+1\Leftrightarrow 1+(x-1)^{\ln^2(x-1)}=e^{27}+1\Leftrightarrow (x-1)^{\ln^2(x-1)}=e^{27}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln(x-1)^{\ln^2(x-1)}=\ln e^{27}\Leftrightarrow [\ln(x-1)]^3=27\Leftrightarrow \ln(x-1)=3\Rightarrow x-1=e^3\Rightarrow$ $\Rightarrow x=1+e^3$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Studiem monotonia șirului. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=x_{n+1}=\frac{8n+5}{8n+9}<1\Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1}<a_n,(\forall)n\in\mathbf{N}^*\Rightarrow(a_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător.	2p 1p
b)	Folosim metoda inducției matematice. Fie $P(n):a_n<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}},(\forall)n\ge1$ $P(1):a_1=x_1=\frac{8-3}{8+1}=\frac{5}{9}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\Rightarrow 5\sqrt{13}<9\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5\cdot13}<9\Rightarrow 65<81$ adevărat, rezultă $P(1):a_1<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$ adevărată. Presupunem relația adevărată pentru $n=k$ și demonstrăm că este adevărată pentru $n=k+1,(\forall)k\ge1$ $P(k):a_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}$ $P(k+1):a_{k+1}=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k\cdot x_{k+1}=(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k)\cdot x_{k+1}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}\cdot x_{k+1}=$ $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}\cdot\frac{8k+5}{8k+9}=\frac{\sqrt{5(8k+5)}}{8k+9}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+13}}\Rightarrow\sqrt{8k+5}\cdot\sqrt{8k+13}<8k+9\Rightarrow$ $\Rightarrow 64k^2+104k+40k+65<64k^2+144k+81\Leftrightarrow 65<81$ adevărat, rezultă $P(k+1)$	1p 1p 2p

	adevărată, $(\forall)k \ge 1$.	1p
	Deci $P(n): a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \ge 1$.	
c)	Observăm că $a_n > 0, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$.	1p
	Deci $0 < a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \ge 1 \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător, rezultă șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.	1p
	Folosim criteriul majorării şi obținem: $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}} = 0 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	1p
2.	$x^3 + 3x^2 + 8x + 6 = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 6x + 6 =$	2p
a)	$= x^2(x+1) + 2x(x+1) + 6(x+1) =$	2p
	$= (x+1)(x^2 + 2x + 6)$	1p
b)	$I_1 = \int f_1(x)dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{x^2 + 2x + 4} dx$	1p
	$H_1 = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t} dt = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt = \frac{t}{2} + \ln t + C \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 4) + \ln(x^2 + 2x + 4) + C$	
	$I_2 = \int f_2(x)dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 2x + 4)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{(x^2 + 2x + 4)^2} dx$	1p
	$H_2 = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t^2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{1}{x^2 + 2x + 4} + C$	
c)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 2x + 4)^n} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{(x^2 + 2x + 4)^n} dx$	2p 1p
	Facem substituția $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$	2p

	$H_n = \frac{1}{2}\int\frac{t+2}{t^n}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^{n-1}}dt + \int\frac{1}{t^n}dt = \frac{1}{2}\int t^{-n+1}dt + \int t^{-n}dt =$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+2}}{-n+2} + \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2(n-2)}\cdot\frac{1}{t^{n-2}} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C \Rightarrow$ $I_n = -\frac{1}{2(n-2)}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+4)^{n-2}} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+4)^{n-1}} + C, (\forall) n \geq 3$	