Rezolvare

a. Pentru $a=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=0$.

b. $\det(A)=-4(a+1)^2=0 \Rightarrow a=-1$.

c. Calcul direct şi se obține $a=-1$.

d. $B-AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

e. $\det(B-I_3)=13\neq 0$, deci $B-I_3$ este inversabilă.

f. $\det(A)=-16\neq 0$, deci există A^{-1} şi $A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a = 0 \in \mathbb{R}$ se obține $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; aşadar $A(0) = O_3$, deci $O_3 \in M$.

b. $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ şi $\det A(a) = 0$.

c. $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$. $A(a)\cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} \in M$.

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, vom avea $A(b)\cdot A(a) = A(2ba)$. Dar cum $a, b \in \mathbb{R}$ parametri şi înmulțirea numerelor reale este comutativă, vom avea $2ab = 2ba$, de unde $A(2ab) = A(2ba) \Leftrightarrow A(a)\cdot A(b) = A(b)\cdot A(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

e. Deja se cunoaşte relația $A(a)\cdot A(b) = A(2ab)$, ceea ce va duce la $A(a)\cdot A(e) = A(2ae)$. Din relația $A(a)\cdot A(e) = A(a)$ se va obține $A(2ae) = A(a), \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ae = a \Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$, fiind singura valoare reală ce verifică relația $A(a)\cdot A(e) = A(a), \forall A(a) \in M$. Aşadar matricea $A(e) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

f. $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. $2A(xy) = 2\begin{pmatrix} xy & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ xy & 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(y) = A(2xy) = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}$.

Deci $2A(xy) = A(x)\cdot A(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8 & 8\\ -2 & -1 & -2\\ 6 & 12 & 11\end{pmatrix}$

şi vom obține $A^2-3A+5I_3=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 6 & 7\end{pmatrix}=B$.

b. $\det A=3-2a-4+3a=a-1$, $\det A=3\Leftrightarrow a-1=3\Leftrightarrow a=4$.

c. $\det A=3-2a-4+3a=a-1$, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, deci A este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d. Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\det A=-1$. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 3 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$, A este inversabilă, atunci soluția ecuației matriceale $AX=B$ va fi $X=A^{-1}B$,

$X=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 6 & 8\\ -14 & 7 & 6\\ 10 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

f. $AC=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & a & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 2a & 2\\ -1 & 1-a & 0\\ 2+3a & 3a & 3\end{pmatrix}$.

$CA=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & a & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a & 2a & 2\\ -1 & 1 & 0\\ a+2 & a^2+a & 2a+3\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AC=CA$ se obține $a=0$.

Rezolvare

a. $A = M + aI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (a+2)(a-2) + 4 = a^2 - 4 + 4 = a^2$ de unde se obține ecuația

$a^2 = 16 \Leftrightarrow a_1 = -4, a_2 = 4$.

c. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$, $\det A = a^2$ și cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = 1$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă și vom obține

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X = A^{-1}M$, de unde prin calcul se obține

$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a & 2a \\ -8a & a^2-4a \end{pmatrix}$ și

$2a \cdot A - a^2 \cdot I_2 = 2a\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix} - a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a & 2a \\ -8a & a^2-4a \end{pmatrix}$, de unde se va obține relația

$A^2 = 2a \cdot A - a^2 \cdot I_2$.

f. $A^3 = a^2(3M + aI_2)$. Din enunț se cunoaște că $A = M + aI_2$, de unde $A^3 = (M + aI_2)^3$. Folosind proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice și proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$. Calculăm

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și înlocuind în relația anterioară,

se va obține: $A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2) \Rightarrow A^3 - a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $AB=\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2a^2+1\\ b & ab+3\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+ab & 1+3a\\ b & 3\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB+BA=\begin{pmatrix}4a+ab & 2a^2+3a+2\\ 2b & ab+6\end{pmatrix}$.

b. Pentru $a=2$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ b & 3\end{pmatrix}$, atunci $\det A=12-b$ de unde se obține ecuația $12-b=5\Leftrightarrow b=7$.

c. Pentru $b=1$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}2a & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$, obținem $6a-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq\frac{1}{6}$. În acest caz, pentru $b=1$ matricea A este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}$, $\det A=6a-b$ şi cum $b\neq 6a$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -b & 2a\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{6a-b}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -b & 2a\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$ şi $b=1$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}2a & 2a^2+1\\ b & ab+3\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2a+ab & 1+3a\\ b & 3\end{pmatrix}$.
Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $ab=0$ şi
$2a^2+1=1+3a\Leftrightarrow 2a^2-3a=0\Leftrightarrow a(2a-3)=0\Leftrightarrow a\neq 0, a=\frac{3}{2}$. Deci $(a,b)=\left(\frac{3}{2};0\right)$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A = M + 2a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (2a+3)(2a-3)+9 = 4a^2 - 9 + 9 = 4a^2$ de unde se obține ecuația $4a^2 = 16 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$.

c. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$, $\det A = 4a^2$ și cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & 9 \\ -1 & 2a+3 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{4a^2}\begin{pmatrix} 2a-3 & 9 \\ -1 & 2a+3 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \dfrac{1}{2}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă şi vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X = A^{-1}M$, de unde se obține $X = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2+12a & -36a \\ 4a & 4a^2-12a \end{pmatrix}$ şi $4aA - 4a^2 I_2 = 4a\begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix} - 4a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+12a & -36a \\ 4a & a^2-12a \end{pmatrix}$, de unde se va obține relația $A^2 = 4aA - 4a^2 I_2$.

f. $A^3 = 4a^2(3M + 2aI_2)$. Din enunț se cunoaşte că $A = M + 2aI_2$, de unde $A^3 = (M + 2aI_2)^3$. Folosind proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice şi proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 6a \cdot M^2 + 12a^2 \cdot M + 8a^3 \cdot I_2$. Calculăm $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi înlocuind în relația anterioară, se va obține: $A^3 = 12a^2 \cdot M + 8a^3 \cdot I_2 = 4a^2(3 \cdot M + 2a \cdot I_2)$. Aşadar, $A^3 - 4a^2(3M + 2aI_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a = 0$ se obține $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, așadar $A(0) = B$, deci $B \in M$.

b. $\det(A(a)) = 0$.

c. $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$. $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} \in M$.

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, obținem : $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, ceea ce înseamnă că vom avea $A(b) \cdot A(a) = A(2ba)$. Dar cum $a, b \in \mathbb{R}$ parametri și înmulțirea numerelor reale este comutativă, vom avea $2ab = 2ba$ de unde $A(2ab) = A(2ba) \Leftrightarrow A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(b), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

e. Deja se cunoaşte relația $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, ceea ce va duce la $A(a) \cdot A(e) = A(2ae)$. Din relația $A(a) \cdot A(e) = A(a)$ se va obține $A(2ae) = A(a) \Leftrightarrow 2ae = a \Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$, fiind singura valoare reală ce verifică relația $A(a) \cdot A(e) = A(a), \forall A(a) \in M$. Așadar matricea $A(e) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

f. $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. $A(2xy) = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}$, $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix} = A(2xy)$.

Deci $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+3 & a+10 & 2a+3 \\ -a & 1-3a & -2a \\ a+1 & 7 & 4-3a \end{pmatrix}$.

b. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = a-a-3+3a^2=3a^2-3$.

c. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ de unde se obține $A^2-3A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Prima ecuație a sistemului este $ax+y+3z=11$. Înlocuind $x=1$, $y=3$ şi respectiv $z=2$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $a+3+6=11 \Leftrightarrow a=2$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$ Cum $\det A = 3a^2-3$ se va obține relația $3a^2-3\neq 0 \Leftrightarrow a^2\neq 1 \Leftrightarrow a\neq \pm 1$. Aşadar sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

f. Pentru $a=2$ sistemul devine (S): $\begin{cases} 2x+y+3z=11 \\ y-2z=-1 \\ x+3y+z=12 \end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det A=9$. În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix}=11-9-24-36+1+66=9$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}=-2-22+3+48=27$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix}=24-1-11+6=18$. Vom avea $x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{9}{9}=1$, $y=\frac{\Delta y}{\det A}=\frac{27}{9}=3$, $z=\frac{\Delta_z}{\det A}=\frac{18}{9}=2$

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(1;3;2)\}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}$, de unde $\det A=b+a-2-3ab=a+b-3ab-2$.

b. Pentru $b=5$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, de unde $\det A=-15a+a+5-2=-14a+3$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a : $-14a+3=17 \Leftrightarrow a=-1$;

c. Pentru $a=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}$, de unde $\det A=-5b+2-2=-5b$. Matricea este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$, de unde $-5b\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d. Pentru $a=2$ şi $b=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-5$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-x-5=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 verifică relațiile lui Viète, de unde vom obține $x_1+x_2=1$ şi $x_1x_2=-5$. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & x_1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x_2\end{pmatrix}$ cu $\det A=-3x_1x_2+x_1+x_2-2$. Prin înlocuire se va obține $\det A=14$.

f. $\begin{cases}x+y+2z=8\\ 3x+y+z=10\\ x=2\end{cases}$, înlocuind $x=2$ în primele două ecuații ale sistemului se va obține $\begin{cases}y+2z=6\\ y+z=4\\ x=2\end{cases}$, de unde se va obține printr-un simplu calcul $\begin{cases}z=2\\ y=2\\ x=2\end{cases}$. În acest caz, mulțimea soluțiilor este $\{(2;2;2)\}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A = M - 3a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 3a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$, atunci $\det A = -(1-3a)(1+3a)+1 = -1+9a^2+1 = 9a^2$ de unde se obține ecuația $9a^2 = 36 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$.

c. $A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$, $\det A = 9a^2$ și cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3a & -1 \\ 1 & 1-3a \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{9a^2}\begin{pmatrix} -1-3a & 1 \\ 1 & 1-3a \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \frac{1}{3}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă şi vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X = A^{-1}M$, de unde se obține $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}$ şi

$6aA - 9a^2 I_2 = -6a\begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} - 9a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}$, de unde se va obține relația

$A^2 = -6aA - 9a^2 I_2$.

f. $M^2 = O_2 \Rightarrow A^2 = (M-3aI_2)(M-3aI_2) = -6aM + 9a^2 I_2 \Rightarrow A^3 = 27a^2(M - aI_2) \Rightarrow A^3 - 27a^2(M - aI_2) = O_2$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&3\\2&3&6\\1&1&4\end{pmatrix}$ şi vom obține $A^2+2A-4I_3=\begin{pmatrix}1&3&9\\6&1&6\\3&1&2\end{pmatrix}=B$.

b. Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi vom obține $\det A=-5$;

c. $\det A=a-6a-3-2=-5a-5$.

d. $-5a-5\neq 0\Leftrightarrow a\neq -1$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

e. Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi avem $\det A=-5$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-2&-3&6\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-2&-3&6\\-1&1&-2\end{pmatrix}$.

f. Ecuația matriceală $A^2+X=B$ are soluția $X=B-A^2$, de unde se va obține $X=\begin{pmatrix}-4&2&6\\4&-2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$.

Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2a+2b-4-3ab$.

b. Pentru $b=3$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2a+6-4-9a=-7a+2$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a: $-7a+2=-12 \Leftrightarrow a=2$.

c. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2+2b-4-3b=-b-2$. Matricea este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, de unde $-b-2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -2$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d. Pentru $a=1$ şi $b=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A=-2$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-2x-3=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației şi soluțiile acesteia, de unde vom obține $x_1+x_2=2$ şi $x_1x_2=-3$. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ cu $\det A = 2x_1+2x_2-4-3x_1x_2=2(x_1+x_2)-4-3x_1x_2$. Prin înlocuire se va obține $\det A=9$.

f. $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ y=3 \\ 2x+3y+2z=15 \end{cases}$, înlocuind $y=3$ în primele două ecuații ale sistemului se va obține $\begin{cases} x+2z=5 \\ y=3 \\ 2x+2z=6 \end{cases}$, de unde se va obține printr-un simplu calcul $\begin{cases} z=2 \\ y=3 \\ x=1 \end{cases}$. Mulțimea soluțiilor sistemului va fi $\{(1;3;2)\}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $AB=\begin{pmatrix}1 & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3a^2\\0 & 2b\end{pmatrix}$. $M=AB-BA=\begin{pmatrix}0 & 3a-3a^2\\0 & 0\end{pmatrix}$.

b. $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}$, atunci $\det A=2b$ de unde se obține ecuația $2b=6\Leftrightarrow b=3$.

c. Pentru $b=1$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\0 & 2\end{pmatrix}$; A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$. Dar cum $\det A=2\neq 0$, obținem că pentru $b=1$ matricea este inversabilă pentru $\forall a\in\mathbb{R}$.

d. $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}$, $\det A=2b$ şi cum $b\neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & -3a\\0 & 1\end{pmatrix},\ \text{atunci}\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{2b}\begin{pmatrix}2b & -3a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3a}{2b}\\0 & \frac{1}{2b}\end{pmatrix}.$$

e. Pentru $a=1$ şi $b=1$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -5\\1 & -1\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}a & 3a\\0 & 2b\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}a & 3a^2\\0 & 2b\end{pmatrix}$. Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $2b=2b$ şi $3a=3a^2\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow$ $a(a-1)=0\Leftrightarrow a_1=0, a_2=1$ şi $b\in\mathbb{R}$. Deci perechile căutate sunt: $(0;b)$ şi $(1;b)$ pentru $b\in\mathbb{R}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A = M + 3a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} + 3a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (3a-4)(3a+4) + 16 = 9a^2 - 16 + 16 = 9a^2$ de unde se obține ecuația $9a^2 = 9 \Leftrightarrow a_1 = -1, a_2 = 1$.

c. $A = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$, $\det A = 9a^2$ și cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-4 & 2 \\ -8 & 3a+4 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{9a^2} \begin{pmatrix} 3a-4 & 2 \\ -8 & 3a+4 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \frac{1}{3}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă și vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X = A^{-1} M$, de unde se obține $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

e. $A^2 = \begin{pmatrix} 9a^2 + 24a & -12a \\ 48a & 9a^2 - 24a \end{pmatrix}$.

f. $A^2 = (M + 3aI_2)(M + 3aI_2) = 6aM + 9a^2 I_2 \Rightarrow A^3 = 27a^2 (M + aI_2)$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a=0$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, așadar $A(0)=I_2$, deci $I_2\in M$.

b. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă are determinantul nenul, $\det A(a)=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă $\forall a\in\mathbb{R}$.

c. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(b)=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b+a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$.

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, obținem: $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce înseamnă că vom avea $A(b)\cdot A(a)=A(b+a)$. Dar cum $a,b\in\mathbb{R}$ parametri şi adunarea numerelor reale este comutativă, vom avea $a+b=b+a$ deci $A(a+b)=A(b+a)\Leftrightarrow A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(b),\forall a,b\in\mathbb{R}$.

e. Deja se cunoaşte relația $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce va duce la $A(a)\cdot A(e)=A(a+e)$. Din identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a)$ se va obține $A(a+e)=A(a)\Leftrightarrow a+e=a\Leftrightarrow e=0$, fiind singura valoare reală ce verifică identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a),\forall A(a)\in M$. Aşadar matricea $A(e)=A(0)$.

f. $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. De unde se va obține $A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Deci $A(x+y)=A(x)\cdot A(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=3ab-6+2-2a-2b+9=3ab-2(a+b)+5$.

b. Pentru $b=2$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=4a+1$. Se obține ecuația $4a+1=17 \Leftrightarrow a=4$.

c. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=b+3$. Matricea este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$, de unde $b+3\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -3$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

d. Pentru $a=1$ și $b=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A=4$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-5x-8=0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației și soluțiile acesteia, de unde vom obține $x_1+x_2=5$ și $x_1x_2=-8$. Dacă $a=x_1$ și $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_2 & 1 & 2 \\ -3 & x_1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cu $\det(A)=3x_1x_2-2(x_1+x_2)+5$. Deci $\det(A)=36$.

f. $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ -3x+y+2z=3 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$, matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\det A=4$. În acest caz vom avea

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}=21+6+18-18-14-9=4,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix}=9+14-54-6-18+63=8,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}=9+3-21-7-3+27=8. \text{ Vom avea } x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{4}{4}=1.$$

$y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{8}{4}=2$ și $z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{8}{4}=2$. Atunci soluția va fi tripletul $(1;2;2)$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ 4+2ab & 2b\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a+4 & a^2+2b\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB-BA=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 2ab-a & -a^2\end{pmatrix}$.

b. Pentru $a=2$ se obține $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 2b\end{pmatrix}$. $\det(A)=2b-8$ deci rezultă ecuația $2b-8=-6 \Leftrightarrow b=1$.

c. Pentru $b=2$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A)\neq 0$. Cum $\det(A)=4-4a$, obținem $4-4a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$, de unde rezultă că pentru $b=2$, matricea A este inversabilă pentru $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}$, $\det A=2b-4a$ şi cum $b\neq 2a$, obținem $\det A\neq 0$, deci, matricea A este inversabilă.

Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & -a\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{2b-4a}\begin{pmatrix}-2b & a\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$ şi $b=\frac{1}{2}$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det(A)=1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -5 & -17\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ 4+2ab & 2b\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}1 & a\\ a+4 & a^2+2b\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $1+a^2=1$ şi $a+4=4+2ab$ şi $a^2+2b=2b$. Prin calcul se va obține $a=0$ şi $b\in\mathbb{R}$. Deci, perechile de numere reale căutate sunt de forma $(0;b)$, pentru $b\in\mathbb{R}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A^2=\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+1 & 2-2a & 8\\ 4 & 1-2a & 4\\ 8a+2 & 4-2a^2 & 4a+9\end{pmatrix}$.

b. $A=\begin{pmatrix}-1 & a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$, de unde $\det A=3+4-4a+6a=2a+7$.

c. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ 4 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$ de unde se obține $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 12\\ 8 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 15\end{pmatrix}$.

d. Prima ecuație a sistemului este $x-ay+2z=6$. Înlocuind $x=3$, $y=1$ și respectiv $z=2$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $3-a+4=6\Leftrightarrow a=1$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=2a+7$ se va obține relația $2a+7\neq 0\Leftrightarrow 2a\neq -7\Leftrightarrow a\neq -\frac{7}{2}$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

f. Pentru $a=1$ sistemul devine (S): $\begin{cases}x-y+2z=6\\ 2x+y=7\\ 2x+y+3z=13\end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu $\det A=9$.

În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix}6 & -1 & 2\\ 7 & 1 & 0\\ 13 & 1 & 3\end{vmatrix}=18+14-26+21=27$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 2 & 7 & 0\\ 2 & 13 & 3\end{vmatrix}=21+52-28-36=9$,

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 13\end{vmatrix}=13+12-14-12-7+26=18$. Vom avea $x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{27}{9}=3$, $y=\frac{\Delta y}{\det A}=\frac{9}{9}=1$,

$z=\frac{\Delta_z}{\det A}=\frac{18}{9}=2$. Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(3;1;2)\}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a=0$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, aşadar, $A(0)=I_2$, deci $I_2\in M$.

b. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\a & 1\end{pmatrix}$. O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă are determinantul nenul, $\det A(a)=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă $\forall a\in\mathbb{R}$.

c. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\a & 1\end{pmatrix}$, $A(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}$. Atunci $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\a+b & 1\end{pmatrix}\in M$

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, obținem : $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce înseamnă că vom avea $A(b)\cdot A(a)=A(b+a)$. Dar cum $a,b\in\mathbb{R}$ şi adunarea numerelor reale este comutativă, vom avea $a+b=b+a$ de unde $A(a+b)=A(b+a)\Leftrightarrow A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(b),\forall a,b\in\mathbb{R}$.

e. Deja se cunoaşte relația $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce va duce la $A(a)\cdot A(e)=A(a+e)$. Din identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a)$ se va obține $A(a+e)=A(a)\Leftrightarrow a+e=a\Leftrightarrow e=0$, fiind singura valoare reală ce verifică identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a),\forall A(a)\in M$. Aşadar matricea $A(e)=A(0)$

f. $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\x & 1\end{pmatrix}$. De unde se va obține $A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\x+y & 1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\x+y & 1\end{pmatrix}$.

Deci $A(x+y)=A(x)\cdot A(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Rezolvare

a. $A^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+3a & a-6 & 2\\ 1-3a & 2a+1 & a^2+3\\ a & 5 & a+10\end{pmatrix}$.

b. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, de unde $\det A=a^2+2+3-6a=a^2-6a+5$.

c. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}9 & -6 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 10\end{pmatrix}$ deci $B=\begin{pmatrix}24 & -16 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -5 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

d. Prima ecuație a sistemului este $-3x+2y+az=-2$. Înlocuind $x=2$, $y=-1$ şi respectiv $z=3$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $-6-2+3a=-2\Leftrightarrow 3a=6\Leftrightarrow a=2$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=a^2-6a+5$ se va obține relația $a^2-6a+5\neq 0\Leftrightarrow a_1\neq 1$ şi $a_2\neq 5$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

f. Pentru $a=2$ sisemul devine (S): $\begin{cases}-3x+2y+2z=-2\\ 2x+z=7\\ x+y+3z=10\end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu

$\det A=-3$. În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 2\\ 7 & 0 & 1\\ 10 & 1 & 3\end{vmatrix}=14+20+2-42=-6$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 10 & 3\end{vmatrix}=-63+40-2-14+30+12=3$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 7\\ 1 & 1 & 10\end{vmatrix}=-4+14+21-40=-9$. Vom

avea $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{-6}{-3}=2$, $y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{3}{-3}=-1$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{-9}{-3}=3$. Soluția sistemului este $(2;-1;3)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. Pentru $a=1$, $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&5&-3\\4&2&1\end{pmatrix}$ și $A^2-2A+3I_3=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-1&4&-1\\0&2&2\end{pmatrix}$.

b. $\det A=2a-2a-1=-1$, $\det A=a-3\Leftrightarrow -1=a-3\Leftrightarrow a=2$.

c. $\det A=-1$, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, deci A este inversabilă pentru $\forall a\in\mathbb{R}$.

d. Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

e. Pentru $a=0$ A este inversabilă, atunci soluția ecuației matriceale $AX=B$ va fi $X=A^{-1}B$,

$$X=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&4&-1\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&4&3\\3&1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

f. $$AC=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&2&-1\\2a&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&1&0\\a-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&1&0\\1&2&-1\\2a^2+a-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&1&0\\a-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1&0\\1&2&-1\\2a&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&a&0\\1&2&-1\\a^2+a&a-1&1\end{pmatrix}$$

Identificând elementele din egalitatea $AC=CA$ se obține $a=1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 4a+2a-2-4=6a-6$.

b. $A-I_3=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$,

$(A-I_3)^2=\begin{pmatrix} 2a-1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a^2-4a+5 & 3a-1 & 2a \\ 4a-2 & 2 & 2 \\ 6a & a+2 & 3 \end{pmatrix}$.

c. Pentru $a=-1$ se va obține $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ de unde se obține $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

d. Prima ecuație a sistemului este $2ax+y+z=4$. Înlocuind $x=-1$, $y=-1$ şi respectiv $z=3$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $-2a-1+3=4 \Leftrightarrow -2a=2 \Leftrightarrow a=-1$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$ Cum $\det A = 6a-6$ se va obține relația $6a-6\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$. Aşadar sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

f. Pentru $a=-1$ sistemul devine (S): $\begin{cases} -2x+y+z=4 \\ 2x+y=-3 \\ 2x-y+2z=5 \end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ cu

$\det A=-12$. În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=8+3-5+6=12$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}=12+10+6-16=12$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-10-8-6-8+6-10=-36$.

Vom avea $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{12}{-12}=-1$, $y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{12}{-12}=-1$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{-36}{-12}=3$.

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(-1;-1;3)\}$.

Rezolvare

a. $AB=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ab & 2a\\ 4a & 1\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ab & 2a^2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB-BA=\begin{pmatrix}0 & 2a-2a^2\\ 4a-4 & 0\end{pmatrix}$.

b. Pentru $a=-3$ se obține $A=\begin{pmatrix}-3b & 6\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, atunci $\det A=3b+24$ de unde se obține ecuația $3b+24=6 \Leftrightarrow b=-6$.

c. Pentru $b=8$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}24 & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă și numai dacă $\det A\neq 0$. Cum $\det A=24-8a$, obținem $24-8a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 3$, de unde rezultă că pentru $b=8$, matricea A este inversabilă pentru $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=3b-8a$ și cum $3b\neq 8a$, obținem $\det A\neq 0$, deci, matricea A este inversabilă.

Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2a\\ -4 & 3b\end{pmatrix}$, atunci

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\dfrac{1}{3b-8a}\begin{pmatrix}1 & -2a\\ -4 & 3b\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=1$ și $b=3$, matricele A și B devin $A=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=1$ și $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 9\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale este $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 17 & 11\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}3ab & 2a\\ 4a & 1\end{pmatrix}$ și $BA=\begin{pmatrix}3ab & 2a^2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $2a=2a^2$ și $4a=4$. Prin calcul se va obține $a=1$ și $b\in\mathbb{R}$. Deci, perechile de numere reale căutate sunt de forma $(1;b)$, pentru $b\in\mathbb{R}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A = M + 2a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (2a-2)(2a+2) + 4 = 4a^2 - 4 + 4 = 4a^2$ de unde se obține ecuația $4a^2 = 36 \Leftrightarrow a_1 = -3, a_2 = 3$.

c. $A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$, $\det A = 4a^2$ și cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & 1 \\ -4 & 2a-2 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{4a^2}\begin{pmatrix} 2a+2 & 1 \\ -4 & 2a-2 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \frac{1}{2}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă și vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriciale va fi $X = A^{-1}M$, deci $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 4a^2-8a & -4a \\ 16a & 4a^2+8a \end{pmatrix}$ și $4aA - 4a^2A = 4a\begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix} - 4a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4a^2-8a & -4a \\ 16a & 4a^2+8a \end{pmatrix}$, de unde concluzia.

f. $M^2 = O_2 \Rightarrow A^3 = (M + 2aI_2)^3 = 4a^3(3M + 2aI_2)$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=ab-b-a=ab-(a+b)$.

b. Pentru $b=4$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=3a-4$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a: $3a-4=5 \Leftrightarrow a=3$.

c. Pentru $a=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A)=b-2$. Matricea este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$, de unde $b-2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 2$. Deci matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

d. Pentru $a=2$ și $b=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A=-2$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-4x-7=0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 verifică relațiile lui Viète de unde vom obține $x_1+x_2=4$ și $x_1x_2=-7$. Dacă $a=x_1$ și $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det A=x_1x_2-(x_1+x_2)$. Prin înlocuire se va obține $\det A=-11$.

f. $\begin{cases} 2x+z=5 \\ z=-1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$, înlocuind $z=-1$ în prima și în cea de a treia dintre ecuațiile sistemului se va obține $\begin{cases} 2x=6 \\ z=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$, de unde se va obține printr-un simplu calcul $\begin{cases} x=3 \\ z=-1 \\ y=2 \end{cases}$. Deci soluția este $(3;2;-1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $a=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}=7A$

c) $\det(A)=8-2a^2$, $8-2a^2=0 \Rightarrow a=\pm 2$

d) Inlocuind în sistem $x=\frac{3}{5}, y=\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{3(a^2-1)}{5}+\frac{36}{5}=9 \Rightarrow a=\pm 2$

e) $x=0$, $y=\frac{3}{2}$

f) Pentru $a \neq \pm 2$, sistemul are soluția unică $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, iar $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $a=\pm 2$, sistemul are soluția $(1,1)$, deci $a=\pm 2$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

a) $a=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=-4$

b) Pentru $a=0$ obținem sistemul $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$. Soluția sistemului este $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

c)Inlocuind $x=y=z=\frac{1}{5} \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

d) $\det(A)=-\left(a^2+4\right)\left(a^2+1\right)^2 \Rightarrow \det(A)<0, \forall a \in \mathbb{R}$

e) Verificând soluția și adunând relațiile obținute $\Rightarrow \left(a^2+4\right)(t+u+v)=3;\ t+u+v=\frac{3}{a^2+4}$

f) $t=\frac{1}{a^2+4}>0, \forall\ a \in \mathbb{R};\ a^2+4 \geq 4,\ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{a^2+4} \leq \frac{1}{4}$

Soluție

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+I_3\right)=2$

b) ${}^tA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A+{}^tA=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

c) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=I_3$

d) $\det\left(A\right)\neq 0\Rightarrow \exists\, A^{-1};\ A^3=I_3\Rightarrow A^{-1}=A^2$

e) $\left(A+I_3\right)\left(A^2-A+I_3\right)=A^3+I_3;\ A^3+I_3=2I_3$

f) $A+pI_3$ este neinversabilă $\Leftrightarrow \det\left(A+pI_3\right)=0$; $\det\left(A+pI_3\right)=\begin{vmatrix}p & 1 & 0\\ 0 & p & -1\\ -1 & 0 & p\end{vmatrix}=p^3+1$

$p^3+1=0,\ p\in\mathbb{R}\Leftrightarrow p=-1$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $\det\left({}^tA\right)=\det(A);\ \det\left({}^tA\right)=\det(A)=a^2-5$

b) $A-aI_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$ suma elementelor este 6

c) $\left(A-aI_2\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2$

d) $\exists\ A^{-1}\Leftrightarrow\det(A)\neq 0;\ \det(A)=a^2-5\neq 0,\forall a\in\mathbb{Z}$

e) $A^*=\begin{pmatrix}-a & 1\\ -5 & a\end{pmatrix};\ A^{-1}=\dfrac{1}{a^2-5}\begin{pmatrix}-a & 1\\ -5 & a\end{pmatrix},a\in\mathbb{Z}$

f) $A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^2-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=\pm 2$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $B=\begin{pmatrix}-0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$ produsul elementelor matricei B este zero

b) $\exists\ A^{-1}\Leftrightarrow \det(A)\neq 0;\ \det(A)=a^2+1>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$

c) $B^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2\Rightarrow B^2+I_2=O_2$

d) Din c. $\Rightarrow B^2=-I_2\Rightarrow B^{-1}=-B\ \Rightarrow B+B^{-1}=O_2$

e) $B^2=-I_2$, $B^3=-B$, $B^4=I_2\ \Rightarrow B+B^2+B^3+B^4=O_2$

f) $\det(A)=a^2+1;\ a^2+1=2009\Rightarrow a^2=2008,$ ecuație care nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $B^2 = O_3, 3B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B^2 - 3B = -3B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $AB = O_3, BA = 3B \neq O_3$

d) $(AB)^2 = O_3, (BA)^2 = (3B)^2 = 9B^2 = O_3$; $(AB)^2 - (BA)^2 = O_3 \Rightarrow$ toate elementele matricei sunt egale cu zero

e) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = 3A + O_3 + 3B + O_3 = 3(A+B) \Rightarrow p = 3$

f) $(AB)^{2009} + (BA)^{2009} = O_3^{2009} + (3B)^{2009} = 3^{2009}\left(B^2\right)^{1004} \cdot B = O_3 \Rightarrow \det\left((AB)^{2009} + (BA)^{2009}\right) = 0$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A-3I_2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(A-3I_2)=O_2$

b) $\det(A)=a^2-2a+1=(a-1)^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$

c) $x=-1, y=2 \Rightarrow -2a+2a^2+2=2 \Rightarrow a \in \{0,1\}$

d) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

e) $x+y=1,\ x,y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow a \in \{-1,1\}$

f) Pentru $a \neq 1 \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{a+1}{a-1}, -\frac{2}{a-1}\right)$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $aA = \begin{pmatrix} a & 2a \\ a & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(aA) = 0$

b) $XA = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2x+2y \end{pmatrix}$; $a = 2 \Rightarrow (x+y)B = (x+y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2x+2y \end{pmatrix}$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3A$

d) ${}^tBX = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ ax & ay \end{pmatrix}, {}^tBX = A^2 \Rightarrow x = 3, y = 6, a = 1$

e) $I_2 + pA$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(I_2 + xA) \neq 0$. $\begin{vmatrix} 1+p & 2p \\ p & 1+2p \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 3p + 1 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq -\frac{1}{3}$

f) $(I_2 + A)(I_2 + bA) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + A + bA + 3bA = I_2$. $(1+4b)A = O_2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=2$

b) Se verifică prin calcul.

c) $A(-a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -a & 1 & 2\\ a^2 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $A(a)-A(-a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=0$

d) $X\cdot {}^tB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ a^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $X\cdot {}^tB-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -4\end{pmatrix}$

e) $\det(A(a))=(a-2)(a-1)$.Produsul a două numere întregi consecutive este par $\Rightarrow \det(A(a))$ este numar par pentru orice $a\in\mathbb{Z}$.

f) $A(a)X=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+a+a^2\\ 2a+2a^2\\ 5a^2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=0$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=0$

b) $4A=\begin{pmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{pmatrix}, 5I_3=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow 4A+5I_3=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}$

c) $A^2=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}$

d) $\det(zA)=z^3\det(A)=z^3\cdot 5$; $5z^3=40\Rightarrow z=2$

e) $AX=B\Leftrightarrow\begin{cases}t+2u+2v=a\\2t+u+2v=a\\2t+2u+v=a\end{cases}\Rightarrow t+2u+2v=2t+u+2v\Rightarrow t=u;\ t+2u+2v=2t+2u+v\Rightarrow v=t$

f) Cum $A(A-4I_3)=5I_3$, rezultă $A^{-1}=\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}I_3$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=2$

b) $x=-2, y=-2, z=-2 \Rightarrow a=-2$

c)Pentru $a=0\Rightarrow x=y=z=0$

d) $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2+A=2I_3$

e) $\det(A)=4\neq 0\Rightarrow \exists\ A^{-1};\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

f) Pentru $a\in\mathbb{R}$ soluția sistemului este (a,a,a); $a+2a+3a=-6\Rightarrow a=-1\Rightarrow$ soluția $(-1,-1,-1)$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A-I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A-I_3\right)=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix},5A=\begin{pmatrix}10&5&5\\5&10&5\\5&5&10\end{pmatrix},4I_3=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix};\ A^2-5A+4I_2=O_3$

c) $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3;\ A\left(-\frac{1}{4}A+\frac{5}{4}I_3\right)=-\frac{1}{4}A^2+\frac{5}{4}A=-\frac{1}{4}\left(5A-4I_2\right)+\frac{5}{4}A=I_3$

d) $\det\left(A\right)=4;\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{4}$

e) $A^2+yA+zI_3=\begin{pmatrix}6+2y+z&5+y&5+y\\5+y&6+2y+z&5+y\\5+y&5+y&6+2y+z\end{pmatrix};\ \begin{cases}6+2y+z=0\\5+y=0\end{cases}\Rightarrow y=-5,z=4$

f) $A={}^tA;\ \det\left(A\right)=4;\ \det\left(aA+{}^tA\right)=\det\left(aA+A\right)=\det\left(\left(a+1\right)A\right)=\left(a+1\right)^3\det\left(A\right)=4\left(a+1\right)^3$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\det(A) = 1, \det(A^2) = 1$

c) $\begin{pmatrix} -2+x+y & -3x+3 \\ x-1 & -2x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 1$

d) Din **c)** $\Rightarrow A^2 = -A - I_2$, $A^3 = A^2 A = -A^2 - A = I_2 \Rightarrow A^3 + A^2 + A = O_2$

e) Din **d)** $\Rightarrow A + A^2 + A^3 = O_3$ și $28 = 3 \cdot 9 + 1 \Rightarrow A + A^2 + ... + A^{28} = A + 9 \cdot O_2 = A$

f) $aI_2 + A$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(aI_2 + A) \neq 0$

$\det(aI_2 + A) = \begin{vmatrix} a+1 & -3 \\ 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \det(aI_2 + A) \neq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $B-2C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$

b) $A+B+C=\begin{pmatrix}+a & 2 & 0\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+B+C\right)=0$

c) $\begin{pmatrix}+a & 2 & 0\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\Leftrightarrow a\neq -2$

d) $xA+yB+zC=\begin{pmatrix}+ & +xa+\ y & z-\ x & 2y & z\\ & x+y-2z & & 0 & \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}ax+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$

e) Pentru $a=0\Rightarrow\begin{cases}y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\Rightarrow x=y=z=0$

f) Din ultimele două ecuații $\Rightarrow\begin{cases}x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\Rightarrow x=y=z$. Înlocuind în prima ecuație obținem: $x\left(a+2\right)=0$

Pentru $a\neq -2\Rightarrow x=y=z=0$
Pentru $a=-2\Rightarrow x=y=z$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A^2 = O_2$, $A^3 = O_2$

b) $I_2 + A^3 = I_2 + O_2 = I_2$; $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 - A^2 = I_2 - O_2 = I_2$

c) $\det(aA + aI_2) = \det\left[a(A + I_2)\right] = a^2 \det(A + I_2) = a^2$

d) $\exists (I_2 + aA)^{-1} \Leftrightarrow \det(I_2 + aA) \neq 0$; $\det(I_2 + aA) = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

e) $(I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 \Leftrightarrow (a+b)A = O_2 \Rightarrow b = -a, \forall a \in \mathbb{R}$

f) $X \cdot A = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x-y & x+y \\ x+y & -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow X^2 = 2X \Rightarrow (X - I_2)^2 = I_2$..

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $M(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$ suma elementelor matricei este 4

b) $A^2=\begin{pmatrix}\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) & 0\\ 0 & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}=-I_2$; $A^2+I_2=-I_2+I_2=O_2$

c) $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\left(1+\sqrt{2}\right)\\ b\left(1-\sqrt{2}\right) & a\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(M(a,b)\right)=a^2+b^2$

d) $M(a,b)$ neinversabilă $\Leftrightarrow \det\left(M(a,b)\right)=0$

$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0\Rightarrow M(0,0)$ este singura matrice neinversabilă

e) $M(a,b)\cdot M^{-1}(a,b)=M^{-1}(a,b)\cdot M(a,b)=I_2$

$M(a,b)\cdot M\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2}{a^2+b^2}I_2+\frac{-ab}{a^2+b^2}A+\frac{ba}{a^2+b^2}A+\frac{-b^2}{a^2+b^2}A^2=I_2$

f) $M^{-1}(a,1)\in G\Rightarrow \frac{a}{a^2+1}\in\mathbb{Z}$, $\frac{-1}{a^2+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=0$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A\left(60^0\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Suma elementelor matricei este $\sqrt{3}$

b) $A\left(60^0\right)+\frac{1}{2}I_2=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A\left(60^0\right)+\frac{1}{2}I_2\right)=\frac{5}{4}$

c) $\det\left(A(x)\right)=-\cos^2 x-\sin^2 x+2=1$

d) $A^2(x)=-I_2$

e) $\det\left(A(x)\right)=1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}(x)$; din **d)** $A^2(x)=-I_2\Rightarrow A^{-1}(x)=-A(x)\Rightarrow A^{-1}(x)+A(x)=O_2$

f) $A(x)=A\left(180^0-x\right)\Leftrightarrow \cos x=0;\ 0^0<x<180^0\Rightarrow x=90^0$

Soluție

a) $a=1, b=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=-1$; $\det(A)+\det(I_3)=-1+1=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2+b^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $aA+bI_3=O_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2+b & ab & 0\\ ab & -a^2+b & 0\\ 0 & 0 & a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow a=b=0$

d) A neinversabilă $\Leftrightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow -a^2-b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$

e) $A^{-1}=A \Leftrightarrow A^2=I_3 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$; $a^2+b^2=1,\ a,b\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow a=\pm1,\ b=0$ sau $a=0, b=\pm1$

f) $A^2=I_3 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$; $a=\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=\frac{3}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Subiectul III

Soluție

a) $A+2I_2=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+2I_2)=6$

b) $X^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$

c) $(\det(X))^2=(ad-bc)^2$; $\det(X^2)=a^2d^2+b^2c^2-2adbc$

d) $(a+d)X=\begin{pmatrix} a^2+ad & ba+bd \\ ca+cd & da+d^2 \end{pmatrix}$; $\det(X)I_2=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

e) Din d. $\Rightarrow X^2-(a+d)X+0\cdot I_2=O_2 \Rightarrow X^2=(a+d)X$

f) $\det(X^2)=\det(A) \Leftrightarrow (\det(X))^2=0 \Leftrightarrow \det(X)=0 \Rightarrow X^2=(a+d)X$;

$(a+d)X=A \Rightarrow \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{cases} (a+d)a=3 \\ (a+d)b=6 \\ (a+d)c=-1 \\ (a+d)d=-2 \end{cases} \Rightarrow (a+d)^2=1 \Rightarrow a+d=\pm1 \Rightarrow X=\pm A$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Dacă $a=b=c=1$, atunci $A-2I_2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $a=b=c=1\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$

c) $\det(B)=ab-1$

$\det(B)=0\Leftrightarrow ab-1=0, a,b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=b=1$ sau $a=b=-1$

d) Dacă $a=b=c$ şi $\det(A)=0\Rightarrow(a+2)(a-1)^2=0\Rightarrow a\in\{-2;1\}$. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

e) $\det(A)=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\0+1&0+1&c-1+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\0&0&c-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(c-1)\det(B)+(a-1)(b-1)$

f) Se poate lua $a=2$, $b=1$, $c=2010\Rightarrow\det(A)=(c-1)(ab-1)+(a-1)(b-1)=2009$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

b) $\det(M(2)) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 1$.

c) $(A+I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = M(2)$

d) $(M(1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $M(a)M(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A = M(a+b)$.

f) $M^{2009}(x) = M(2009) \Leftrightarrow M(2009x) = M(2009) \Leftrightarrow x = 1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A+I_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+I_2)=4$

b) $(A-I_2)(A+I_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $(A-I_2)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$

d) $A^2+xA+yI_2=O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+x+y & 2+x \\ 0 & 1+x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=-2, y=1$

e) Din **c)** rezultă $A^2-2A+I_2=O_2 \Rightarrow A\cdot(2I_2-A)=(2I_2-A)\cdot A=I_2 \Rightarrow (2I_2-A)^{-1}=A$

f) $Y^2=\begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)\in\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\right\} \Rightarrow Y_1=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(AB)=1$

b) $AB-BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

c) $A^2+B^2=I_3+I_3=2I_3$

d) $D=\begin{pmatrix}a&b&0\\b&-a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ suma elementelor matricei D este 1

e) $D^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2&0&0\\0&a^2+b^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(D^2\right)=\left(a^2+b^2\right)^2$

f) $D={}^tD\Rightarrow \det\left({}^tDD\right)=\det\left(D^2\right)=\left(a^2+b^2\right)^2$. $\det\left(D+{}^tD\right)=\det(2D)=8\det(D)=-8\left(a^2+b^2\right)$.

$a^2+b^2=0\Rightarrow a=b=0$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Prin calcul se verifică.

b) $\begin{vmatrix} a+2 & -1 \\ a-3 & 7 \end{vmatrix} = 19 \Rightarrow a = 1$.

c) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; $A^2 = 8A$.

e) Din punctul **a)** obținem $B(B-2I_2) = (B-2I_2)B = 3I_2$, deci $B^{-1} = \frac{1}{3}(B-2I_2)$.

f) $A^2 = (a+7)A + 9(1-a)I_2$ şi $A^2 = m(A+I_2) \Rightarrow m = \frac{36}{5}$ şi $a = \frac{1}{5}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C)=1$

b) $A^3=O_3$

c) $(I_3+A)\left(I_3-A+A^2\right)=I_3+A^3=I_3$

d) $I_3+A+A^2+aA+aA^2+aA^3=I_3;\ (a+1)\left(A+A^2\right)=O_3 \Leftrightarrow a=-1$

e) $\det(C)\neq 0$; din c)$\Rightarrow\ C^{-1}=I_3-A+A^2$

f) $\begin{pmatrix}x+z&x&x+y\\0&x+z&x\\0&0&x+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=1, y=0, z=-1$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $3A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $3A+I_2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $-2+3+0+1=2$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $A^2+A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $I_2-A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$

d) $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $aA=\begin{pmatrix}-a & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $a=1$

e) $A^{2k}=-A$ şi $A^{2k+1}=A$. Suma a două puteri consecutive este O_2. Deci suma cerută este egală cu *A*.

f) $\det\left(I_2+A\right)^{2009}=\left(\det\left(I_2+A\right)\right)^{2009}=0$; $\det I_2=1$; $\left(I_2+A\right)^{2009}=I_2 \Rightarrow 0=1$ (Fals)

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A^2 = O_2$; $B^2 = O_2$; $A^2 + B^2 = O_2$

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $I^2 = I_2$; $\det(C^2) = 1$

d) $C^3 = C$; se verifică relația

e) $C + C^2 + ... + C^{2009} = 1004 \cdot (C + I_2) + C = \begin{pmatrix} 2009 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; suma cerută este 2008

f) $C^{-1} = C$; $X = C^{-1} \cdot B$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Subiectul III

<u>Ministerul Educației, Cercetării și Inovării</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

Rezolvare

a) $2A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(2A) = 16 - 12 = 4$

b) $AB = I_2$; $BA = I_2$; $AB - BA = O_2$

c) $\det(A) = 1$; $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) Folosind metoda reducerii obținem $x = 2$ şi $y = 1$

e) $\det(A + B) = 25$; $\det(A - B) = -21$; $\det(B) = 1$; $\det(A) = 1$

f) A inversabilă; B inversabilă; $B^{-1} = A$; $X = A^{-1}B^{-1}$; $X = I_2$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=M(2,1)$.

b) $\det(A+I_3)=0$.

c) $M(a,b)=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=aI_3+bA.$

d) $XY=\begin{pmatrix}e&f&f\\f&e&f\\f&f&e\end{pmatrix}\in G$, unde $e=ac+2bd$, $f=ad+bc+bd$.

e) $AB=BA=\frac{1}{2}\left(A^3-3A\right)=I_3\Rightarrow B=A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

f) $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $a=1;\ b=0;\ c=1$

b) Matricea este egală cu $\begin{pmatrix} a+1 & 1+b \\ 0 & c+1 \end{pmatrix}$. Determinantul este egal cu $(a+1)\cdot(c+1)$

c) $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}$. $b,y\in\mathbb{R}$ şi $a,c,x,z>0\Rightarrow ax,cz>0$ şi $ay+bz\in\mathbb{R}$

d) Fie $C=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in G$. Det$(C)\neq 0\Rightarrow\exists\ C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$. $b\in\mathbb{R}$, $a>0$ şi $c>0$ $\Rightarrow\frac{1}{a}>0,\ \frac{1}{c}>0$ şi $-\frac{b}{ac}\in\mathbb{R}\Rightarrow\ C^{-1}\in G$

e) Fie U = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ şi V=$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Conform calculului de la punctul **c)**, condiția devine $ay+bz\neq bx+cy$. Alegem de exempu $a=2$, $b=0$, $c=3$, $x=4$, $y=1$ şi $z=2$

f) $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\Rightarrow ac=2009$. Un exemplu este: $a=7$, $b=287$ şi $b\in\mathbb{R}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow I_2 = A(0) \in G$

b) Calculam $A(3)$ înlocuind x cu 3 în $A(x)$; $\det(A(3)) = 1$

c) $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$

d) Folosind relația de la punctul **c)** avem $A(x)A(-x) = A(0) = I_2$

e) Folosind în mod repetat relația de la **c)**, obținem $A(1)\ldots A(5) = A(1+\ldots+5) = A(15)$

f) Ca mai sus, $A(1 + 2 + \ldots + 2009) = A(t)$; $t = 2019045$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $B+C=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 3 & -2\end{pmatrix}$; $2\cdot 10\cdot 3\cdot(-2) = -120$

b) $(B+C)^2 = 34\cdot I_2$; $(B+C)^2 \neq I_2 \Rightarrow B+C \notin G$

c) $\det(B+C) = -34$

d) $\det(B) = -1 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$; $X = B^{-1}\cdot C$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}-31 & 10\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & -1\end{pmatrix}^2 = I_2$; $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & -1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & -1\end{pmatrix}\in G$

f) $X^2=\begin{pmatrix}x^2 & 2xy\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$; $X^2 = I_2 \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 1\\ 2xy=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\ x\in\{1;-1\}\end{cases}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; determinantul este 1

b) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $A^3=O_3$

c) $AB=\begin{pmatrix}-0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}-0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $I_3-B=\begin{pmatrix}-0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

d) $AB=I_3-B \Rightarrow AB+B=I_3$; $(A+I_3)B=I_3$

e) $(I_3+A^2)(I_3-A^2)=I_3-A^4$; $A^4=O_3$. Determinantul cerut este 1

f) Ținând cont de punctul **b)**, suma este egală cu $A+2A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 30\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A+3I_2=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. $\mathrm{Det}(A+3I_2)=9$

b) $A^2=O_2$

c) Desființând parantezele şițtinând cont de punctul **b)**, obținem $(a+1)A=O_2$; $a=-1$

d) $y=-x$; $x=2009$ şi $y=-2009$

e) $A^2=O_2\Rightarrow A^6=O_2$

f) Suma este egală cu I_2+2A adică $=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) I_2 se obține pentru $a = 1$

b) $AB = \begin{pmatrix} ab & ab-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} ab & ab-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $AB - BA = O_2$

c) Verificăm forma necesară (vezi calculul de la punctul **b)**; $a \neq 0$ și $b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

d) $\det\left(A^3\right) = \left(\det A\right)^3$; $\det\left(A\right) = a$; $a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

e) Fie $M = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow \det M = a$; $a \neq 0 \Rightarrow$ M inversabilă

f) $x = \dfrac{13}{6}, \quad y = \dfrac{7}{6}, \quad z = -\dfrac{3}{6}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\det B = 1$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = O_3$

c) Calcul efectiv

d) Conform **c)** avem $B^{-1} = A + I_3 = \begin{pmatrix} -0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $B - xI_3 = \begin{pmatrix} -1 \;\; x- & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$. $\mathrm{Det}(B - xI_3) = (1-x)^3$. $(1-x)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$

f) Tinand cont de punctul **b)**, suma este egală cu $2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A-I_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$. Det($A$-$I_2$) = – 10

b) $A^2=\begin{pmatrix}16 & 15\\ 20 & 21\end{pmatrix}$

c) $5A=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 20 & 15\end{pmatrix}$; $6I_2=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$. Verificăm egalitatea

d) $A-xI_2=\begin{pmatrix}-2\ \ x & 3\\ 4 & 3-x\end{pmatrix}$. Det($A$-$xI_2$) = x^2-5x-6. $x\in\{6;-1\}$

e) Conform **c)**, $A^4=25A^2+60A+36I_2$; $A^4=185A+186I_2$; $(185-a)A+(186-b)I_2=O_2\Rightarrow a=185, b=186$

f) Un exemplu este $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A\left(A-I_2\right)=A^2-A=\left(A-I_2\right)\cdot A \Rightarrow A-I_2\in G$.

b) $A-3I_2=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A-3I_2\right)=10$.

c) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$.

d) $A+xI_2=\begin{pmatrix}-1+x & 1\\ 2 & 1+x\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+xI_2\right)=x^2+1=10\Rightarrow x=\pm 3$.

e) $AB=aA-bA^2=BA\Rightarrow B\in G$.

f) Din punctul **e)** avem $B=aI_2-bA\in G$. Pentru $b=0$ luăm $C=aI_2\in G$ și $\det\left(C\right)=a^2=16\Rightarrow C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Subiectul III

Rezolvare

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&4&3\\5&5&6\end{pmatrix}$. $A+I_3$ nu are toate elementele impare ,deci nu apartine lui M

b) A^2 are elementele naturale impare

c) $A-xI_3=\begin{pmatrix}1-x&1&1\\3&3-x&3\\5&5&5-x\end{pmatrix}$. $9x^2-x^3=0$. $x\in\{0;9\}$

d) Scăzând prima linie din celelalte două linii ale lui det(B) obținem două linii cu elementele pare. Scoatem câte un 2 în factor de pe cele două linii

e) $\det(I_3+A)=10\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$

f) I_3+A inversabilă $\Rightarrow X=(I_3+A)^{-1}\cdot O_3$. $X=O_3$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $D = -16$

b) D are două linii identice $\Rightarrow D = 0$

c) Adunând toate coloanele la prima, obținem elementele primei coloane egale cu 0, deci $D = 0$

d) $b = c = 0 \Rightarrow D = a^3$; $a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

e) Facem aceeași operație ca la punctul **c)** și scoatem factor $a + b + c$ de pe prima coloană

f) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. Suma este -4

b) $I_2 - A = \begin{pmatrix} -0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinantul este 2.

c) Calculam A^2 și verificăm relația

d) $A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2$; $A^4 = -A$; $a = -1$.

e) Suma este $A - 2A + 3A - 4A + ... + 2007A - 2008A + 2009A$. Adunând câte doi termeni consecutivi obținem $1005A$.

f) $\det(I_2 - A) = 2 \Rightarrow \det(I_2 - A)^{2009} = 2^{2009}$; $\det A = 0 \neq 2^{2009} \Rightarrow A \neq (I_2 - A)^{2009}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Calculăm $A(2)$ înlocuind x cu 2. Obținem suma egală cu 9

b) $A(x) = I_3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, fals

c) Calcul direct

d) $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{2}{3}\right) = A\left(\frac{2}{3}\right)$. $A\left(\frac{2}{3}\right)A\left(\frac{3}{4}\right) = A(1)$

e) Folosim relația de la punctul **c)** și faptul că $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow 2xy > 0$

f) $(A(x))^2 = A(x)A(x) = A(2x^2)$. $A(x)A(4) = A(8x)$. $2x^2 = 8x$. $x \in \{0; 4\}$, dar $x > 0$, deci $x = 4$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A+I_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Produsul este 2·1·4·3 = 24

b) det (A^2) = $(\det A)^2$; $\det(A^2) = (-2)^2 = 4$.

c) Prin calcul se verifică relatia.

d) $A-xI_2=\begin{pmatrix}-1 & x & 1\\ 4 & & 2-x\end{pmatrix}$. $x^2-3x-2=-4 \Rightarrow x\in\{1;2\}$.

e) Obținem: $\begin{cases}a+b=5\\ a=3\\ 4a=12\\ 2a+b=8\end{cases}$. $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$

f) $\det(A)\neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$. $X-I_2=A^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}+I_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Produsul este $3 \cdot 3 = 9$

b) $A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Obținem determinantul egal cu 24.

c) $2a^2 + 6a + 4 = 0$. $a \in \{-1; -2\}$

d) $\det(A) = a^2$; A inversabilă $\Rightarrow \det(A) \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

f) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+2a+3 & 2a+3 & a+3 \\ 2a+3 & a^2+2a+3 & a+3 \\ a+3 & a+3 & 3 \end{pmatrix}$. Obținem: $\begin{cases} a^2+a+2=2 \\ 2a+2=0 \\ a+2=1 \end{cases}$. Rezultă $a = -1$.

Rezolvare

a) $2A+I_2=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; determinantul este egal cu 3

b) $A^2=\begin{pmatrix}22 & 15\\ 10 & 7\end{pmatrix}$. Suma cerută este 54

c) det (A) = $-2\neq 0\Rightarrow \exists\, A^{-1}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

d) A are toate elementele diferite. A are toate elementele din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$

e) $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

f)Fie $C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2$; det($C$) = $ad-bc$. C inversabilă $\Leftrightarrow$ det(C) $\neq 0$. Numerele a, b, c, d sunt 1, 2, 3 şi 4 într-o ordine oarecare. Unul singur dintre ele este divizibil cu 3, deci det(C) nu e divizibil cu 3, de unde det(C) $\neq 0$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A^2\text{-}3A=\begin{pmatrix}0 & a & a\\ a & a^2-3a+2 & 2a-2\\ a & 2a-2 & a^2-3a+2\end{pmatrix}$

b) det (A) = $2a^2-2a,\ a\in\{0;1\}$

c) Înlocuim în cele trei ecuații x,y și z cu 1, 1 și 1 și obținem a = 2

d) $z = 4-x$; $y = 4-x$; $2x+4-x+4-x = 4$; $8 = 4$ (F); S = ∅.

e) $a=2\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\ x+2y+z=4\\ x+y+2z=4\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=3$

f) $x=\dfrac{2(a-1)}{a}$, $x=\dfrac{2}{a}=z$

Rezolvare

a) $D = 2$

b) D are două linii identice, deci $D = 0$

c) $D = a^2 - 5a + 6$; $D = 2 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$; $a \in \{1; 4\}$

d) Scăzând prima linie din cele două obținem: $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$$D = (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

e) Rezultă din punctul anterior.

f) Dintre cele 3 numere întregi a, b, c, cel puțin două au aceeaşi paritate, deci diferența lor este număr par. Conform punctului **d)**, D este număr par.

Rezolvare

a) $3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $3 \neq 1 \Rightarrow 3I_2 \notin G$

b) $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suma este 8

c) det $(A(a)) = 1 + a - a^2$, $a - a^2 = 0$, $a \in \{0; 1\}$

d) $A(a)$ neinversabilă $\Leftrightarrow$ det(A)=0. $a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. $a > 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

f) $X = A^{-1}(1) \cdot A(4)$. $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A^2+4A=\begin{pmatrix} 13 & 2a+14 & 2a+14 \\ 2a+14 & a^2+4a+8 & 4a+12 \\ 2a+14 & 4a+12 & a^2+4a+8 \end{pmatrix}$

b) $\det(A)=a^2-8a+12$; $a^2-8a+12=0 \Rightarrow a\in\{2;6\}$

c) Înlocuim în fiecare ecuație x, y şi z cu 1,1 şi respectiv 1 şi obținem $a=1$

d) Scăzând a doua ecuație din a treia obținem $z=y$. Scăzând prima ecuație din a doua ecuație obtinem $x=-4y$. Înlocuim în prima ecuație $-4y+2y+2y=5 \Leftrightarrow 0=5 \Rightarrow y\in\varnothing$

e) $a=1\Rightarrow\begin{cases} x+2y+2z=5 \\ 2x+y+2z=5 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=3$

f) $x=\dfrac{5(a-2)}{a-6},\ y=-\dfrac{5}{a-6}=z$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$; $A^2 - A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\det(A) = 0$; $\det(3A) = 36 - 36 = 0$. Suma este 0.

c) Calcul direct.

d) $\det(X) = ad - bc \Rightarrow ad - bc = 0$. Înlocuim în relația de la punctul **c)**.

e) $X^2 = B \Rightarrow \det(X^2) = \det(B)$. $\det(X^2) = (\det(X))^2$. $(\det(X))^2 = 0 \Rightarrow \det(X) = 0$

f) $X^2 = A$ și $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(X) = 0$. $\det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = (a + d)\cdot X$. $(a+d)\cdot X = A \Rightarrow \begin{cases} a(a+d)=2 \\ b(a+d)=1 \\ c(a+d)=4 \\ d(a+d)=2 \end{cases}$

Adunând prima și ultima ecuație rezultă $a+d \in \{2; -2\}$. $a+d=2 \Rightarrow a=1, b=\frac{1}{2}, c=2, d=1$.

$a+d=-2 \Rightarrow a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-2, d=-1$.

Subiectul III

Rezolvare

a) $A = {}^tA \Rightarrow A - {}^tA = O_2$.

b) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -4$.

c) Se verifică prin calcul.

d) Pentru $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

e) $a = 1$.

f) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $X = I_2 - 2A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $m = -2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det(B) = 3 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow B$ este inversabilă.

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ -m & -m \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ -m & -m \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA$.

Sau $AB = A(A + mI_2) = A^2 + mA = O_2 + mA = mA = BA$.

e) $\det(B) = (m+1)(m-1) + 1 = m^2 \Rightarrow m^2 \geq 1 \Rightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 & b+2 \\ c+1 & d-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = -a - 3 + 2b + 4 \\ -a - c = 0 \\ -b - d = -c - 1 + 2d - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a - b + d = 1 \\ 3d + b - c = 5 \end{cases}$. Numerele a, b, c, d

sunt în progresie aritmetică de rație $r \Rightarrow b = a + r,\ c = a + 2r,\ d = a + 3r$ și $b = \dfrac{a+c}{2} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} a + d = 1 \\ 3d - c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3r = 1 \\ 2a + 7r = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 2$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $X(a)=\begin{pmatrix}9&0&9\\0&9&0\\9&0&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&4\\0&4&0\\4&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow X(a)=\begin{pmatrix}5&0&5\\0&5&0\\5&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow a=5$.

b) $X(-a)=\begin{pmatrix}-a&0&-a\\0&-a&0\\-a&0&-a\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}=-X(a)$.

c) $X(-2)+X(-1)+X(0)+X(1)+X(2)+X(3)=X(-2)+X(2)+X(-1)+X(1)+X(0)+X(3)$. Din **b)** $\Rightarrow X(-2)+X(2)=X(-1)+X(1)=O_3\Rightarrow$

$X(-2)+X(-1)+X(0)+X(1)+X(2)+X(3)=X(0)+X(3)=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}$.

d) $X(1)\cdot X(10)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&0&10\\0&10&0\\10&0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&0&20\\0&10&0\\20&0&20\end{pmatrix}$,

$X(2)\cdot X(5)=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&5\\0&5&0\\5&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&0&20\\0&10&0\\20&0&20\end{pmatrix}\Rightarrow X(1)\cdot X(10)=X(2)\cdot X(5)$.

e) $\det(X(a)+I_3)=\begin{vmatrix}a+1&0&a\\0&a+1&0\\a&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3-a^2(a+1)=2a^2+3a+1$. Matricea $X(a)+I_3$

inversabilă $\Rightarrow 2a^2+3a+1\neq 0\Rightarrow\Rightarrow a\notin\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$.

f) $Y=\begin{pmatrix}x&y&z\\p&q&r\\d&e&f\end{pmatrix}$, $x,y,z,p,q,r,d,e,f\in\mathbb{R}$,

$Y\cdot X(a)=\begin{pmatrix}x&y&z\\p&q&r\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x+z)&ay&a(x+z)\\a(p+r)&aq&a(p+r)\\a(d+f)&ae&a(d+f)\end{pmatrix}$,

$X(a)\cdot Y=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\p&q&r\\d&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x+d)&a(y+e)&a(x+z)\\ap&aq&ar\\a(x+d)&a(y+e)&a(z+f)\end{pmatrix}\Rightarrow z=d,\ e=0,\ r=0,\ p=0,\ x=f$,

$y=0,\ d=z\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}x&0&z\\0&q&0\\z&0&x\end{pmatrix}$, $x,d,q\in\mathbb{R}$.

Rezolvare

a) $A(1,3)+B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b) $\begin{cases}3p-q=2\\ q-2=5\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}p=3\\ q=7\end{cases}$.

c) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2\Rightarrow B^4=(-I_2)^2=I_2$.

d) $B^2=-I_2, B^3=-B, B^4=I_2,\ldots,B^8=I_2\Rightarrow B-I_2-B+I_2+B-I_2-B+I_2=O_2$.

e) $A(2,1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+c=-1\\ -a+2c=2\\ 2b+d=-1\\ -b+2d=1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

f) $\det(A(x,y))=\begin{vmatrix}x & y\\ -y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2\Rightarrow x^2+y^2=1$, cu $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=0, y=\pm1$ sau

$y=0, x=\pm1\Rightarrow A\in\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A+3I_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2 \Rightarrow A^3=O_2$

$\Rightarrow I_2+2A+3A^2+4A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

c) $\det B=\begin{vmatrix}b+1 & 1\\ -1 & b-1\end{vmatrix}=b^2$, $b\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \det B\neq 0 \Rightarrow B$ inversabilă**.**

d) aC inversa matricei $A+2I_2 \Leftrightarrow (aC)(A+2I_2)=(A+2I_2)(aC)=I_2$, $A+2I_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$aC(A+2I_2)=a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $(A+2I_2)aC=a\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow$

$a\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$.

e) $B^3=(A+bI_2)^3$, $AI_2=I_2A \Rightarrow B^3=A^3+3bA^2+3b^2A+b^3I_2$. Din b) $\Rightarrow A^3=A^2=O_2 \Rightarrow$

$B^3=3b^2A+b^3I_2$.

f) $AB=A(A+bI_2)=A^2+bA \overset{b)}{\Rightarrow} AB=bA$, $BA=bA \Rightarrow AB+BA=2bA \Rightarrow 2bA=8A,\ A\neq O_2 \Rightarrow b=4$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $2X(3,-2,-1)-X(1,2,3)=2\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1\\1&-6&0\\0&1&-5\end{pmatrix}$.

b) $2x+3=x^2\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3\Rightarrow x\in\{-1,\ 3\}$.

c) $X(1,-1,1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(X(1,-1,1)\right)=-1+1=0\Rightarrow X(1,-1,1)$ nu este inversabilă.

d) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=1,\ b=1,\ c=-1$.

e) $XY=\begin{pmatrix}+\,xz&1&x\quad z\\z+y&yz&1\\1&2z&z^2\end{pmatrix}$, $YX=\begin{pmatrix}xz&1&2z\\z+x&yz&1\\1&y+z&z^2\end{pmatrix}$, $YX=XY\Rightarrow x=y=z$.

Din $\det(X)=9\Rightarrow xyz+1=9\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=y=z=2$.

f) $\begin{vmatrix}x_1&0&2\\x_2&2&0\\0&x_2&x_1\end{vmatrix}=2x_1^2+2x_2^2$. Din relațiile lui Viète $\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{3}{2}=S\\x_1x_2=-\dfrac{1}{2}=P\end{cases}\Rightarrow$

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=\dfrac{9}{4}+1\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\dfrac{13}{4}\Rightarrow\begin{vmatrix}x_1&0&2\\x_2&2&0\\0&x_2&x_1\end{vmatrix}=2\cdot\left(x_1^2+x_2^2\right)=2\cdot\dfrac{13}{4}=\dfrac{13}{2}$.

Subiectul III

Rezolvare

a) $A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -6 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow A^2-2A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -6 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -6 & 6\end{pmatrix}=O_2$.

c) $xA+yB=\begin{pmatrix}-x+3y & x-y\\ -3x+3y & 3x-y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+3y=1\\ x-y=0\\ -3x+3y=0\\ 3x-y=1\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

d) $AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$, $BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2\Rightarrow$

$\det(AB-BA)=\det(O_2)=0\Rightarrow AB-BA$ nu este inversabilă.

e) $m=\det(A+B)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$, $n=\det(A+2B)=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8$, $p=\begin{vmatrix}11 & -3\\ 9 & -1\end{vmatrix}=16$, $\log_2 m=\log_2 4=2$,

$n=\log_2 8=3$, $\log_2 p=\log_2 16=4\Rightarrow\log_2 m+\log_2 n+\log_2 p=9$.

f) $(A-B)(A+B)=A^2-AB+BA-B^2\overset{\text{d)}}{=}A^2-B^2$, $B^2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix}=2B$. Deci pentru

$a=2,\ b=-2$ $(A-B)(A+B)=2A-2B=aA+bB$.

Rezolvare

a) $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-2&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3\\-1&0&0\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=1,\ b=3,\ c=-1$.

b) $C=\begin{pmatrix}&&-3\\0&-6&2\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3\\3&0&0\\9&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&9&0\\0&0&6\\3&0&0\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=9,\ b=6,\ c=3$.

c) $A+2I_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A+2I_3\right)=9$.

d) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$A^2A=AA^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3\Rightarrow A^2=A^{-1}$.

e) $A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $Y\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y=-1\\y+z=3\\x+z=-6\end{cases}$

$\overset{E_2-E_1}{\Rightarrow}\begin{cases}x+y=-1\\x-z=-4\\x+z=-6\end{cases}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

f) $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ sunt în progresie geometrică de rație q $\Rightarrow b=aq,\ c=aq^2,\ q\neq0$.

$XY=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&y\\z&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ay\\bz&0&0\\0&cx&0\end{pmatrix}$, $YX=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&y\\z&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&bx\\cy&0&0\\0&az&0\end{pmatrix}$,

$XY=YX\Rightarrow\begin{cases}ay=bx\\bz=cy\\cx=az\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ay=aqx\\aqz=aq^2y\\aq^2x=az\end{cases},\ a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow y=qx,\ z=q^2x$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-2y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2x-3 & 2 \\ 3 & x-2y-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x-3=-1 \\ x-2y-4=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

b) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\Rightarrow A^2+2A-5I_2=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=O_2$.

c) $A+2xI_2=\begin{pmatrix} -1+2x & 2 \\ 3 & -1+2x \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} -1+2x & 2 \\ 3 & -1+2x \end{vmatrix}=10\Rightarrow(-1+2x)^2-6=10\Rightarrow$

$-1+2x=\pm4\Rightarrow x\in\left\{-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}$.

d) $A^3=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 & 18 \\ 27 & -19 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -19 & 18 \\ 27 & -19 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -m & 2m \\ 3m & -m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -m+n=-19 \\ 2m=18 \\ 3m=27 \end{cases}\Rightarrow$

$m=9,\ n=-10$.

e) $\det A=-5\neq0\Rightarrow$ există A^{-1}, $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

f) $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=A^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}A\Rightarrow X=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a+1=1\end{cases}\Rightarrow a=0$.

b) $X(1)-X(2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 18\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+3a\\ 2a+3a+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 18\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1+3a=10\\ 5a+3=18\end{cases}\Rightarrow a=3$.

d) $\det(X(a))=a+1-2a^2\Rightarrow -2a^2+a+1\geq 0\Rightarrow a\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

e) $X(a)X(b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 2b & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2ab & b+ab+a\\ 2a+2ab+2b & 3ab+a+b+1\end{pmatrix}$,

$X(b)X(a)=\begin{pmatrix}1 & b\\ 2b & b+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2ab & a+ab+b\\ 2b+2ab+2a & 3ab+a+b+1\end{pmatrix}\Rightarrow X(a)\cdot X(b)=X(b)\cdot X(a)$.

f) $X(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(X(1)\right)^2=3X(1)\Rightarrow\left(X(1)\right)^{2009}=3^{2008}\cdot X(1)$.

Rezolvare

a) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ număr par $\Rightarrow A \in M$.

b) $2A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $\det X = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2a+1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 + 3a - 2a - 1 + 6a - 6 = 8a - 8 = 8(a-1)$ număr par, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \in M$.

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & -21 & 7 \\ 21 & 0 & 14 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = 7A$.

e) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -4 \\ -4y + z = 11 \\ 3x + z = 6 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$.

f) $\det B = \begin{vmatrix} 2007 & 1 & 4 \\ 2008 & 2 & 5 \\ 2009 & 3 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 2008 & 1 & 4 \\ 2010 & 2 & 5 \\ 2012 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1004 & 1 & 4 \\ 1005 & 2 & 5 \\ 1006 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, număr întreg par $\Rightarrow B \in M$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

b) $\det(M(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

c) $M(a)M(b) = (aI_2 + A)(bI_2 + A) = abI_2 + (a+b)A + I_2 = (ab+1)I_2 + (a+b)A = (ba+1)I_2 + (b+a)A =$
$= M(b)M(a)$.

d) $M^2(a) = (a^2+1)I_2 + 2aA = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ suma elementelor lui $M^2(a)$ este $2(a+1)^2 \geq 0$.

e) $(M(a))^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

f) Dacă $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ rezultă $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + y_0 = a \\ x_0 + ay_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(x_0 - y_0) = a - 1 \Rightarrow x_0 - y_0 = 1$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $xI_2 = B - A \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2$.

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -32 \\ 8 & 45 \end{pmatrix}$, $8A + 5I_2 = \begin{pmatrix} -8 & -32 \\ 8 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -32 \\ 8 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$B^2 = 8A + 5I_2$.

c) $AB = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -24 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -24 \\ 6 & 31 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$AB = BA,\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in C$.

d) $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AX = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-4z & -y-4t \\ x+5z & y+5t \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -x-4z & -y-4t \\ x+5z & y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-4z = 1 \\ x+5z = 1 \\ -y-4t = -4 \\ y+5t = 7 \end{cases} \Rightarrow x = -9,\ y = -8,\ z = 2,\ t = 3 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

e) $\det A = -5 + 4 = -1$,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6} - 4 - 3 + 2\sqrt{6} + \left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{6} - 7 + 2 - 3\sqrt{6} = -5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -1 = -5a \Rightarrow a = \dfrac{1}{5}$.

f) $A + xB = \begin{pmatrix} x-1 & -4x-4 \\ x+1 & 7x+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xB) = \begin{vmatrix} x-1 & -4x-4 \\ x+1 & 7x+5 \end{vmatrix} = (x-1)(7x+5) - (-4x-4)(x+1) =$

$= 11x^2 + 6x - 1 \Rightarrow$ valoarea minimă este $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{80}{44} = -\dfrac{20}{11}$.

Rezolvare

a) $2A-B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$

b) $xA+yB=\begin{pmatrix}x & 0\\ 2x & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y & y\\ y & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y & y\\ 2x+y & x+2y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-y & y\\ 2x+y & x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=6\\ y=-3\\ 2x+y=3\\ x+2y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}.$$

c) $A-I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-I_2)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2.$

d) $\det(A)=1-0=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

e) $\det(xB+I_2)=\begin{vmatrix}-x+1 & x\\ x & 2x+1\end{vmatrix}=-3x^2+x+1,\ \det B=-3\Rightarrow$

$-3x^2+x+1=-3\Rightarrow -3x^2+x+4=0\Rightarrow x\in\left\{-1,\ \dfrac{4}{3}\right\}.$

f) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\Rightarrow A\cdot X=\begin{pmatrix}a & b\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix},\ X\cdot B=\begin{pmatrix}-a+b & a+2b\\ -c+d & c+2d\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}a & b\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a+b & a+2b\\ -c+d & c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}b & a+3b\\ 2a+d & 2b+c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ a+3b=1\\ 2a+d=-1\\ 2b+c+3d=3\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}b=1\\ a=-2\\ d=3\\ c=-8\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -8 & 3\end{pmatrix}.$$

Subiectul III

Rezolvare

a) $A-B+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&4\end{pmatrix}$.

b) $2A=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(2A)=\begin{vmatrix}2&4\\0&2\end{vmatrix}=4$, $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow 4=a\cdot 1\Rightarrow a=4$.

c) $B^2=\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-8\\0&-8\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}=4B$.

d) $\begin{pmatrix}1&x\\y&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+x\\y&2y+1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2+x\\y&2y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$. Pentru $x=-2,\ y=0$ avem $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A, sau $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $x=-2,\ y=0$.

e) $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{R}$, $A\cdot X=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z&y+2t\\z&t\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}x+2z&y+2t\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=0\\y+2t=-2\\z=0\\t=-2\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=2,\ z=0,\ t=-2\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&2\\0&-2\end{pmatrix}$ sau $X=A^{-1}B$.

f) $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$,

$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=A+B,\ (A+B)^4=(A+B)^2(A+B)^2=I_2\Rightarrow$

$A+B+(A+B)^2+(A+B)^3+(A+B)^4=2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+2I_2=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ număr impar $\Rightarrow A \in M$.

b) $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

d) $A^3 = I_3 \Rightarrow A^2 A = AA^2 = I_3 \Rightarrow A^{-1} = A^2 \Rightarrow$ $\det A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ număr impar $\Rightarrow A^{-1} \in M$.

e) $\begin{vmatrix} 2a-1 & a & 2 \\ -1 & a+1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a - a - 1 - 2 - 4a - 4 + a = 2a^2 - 2a - 7 = 2\left(a^2 - a\right) - 7$. Expresia

$2\left(a^2 - a\right)$ reprezintă un număr par oricare ar fi $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\left(a^2 - a\right) - 7$ este un număr impar $\Rightarrow B \in M$.

f) $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow YA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$,

$AY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow YA = AY \Rightarrow b = g = f,\ a = e = i,\ c = d = h \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) $xB+yI_3=\begin{pmatrix}-2x & x & x\\ x & -2x & x\\ x & x & -2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y & x & x\\ x & -2x+y & x\\ x & x & -2x+y\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y & x & x\\ x & -2x+y & x\\ x & x & -2x+y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y=2\\ x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}.$

b) $A-3I_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A-3I_3)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=27.$

c) $BA=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3,$

$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3\Rightarrow BA=AB\Rightarrow B\in M.$

d) $aA\cdot A=aA^2,\ A\cdot aA=aA^2\Rightarrow aA\cdot A=A\cdot aA\Rightarrow aA\in M.$

e) $B+A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow(B+A)\cdot\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 3y & 3z\\ 3x & 0 & 3z\\ 3x & 3y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3y=1\\ 3z=1\\ 3x=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{3}.$

f) $(X+Y)A=X\cdot A+Y\cdot A,\ A(X+Y)=A\cdot X+A\cdot Y$, dar $X,Y\in M\Rightarrow X\cdot A=A\cdot X,\ Y\cdot A=A\cdot Y\Rightarrow$ $(X+Y)A=A(X+Y)\Rightarrow X+Y\in M.$

Rezolvare

a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{vmatrix}=1$, $\det(B)=\begin{vmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \det(A)+\det(B)=1$.

b) $A-I_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\in M$ **,** pentru $a=2\in\mathbb{R},\ b=4\in\mathbb{R}$.

c) $B^2=\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$.

d) aC inversa matricei $A\Leftrightarrow (aC)A=A(aC)=I_3$.

Avem $CA=\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$a\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

e) Din c)$\Rightarrow$ există $A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

f) $B^2=O_3\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow ab=0\Rightarrow a=0$ sau $b=0$, $a,b\in\{0,1,2\}\Rightarrow$

$B\in\left\{\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$.

Rezolvare

a) $I_3+A(1,2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=2,\ b=2,\ c=3$.

b) $a=2x-3=y-2=8-y$, $b=4-z=2$, $c=y=5\Rightarrow x=3,\ y=5,\ z=2$.

c) $\begin{vmatrix}1&2&4\\4&1&2\\2&4&1\end{vmatrix}=1+8+64-8-8-8=49$.

d) $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=3,\ b=1,\ c=2$.

e) $A(1,2,0)+xI_3=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1&2&0\\0&x+1&2\\2&0&x+1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}x+1&2&0\\0&x+1&2\\2&0&x+1\end{vmatrix}=(x+1)^3+8$

$\Rightarrow (x+1)^3+8=0\Rightarrow x+1=-2\Rightarrow x=-3$.

f) Fie $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}\in M\ \Rightarrow\ X^2=\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2yz&z^2+2xy&y^2+2xz\\y^2+2xz&x^2+2yz&z^2+2xy\\z^2+2xy&y^2+2xz&x^2+2yz\end{pmatrix}\in M$

pentru $a=y^2+2xz,\ b=z^2+2xy,\ c=y^2+2xz$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $2A-B-I_2=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 4 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

b) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+6=5$, $\det(B)=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1+6=5\Rightarrow \det(A)+\det(B)=10$.

c) $AB=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow AB=BA$.

d) $AB=BA=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$, sau $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

e) $A+xB=\begin{pmatrix}1-x & -3+3x\\ 2-2x & -1+x\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{vmatrix}1-x & -3+3x\\ 2-2x & -1+x\end{vmatrix}=-x^2+2x-1+6-6x-6x+6x^2=5x^2-10x+5\Rightarrow$

$5x^2-10x+5=20\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$.

f) $B=-A\Rightarrow A^7+B^7=A^7+(-A)^7=A^7-A^7=O_2$.

Subiectul III

Rezolvare

a) $A-2B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -2 & -6\end{pmatrix}$.

b) $pA+qB=\begin{pmatrix}-2p & 2p\\ 2p & -2p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2q & 2q\\ 2q & 2q\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2p+2q & 2p+2q\\ 2p+2q & -2p+2q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2p+2q=-8\\ 2p+2q=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}p=2\\ q=-2\end{cases}$.

c) $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2\Rightarrow A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}=16I_2$.

d) $\sqrt{2}A-\sqrt{2}I_2=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\det\left(\sqrt{2}A-\sqrt{2}I_2\right)=\begin{vmatrix}-3\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\end{vmatrix}=18-8=10$.

e) C inversabilă $\Leftrightarrow\det C\neq 0$, $\det C=\begin{vmatrix}-2+x & 2+m\\ 2 & -2+x\end{vmatrix}=x^2-4x-2m\Rightarrow$

$x^2-4x-2m\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow 16+8m<0\Rightarrow m\in(-\infty,-2)$.

f) $A^{2009}\cdot B^{2009}=(AB)^{2009}\overset{c)}{=}O_2^{\,2009}=O_2$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A+I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=2$ număr par

$\Rightarrow A+I_3\in M$.

b) $(A+I_3)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}$, $3A+I_3=\begin{pmatrix}0&3&3\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$(A+I_3)^2=3A+I_3$.

c) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A\Rightarrow A+A^2+A^3+\ldots+A^{12}=12A=\begin{pmatrix}0&12&12\\0&12&12\\0&0&0\end{pmatrix}$.

d) $A+xI_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&1&1\\0&x+1&1\\0&0&x\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+xI_3)=\begin{vmatrix}x&1&1\\0&x+1&1\\0&0&x\end{vmatrix}=x^2(x+1)\Rightarrow$

$x^2(x+1)=0$, $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1,\ 0\}$.

e) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\p&q&r\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})\Rightarrow AX=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\p&q&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d+p&e+q&f+r\\d+p&e+q&f+r\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\det(AX)=\begin{vmatrix}d+p&e+q&f+r\\d+p&e+q&f+r\\0&0&0\end{vmatrix}=0$ număr par $\Rightarrow AX\in M$.

f) $\det B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&(b-a)(a+b)&(c-a)(a+c)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

Dintre numerele $a,b,c\in\mathbb{Z}$ cel puțin două au aceeași paritate, deci diferența lor este un număr par $\Rightarrow B\in M$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A+3I_2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

b) $\begin{cases}x=2\\ a=2-b\\ x=a+3\end{cases}\Rightarrow x=2,\ a=-1,\ b=3$.

c) $\det(A)=x^2-1\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x\in\{\pm 1\}$.

d) $\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3a & x+2a\\ 2b+3x & b+2x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+b & 2a+x\\ 3x+2b & 3a+2x\end{pmatrix}\Rightarrow 3a=b$. Din $a,b\in\{0,1,2,3\}\Rightarrow (a,b)\in\{(0,0),(1,3)\}$.

e) $A^2=\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+ab & 2ax\\ 2bx & x^2+ab\end{pmatrix}\Rightarrow$

$A^2-2xA+\left(x^2-ab\right)I_2=\begin{pmatrix}x^2+ab & 2ax\\ 2bx & x^2+ab\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x^2 & 2ax\\ 2bx & 2x^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^2-ab & 0\\ 0 & x^2-ab\end{pmatrix}=O_2$.

f) $X\in M\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}$, $x,a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & a\\ b & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+ab & 2ax\\ 2bx & x^2+ab\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}x^2+ab & 2ax\\ 2bx & x^2+ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x^2+ab=1\\ 2ax=2\\ 2bx=0\end{cases}\Rightarrow 2bx=0\Rightarrow b=0$ sau $x=0$. Din ecuația

$2ax=2\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow b=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow a=\pm 1\Rightarrow X\in\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$.

Subiectul III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $X = I_2 - 2A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow A^4 = (-I_2)\cdot(-I_2) = I_2$.

c) $x = 2,\ y = 1 \Rightarrow \begin{cases} -4a + 5b = 6 \\ -2a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

d) Din b) $\Rightarrow A^{-1} = -A \Rightarrow \left(2A + A^{-1}\right)\left(A - 2A^{-1}\right) = (2A - A)(A + 2A) = A \cdot 3A = -3I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

e) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $\det A^2 = \det(-I_2) = 1$, $\det A^3 = \det(-A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$, $\det A^4 = \det I_2 = 1 \Rightarrow$
$\det(A) + \det(A^2) + \det(A^3) + \det(A^4) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

f) $A \cdot X \cdot A^{-1} = A + I_2 \ \big|\cdot A \Rightarrow A \cdot X = A^2 + A \Rightarrow A \cdot X = -I_2 + A \ \big|\cdot A^{-1} \Rightarrow X = -A^{-1} + I_2$, dar
$A^{-1} = -A \Rightarrow X = A + I_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow S_1(I_3)=1,\ S_2(I_3)=1,\ S_3(I_3)=1\Rightarrow S_1(I_3)=S_2(I_3)=S_3(I_3)\Rightarrow I_3\in M$.

b) $X(1)=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow X(1)-2I_3=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

c) $S_1(B)=2a+2-2b+3,\ S_2(B)=-7+2a-1+3,\ S_3(B)=-1\Rightarrow 2a-2b+5=2a-5=-1\Rightarrow$
$a=2,\ b=5$.

d) $X(a)+I_3=\begin{pmatrix}2a+1&a+1&a+2\\0&a&a-2\\0&0&1\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{vmatrix}2a+1&a+1&a+2\\0&a&a-2\\0&0&1\end{vmatrix}=a(2a+1)\Rightarrow$

$a(2a+1)=6\Rightarrow a\in\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$.

e) $C=\begin{pmatrix}2a&a+1&a+2\\0&a-1&a-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a&3a+1&2a+2\\0&a-1&2a-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$S_1(C)=4a,\ S_2(C)=3a+1+a-1,\ S_3(C)=2a+2+2a-2\Rightarrow S_1(C)=S_2(C)=S_3(C)\Rightarrow C\in M,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

f) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix},\ S_1(A)=S_2(A)=S_3(A),\ B=\begin{pmatrix}x&y&z\\q&r&s\\m&n&p\end{pmatrix},\ S_1(B)=S_2(B)=S_3(B)$.

$A+B=\begin{pmatrix}a+x&b+y&c+z\\d+q&e+r&f+s\\g+m&h+n&i+p\end{pmatrix},\ S_1(A+B)=S_1(A)+S_1(B),\ S_2(A+B)=S_2(A)+S_2(B),$

$S_3(A+B)=S_3(A)+S_3(B)$, dar $S_1(A)=S_2(A)=S_3(A),\ S_1(B)=S_2(B)=S_3(B)\Rightarrow$
$S_1(A+B)=S_2(A+B)=S_3(A+B)\Rightarrow A+B\in M$.